Formule sommatoire de Poisson [Gou] p 269

Th : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 tq $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ qd $|x| \to +\infty$.

Alors, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$

où $\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n t}\, dt$, $n \in \mathbb{Z}$.

Dém :

Il suffit de mq $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$ pour $\forall x \in \mathbb{R}$

car alors $x=0$ fournit le résultat.

A voir : 1) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ CU sur $\forall$ segment de $\mathbb{R}$.

On note F sa somme.

2) F est 1-périod de classe C^1

3) $c_n(F) = \hat{f}(n)$ pour $\forall n \in \mathbb{Z}$

Ccl : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$ CN sur $\mathbb{R}$ vers F.

---

1) Il suffit de mq $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ CN sur $[-k,k]$ pour $\forall k>0$

Il existe $M>0$ et $A>0$ tq $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$ pour $\forall |x| \geq A$

$\left(f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ qd } |x| \to +\infty\right)$.

Soit $k>0$.

Alors, pour $\forall |x| \leq k$ et $\forall |n| \geq A+k$,

$|x+n| \geq |n|-k \geq A$ donc $|f(x+n)| \leq \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(|n|-k)^2}$.

Par suite, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ CN sur $[-k,k]$.

2) F est 1. périodique :

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Alors, $\sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$ pour tt $N \in \mathbb{N}$
donc $F(x+1) = F(x)$ $(N \to +\infty)$

F est de classe C^1 :

Comme en 1), on mq $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$ cu sur tt segment de $\mathbb{R}$
donc F est de classe C^1 (th de dér)

3) Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Alors, $c_n(F) = \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi nt} dt$

$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+n) e^{-2i\pi nt} dt$ ($\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)$ cu sur $[0,1]$)

$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi nu} du$ $(u = t+n)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi nu} du$

$= \hat{f}(n)$

Appl : $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right)$ pour tt $t > 0$ où $\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2}$.

Dém :
On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ avec $\alpha > 0$.

A voir : $\hat{f}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 n^2/\alpha}$ pour tt $n \in \mathbb{Z}$

Ccl : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi^2 n^2/\alpha}$ (formule sommatoire de P)
donc $\alpha = \pi t$ fournit le résultat.

Pour $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-2i\pi n t} \, dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-2i\pi n u/\sqrt{\alpha}} \, du \quad (u = \sqrt{\alpha}\, t)$$

donc il suffit de mq $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{2i\pi x u} \, du = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 x^2}$

pour $\forall x \in \mathbb{R}$ car alors $x = \frac{-n}{\sqrt{\alpha}}$ fournit le résultat.

Or, $\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-u^2} e^{2i\pi x u} \right) \right| = \left| 2i\pi u e^{-u^2} e^{2i\pi x u} \right| = 2\pi |u| e^{-u^2}$

donc $\varphi'(x) = 2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-u^2} e^{2i\pi x u} \, du$

$$= -i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-u^2})' e^{2i\pi x u} \, du$$

$$\underset{\mathrm{IPP}}{=} -2\pi^2 x \, \varphi(x)$$

et donc $\varphi(x) = C e^{-\pi^2 x^2}$ mais $C = \varphi(0) = \sqrt{\pi}$