Injection cont de $\mathbb{S}^1$ ds $\mathbb{S}^1$ [Pom] p42, 349.

Prop : Une injection cont de $\mathbb{S}^1$ ds $\mathbb{S}^1$ est un homéo.

Dém :

Soit $j : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ injective et cont.

Il suffit de mq j est surjective ($\mathbb{S}^1$ est comp)

Par l'abs, on sup que j n'est pas surj.

A voir : $\mathbb{S}^1$ est homéo à une partie de $\mathbb{R}$

Ccl : Si ϕ est un tel homéo, $\phi(\mathbb{S}^1)$ est connexe et comp donc de la forme $[a,b]$ avec $a<b$ mais $[a,b]\setminus\{c\}$ n'est pas connexe avec $c \in]a,b[$ donc $\mathbb{S}^1\setminus\{\phi^{-1}(c)\}$ n'est pas connexe ↯

Comme $\mathbb{S}^1$ est homéo à $j(\mathbb{S}^1)$ ($\mathbb{S}^1$ est comp), il suffit de mq $j(\mathbb{S}^1)$ est homéo à une partie de $\mathbb{R}$.

Mais j n'est pas surj donc il existe $z \in \mathbb{S}^1 \setminus j(\mathbb{S}^1)$ ie $j(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{S}^1\setminus\{z\}$ donc il suffit de mq $\mathbb{S}^1\setminus\{z\}$ est homéo à une partie de $\mathbb{R}$.

Mais $\mathbb{S}^1\setminus\{z\}$ est homéo à $\mathbb{S}^1\setminus\{-1\}$ (considérer la rotation de centre 0 qui envoie z sur -1 ie $u \mapsto ue^{i(\pi-\theta)}$ si $z = e^{i\theta}$) donc il suffit de mq $\mathbb{S}^1\setminus\{-1\}$ est homéo à une partie de $\mathbb{R}$.

Or, $h :]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbb{S}^1\setminus\{-1\}$, $x \longmapsto e^{ix}$ est un homéo.

En effet, h est une bijection cont

$\left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \\ x \mapsto e^{ix} \end{array} \right.$ est un morph de gpes surj de noyau $2\pi\mathbb{Z}$

donc $[-\pi, \pi[\to \mathbb{S}^1$ est une bij cont mais $e^{-i\pi} = -1$)
$x \mapsto e^{ix}$

et $h^{-1}(x+iy) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+1}\right)$ pour $\forall x+iy \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$
(à justifier) donc h^{-1} est cont.

<u>$h^{-1}(x+iy) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+1}\right)$</u> :

Soit $x+iy \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$.
Il suffit de mq $e^{i\theta} = x+iy$ avec $\theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+1}\right)$.
Or, $\tan(\theta/2) = \frac{y}{x+1}$ donc $\cos\theta = \frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)}$

$$= \frac{(x+1)^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$= \frac{2x^2+2x}{2x+2} \quad (x^2+y^2=1)$$

$$= x$$

et de m, $\sin\theta = \frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = y$.