$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ [Gou] p 163 et 127.

A voir : 1) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}u\,du \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leq \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}u\,du$

2) $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Ccl : $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt$ $(e^{-t^2}\geq 0$ pour $\forall t\geq 0)$

$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\Big(\sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}u\,du \sim \sqrt{\frac{n\pi}{(4n+2)}} \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

et $\sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}u\,du \sim \sqrt{\frac{n\pi}{(4n-4)}} \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big)$

---

1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Pour $\forall t\in[0,\sqrt{n}[$, $\log\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\leq -\frac{t^2}{n}$ et $\log\left(1+\frac{t^2}{n}\right)\leq\frac{t^2}{n}$

($\log(x)\leq x-1$ pour $\forall x>0$) donc $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}\leq\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$

(on multiplie resp par n et $-n$ et on prend l'exp) et donc

$\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leq \int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt$

mais $\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}u\,du$ $(t=\sqrt{n}\cos u)$

et $\int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}u\,du$ $(t=\sqrt{n}\,\mathrm{cotan}\,u)$

2) Pour $\forall p\in\mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2}\,\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 1}$:

Pour $\forall n\geq 2$, $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\,\sin x\,dx$

$\underset{IPP}{=} \left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$

$= (n-1)\left[I_{n-2}-I_n\right]$

donc $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

mais $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = 1$.

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\left[\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1}\right]^2 = \pi \quad \text{(formule de Wallis)}$$

On rq que $\frac{1}{p\pi}\left[\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1}\right]^2 \sim \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$ donc il suffit de mq $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \longrightarrow 1$.

Or, pour $\forall p \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin^{2p+2} x \leq \sin^{2p+1} x \leq \sin^{2p} x$

donc $0 \leq I_{2p+2} \leq I_{2p+1} \leq I_{2p}$ et donc $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \leq \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leq 1$

mais $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} = \frac{2p+1}{2p+2} \longrightarrow 1$.

Ccl : $\frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} \sim \frac{1}{\sqrt{p\pi}}$ donc $I_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}$

et $I_{2p+1} \sim I_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p+2}}$.