Th de Cauchy [Pom] p315.

<u>Th</u> : Soit E un Banach, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \to \mathcal{L}_c(E)$ et $B : I \to E$ des fcts cont et $(t_0, Y_0) \in I \times E$.
Alors, il existe une unique sol Y de $Y' = A(t)Y + B(t)$ (E) déf sur I tq $Y(t_0) = Y_0$.

<u>Dém</u> :

<u>Existence</u> :

On considère la suite de fcts déf par :

$Y_0(t) = Y_0$ et $Y_{n+1}(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} [A(u)Y_n(u) + B(u)]\,du$ pour $\forall t \in I$

<u>NB</u> : (Y_n) est bien déf car $u \mapsto A(u)Y_n(u) + B(u)$ est cont donc int sur I pour $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>A voir</u> : Sur tt segment de I contenant t_0
1) (Y_n) CU vers une certaine fct $Y : I \to E$
2) $(AY_n + B)$ CU vers $AY + B$

<u>Ccl</u> : $Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} [A(u)Y(u) + B(u)]\,du$ pour $\forall t \in I$

(si $t \in I$, il existe $[a,b] \subset I$ contenant t_0 et t donc 2) permet d'intervertir lim et $\int$)

mais Y est cont (Y est cont sur tt segment de I contenant t_0) donc dér et $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ pour $\forall t \in I$. De plus, $Y(t_0) = Y_0$.

Soit $[a,b]$ un tel segment.

Il suffit de mq $\sum_{n \geq 1} (Y_n - Y_{n-1})$ CN sur $[a,b]$ car alors elle CU sur $[a,b]$ (E est un Banach) donc (Y_n) aussi.

On note $\alpha = \sup_{[a,b]} \|A\|$ et $\beta = \sup_{[a,b]} \|B\|$.

- $\underline{\|Y_n(t)-Y_{n-1}(t)\| \leqslant (\alpha\|Y_0\|+\beta)\dfrac{\alpha^{n-1}|t-t_0|^n}{n!}}$ $\underline{\text{pour } \forall t\in[a,b] \text{ et } \forall n\geqslant 1}$:

Réc sur $n\geqslant 1$:

$n=1$: $\|Y_1(t)-Y_0\| \leqslant \left|\int_{t_0}^t \|A(u)Y_0+B(u)\|\,du\right|$

$\leqslant (\alpha\|Y_0\|+\beta)|t-t_0|$ pour $\forall t\in[a,b]$.

$n\geqslant 2$: Soit $t\in[a,b]$.

Si $t\geqslant t_0$, $\|Y_n(t)-Y_{n-1}(t)\| \leqslant \int_{t_0}^t \|A(u)(Y_{n-1}(u)-Y_{n-2}(u))\|\,du$

$$\leqslant \int_{t_0}^t \|A(u)\|\,\|Y_{n-1}(u)-Y_{n-2}(u)\|\,du$$

$$\leqslant \alpha\int_{t_0}^t (\alpha\|Y_0\|+\beta)\frac{\alpha^{n-2}(u-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\,du$$

$$=(\alpha\|Y_0\|+\beta)\frac{\alpha^{n-1}(t-t_0)^n}{n!}$$

De m̂, si $t\leqslant t_0$, $\|Y_n(t)-Y_{n-1}(t)\| \leqslant (\alpha\|Y_0\|+\beta)\dfrac{\alpha^{n-1}(t_0-t)^n}{n!}$

Donc $\|Y_n(t)-Y_{n-1}(t)\| \leqslant (\alpha\|Y_0\|+\beta)\alpha^{n-1}\dfrac{|t-t_0|^n}{n!}$.

- Par suite, $\|Y_n(t)-Y_{n-1}(t)\| \leqslant \underbrace{(\alpha\|Y_0\|+\beta)\frac{\alpha^{n-1}(b-a)^n}{n!}}_{\text{t.g d'une série cvgte}}$ pour $\forall t\in[a,b]$ et $\forall n\geqslant 1$

donc $\sum_{n\geqslant 1}(Y_n-Y_{n-1})$ CN sur $[a,b]$.

<u>Unicité</u> :

Soit Z une autre sol de (E) déf sur I tq $Z(t_0)=Y_0$ et $[a,b]$ un segment de I contenant t_0.

Alors, $\|Y(t)-Z(t)\| \leqslant \dfrac{\alpha^n|t-t_0|^n}{n!}\sup_{[a,b]}\|Y-Z\|$ pour $\forall t\in[a,b]$ et $\forall n\geqslant 0$

(on fait une réc en procédant comme ci-dessus) mais

$\dfrac{\alpha^n|t-t_0|^n}{n!}\longrightarrow 0$ pour $\forall t\in[a,b]$ (t.g d'une série cvgte)

donc $Y(t)=Z(t)$ pour $\forall t\in[a,b]$ et donc $Y=Z$ ($[a,b]$ est qcq)