Pb de dénombr^t [Pom] p 230

Prop : Le nbre de partitions d'un ens à n él^{ts} est égal à $\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$ (n.ième nbre de Stirling)

Dém : Soit $n \geq 1$

On rq que $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$ cvge (le quotient de 2 termes consécutifs vaut $\frac{1}{k+1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^n$ donc tend vers 0 d'où la cvgce moyennant le critère de D'Alembert).

On note $p_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$

q_n le nbre de partitions d'un ens à n él^{ts}.

A voir : 1) $q_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k q_k$

2) $p_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k p_k$

Ccl : Vu que $q_1 = p_1$, $q_n = p_n$.

---

1) Soit $E = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ un ens à $n+1$ él^{ts}.

On compte les partitions de E en regardant la partie contenant a_{n+1}. Plus précis^t, si r_k est le nbre de partitions de E où a_{n+1} est ds une partie possédant exact^t $k+1$ él^{ts}, $q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} r_k = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} r_k$.

Mais $r_k = C_n^k q_{n-k}$ pour tt $k \in \{0, \dots, n-1\}$ (on a C_n^k possibilités pour construire la partie contenant a_{n+1} et pour chacune de ces possibilités, on a q_{n-k} partitions de E privé de la partie contenant a_{n+1}) donc

$$q_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \, q_{n-k}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^{n-k} \, q_k$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \, q_k .$$

2) On considère la série génératrice exp de p_n : $\sum_{n \geq 0} \frac{p_n}{n!} x^n$.

On rq que $\exp(e^x - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$ pour tt $x \in \mathbb{R}$. En effet,

si $x \geq 0$, $\exp(e^x - 1) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!}$
$$= \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^m x^m}{n!\, m!}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^m}{n!} \right) x^m \quad \text{(les termes st} \geq 0\text{)}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p_m}{m!} x^m .$$

si $x \leq 0$, on procède de m̂ avec $-x$ d'où la rq.

Mais, $f : x \longmapsto \exp(e^x - 1)$ vérifie $f'(x) = e^x f(x)$

donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{n+1}}{n!} x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{n!} x^n \right)$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{k!(n-k)!} \right) x^n \quad \text{pour tt } x \in \mathbb{R}$$

et donc $\frac{p_{n+1}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{k!(n-k)!}$ (on identifie les coeff)

d'où $p_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \, p_k$.