Th des extrema liés [Gou] p 321

Th : Soit $f, g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$ des fcts C^1 où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\Gamma = \{x \in U,\ g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.
Si $f_{|\Gamma}$ admet un ext rel en $a \in \Gamma$ et si les fl $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ st indép, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tq $df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_r dg_r(a)$.

Dém :

Rq : $r \leq n$ ($\dim (\mathbb{R}^n)^* = n$).
OPS $r \leq n-1$ (sinon, $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ est une base de $(\mathbb{R}^n)^*$ donc le résultat est évident)
On identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ où $s = n-r \geq 1$:
on écrit les él^{ts} de $\mathbb{R}^n$ ss la forme $(x;y) = (x_1, \dots, x_s; y_1, \dots, y_r)$ et $a = (\alpha, \beta)$.

A voir : Les fl $df(a), dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ st liées

Ccl : $\exists \mu_0, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}$ non ts nuls, $\mu_0 df(a) + \mu_1 dg_1(a) + \dots + \mu_r dg_r(a) = 0$
mais les $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ st indép donc $\mu_0 \neq 0$
et donc $\lambda_i = -\dfrac{\mu_i}{\mu_0}$ convient.

Il s'agit de mq $M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$ est de rg $\leq r$.

Les $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ st indép ie

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) \cdots \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) \cdots \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) \cdots \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) \cdots \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$$ est de rg r donc on peut

en extraire un dét $\neq 0$ de taille r et, quitte à ren, OPS $\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a)\right)_{1\leq i,j\leq r} \neq 0$.

D'après le th des fcts implicites, il existe $\begin{cases} \text{un vois ouvert } V \text{ de } \alpha \\ \text{un vois ouvert } W \text{ de } \beta \\ \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r) : V \to W \quad C^1 \end{cases}$ tq

$\Gamma \cap (V \times W) = \{ (x, \varphi(x)), x \in V \}$.

Par suite, $x \in V \overset{h}{\mapsto} f(x, \varphi(x))$ admet un ext rel en α

donc $0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha)$ pour tt $i \in \{1, \dots, s\}$

De plus, $g_k(x, \varphi(x)) = 0$ pour tt $x \in V$ donc

$0 = \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha)$ pour tt $i \in \{1, \dots, s\}$ et tt $k \in \{1, \dots, r\}$

Finalt, les s 1ers vect colonnes de M s'expriment linéairt en fct des r derniers donc $\mathrm{rg}(M) \leq r$.