Dvt asymptotique de H_n et ζ [Gou] p 205 et 278

Lemme : $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1)\right)$ cvge et on note γ sa limite.

Dém :

On considère $f : [1,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$
$t \longmapsto \frac{1}{t}$

On rq que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(t)\,dt$, $n \geq 1$.

A voir : $u_n - u_{n+1} \geq 0$ et $u_n \geq 0$ pour $\forall n \geq 1$

ccl : (u_n) est $\searrow$ et minorée donc cvge.

Vu que f est $\searrow$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$ pour $\forall k \geq 1$

donc $u_n - u_{n+1} = \int_{n+1}^{n+2} f(t) - f(n+1) \geq 0$ et $\int_1^n f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$

ie $u_n \geq 0$ pour $\forall n \geq 1$.

Prop 1 : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Dém :

On rq que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \gamma$

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log(n) + \gamma + o(1)$.

A voir : Si $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) - \gamma$, $U_n \sim \frac{1}{2n}$

On rq que $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} + \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\sim -\frac{1}{2n^2}$

donc $\sum_{n\geq 1} (U_{n+1} - U_n)$ cvge et donc

$-u_n = \sum_{k=n}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Mais $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$ pour tt $k \geq 1$

donc $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

et donc $0 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$ pour tt $n \geq 1$

d'où $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$ et $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

Prop 2 : $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ en 1^+.

Dém :

A voir : 1) $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ en 1^+

2) $\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \xrightarrow[s \to 1^+]{} \gamma$.

---

1) Pour tt $s > 1$, $\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{k^s}$ pour tt $k \geq 1$

donc $\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s)$

et donc $0 \leq \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \leq 1$ d'où $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ en 1^+.

2) On considère $f :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$s \longmapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$

On mq que $\tilde{f} : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $s \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \right)$ prolonge

continu^t f à $[1,+\infty[$. En effet, $\tilde{f}_{|]1,+\infty[} = f$ et $\tilde{f}$ est

cont sur $[1,2]$ (pour tt $s \in [1,2]$, $\frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s}$

donc $0 \leq \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = \int_n^{n+1} \frac{s}{t^{s+1}} dt \leq 2 \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2}$

et donc $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \right)$ cv sur $[1,2]$)

Donc $\lim_{s \to 1^+} f(s) = \lim_{s \to 1^+} \tilde{f}(s)$

$$= \tilde{f}(1)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) \right)$$

$$= \gamma .$$