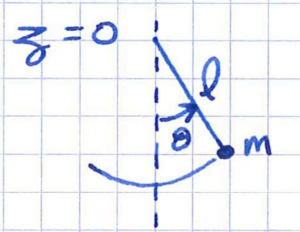
Pendule oscillant linéarisé [cours]+[20]p376

Pb :



θ est régi par $\ddot{\theta}+k\dot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$ (E)
où k est le coeff de frott^t
et g l'intensité de pesanteur.

Peut-on visualiser les trajectoires de θ ?

Etude :

(E) $\Longleftrightarrow$ $\dot{x}=Ax$ avec $x=\begin{pmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -g/l & -k\end{pmatrix}$

Ds la suite, on supp $g=l$ de sorte que $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -k\end{pmatrix}$

Les vp de A st $\begin{cases} -k/2 \pm \sqrt{k^2/4-1} & \text{si } k>2\\ -1 & \text{si } k=2\\ -k/2 \pm i\sqrt{1-k^2/4} & \text{si } 0<k<2\end{cases}$

1er cas : $k>2$ (frott^t fort)

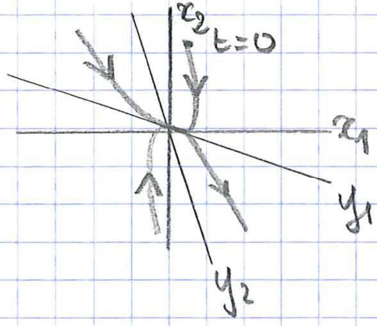
Par exple, $k=\frac{10}{3}$.

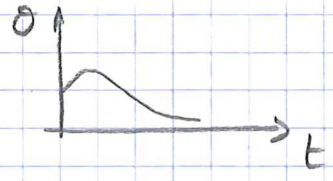
$\lambda_1=-1/3$ et $\lambda_2=-3$ st les vp de A de vect propres associés $v_1=\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}$ et $v_2=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}$ resp^t.

Alors, $P=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ vérifie $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1/3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ de sorte que

$\dot{y}=\begin{pmatrix}-1/3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}y$ avec $x=Py$ $\left(\dot{y}=P^{-1}\dot{x}=P^{-1}Ax=P^{-1}APy\right)$.

Par suite, $\begin{cases} y_1=y_1^0\,e^{-1/3\,t}\\ y_2=y_2^0\,e^{-3t}\end{cases}$ avec $y_1^0, y_2^0\in\mathbb{R}$

donc 

et donc 

2ème cas : $k = 2$ (frott^t moyen)

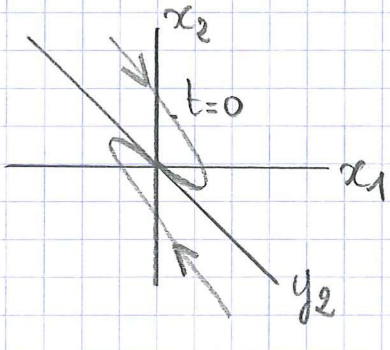
$\lambda = -1$ est la vp double de A de vect propre associé
$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

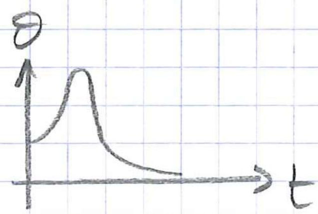
N.B : $A \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Alors, il existe P tq $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ de sorte que

$\dot{y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y$ avec $x = Py$.

Par suite, $\begin{cases} y_1 = y_1^0 e^{-t} \\ y_2 = (y_2^0 + t y_1^0) e^{-t} \end{cases}$ avec $y_1^0, y_2^0 \in \mathbb{R}$

donc 

et donc 

3ème cas : Si $0 < k < 2$ (frott^t faible)

Par exple, $k = 1$
$\lambda = -1/2 - i\sqrt{3}/2$ est une vp de A de vect propre associé
$u + iv = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

Alors, $A(u)+iA(v) = A(u+iv) = \lambda(u+iv) = \left(-\frac{1}{2}u+\frac{\sqrt{3}}{2}v\right)+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}u-\frac{1}{2}v\right)$

donc $\mathrm{Mat}(A)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ et donc

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ vérifie $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ de sorte que

$\dot{y} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} y$ avec $x = Py$.

Par suite, $\begin{cases} \dot{z}_1 = -\sqrt{3}/2 \, z_2 \\ \dot{z}_2 = \sqrt{3}/2 \, z_1 \end{cases}$ avec $z = e^{1/2 t} y$

donc $\begin{cases} \ddot{z}_1 = -(\sqrt{3}/2)^2 z_1 \\ \ddot{z}_2 = -(\sqrt{3}/2)^2 z_2 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} z_1 = R\cos(\sqrt{3}/2\, t - \varphi) \\ z_2 = R\sin(\sqrt{3}/2\, t - \varphi) \end{cases}$

avec $R, \varphi \in \mathbb{R}$ d'où $\begin{cases} y_1 = e^{-1/2 t} R\cos(\sqrt{3}/2\, t - \varphi) \\ y_2 = e^{-1/2 t} R\sin(\sqrt{3}/2\, t - \varphi) \end{cases}$

Détermination des axes de la spirale :

On considère $\rho > 0$ tq $\rho^2 = (x_1 e^{1/2 t})^2 + (x_2 e^{1/2 t})^2$ et on en cherche le max et le min.

Alors, $\rho^2 = e^t(x_1^2 + x_2^2)$

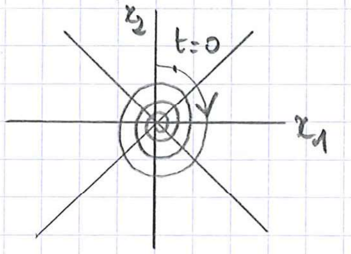
donc $2\rho\dot{\rho} = e^t\left(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2\right)$

$= e^t\left(x_1^2 + x_2^2 + 2\cancel{x_1 x_2} - 2\cancel{x_2 x_1} - 2x_2^2\right)$

$= e^t(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$

d'où $\dot{\rho} = 0 \iff x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$ $\quad (\rho > 0)$

N.B : $\rho^2(x_2, x_2) = \rho^2(-x_2, x_2)$.

Final^{t}, 

donc