# Th de densité [ZQ] p317

**Th** : $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense ds $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $\forall p \in [1,+\infty[$.

Dém :

Soit $p \in [1,+\infty[$.

A voir : 1) $L_c^p(\mathbb{R}^n)$ est dense ds $L^p(\mathbb{R}^n)$

2) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense ds $L_c^p(\mathbb{R}^n)$

Ccl : $C_c^\infty$ est dense ds $L_p(\mathbb{R}^n)$

---

1) Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

On considère la fct plateau $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tq $\begin{cases} \theta = 1 \text{ sur } \overline{B}(0,1) \\ \theta = 0 \text{ sur } B(0,2)^c \\ 0 \leq \theta \leq 1 \end{cases}$

Alors, $f_j(x) = \theta\left(\frac{x}{j}\right) f(x)$ pour $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall j \in \mathbb{N}^*$

définit une suite de $L_c^p(\mathbb{R}^n)$ ($f_j$ est à supp comp car $\theta$ l'est et $f_j \in L^p(\mathbb{R}^n)$ car $|f_j|^p \leq |f|^p$)

qui cvge vers $f$ ds $L^p(\mathbb{R}^n)$. En effet,

$$\|f_j - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\theta\left(\frac{x}{j}\right) - 1\right|^p |f(x)|^p \, dx$$

mais $\left|\theta\left(\frac{x}{j}\right) - 1\right|^p |f(x)|^p \longrightarrow 0$ pour presque $\forall x$

et $\left|\theta\left(\frac{x}{j}\right) - 1\right|^p |f(x)|^p \leq 2^p |f(x)|^p \in L^1$ pour $\forall j$ et $\forall x$

donc $\|f_j - f\|_p^p \longrightarrow 0$ (CDL).

2) Soit $f \in L_c^p(\mathbb{R}^n)$

On considère l'unité approchée de convol déf par

$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ pour $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \varepsilon > 0$

où $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tq $\begin{cases} \rho \geq 0 \\ \operatorname{supp} \rho \subset \overline{B}(0,1) \\ \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1 \end{cases}$.

Il suffit de mq $\rho_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p} f$ car $\rho_\varepsilon * f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

(elle est à supp comp car $\rho_\varepsilon$ et $f$ le st et elle est $C^\infty$ d'après le th de régularisation par convolution)

or, $(\rho_\varepsilon * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)\,[f(x-y) - f(x)]\,dy$ $\left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)\,dy = 1\right)$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \rho\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) [f(x-y) - f(x)]\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\,[f(x-\varepsilon z) - f(x)]\,dz \quad \left(z = \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

donc $|(\rho_\varepsilon * f)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)^{1/q}\,\rho(z)^{1/p}\,|f(x-\varepsilon z) - f(x)|\,dz$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\,dz\right)^{1/q}}_{=1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\,|f(x-\varepsilon z) - f(x)|^p\,dz\right)^{1/p}$$

et donc $\|\rho_\varepsilon * f - f\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\,|f(x-\varepsilon z) - f(x)|^p\,dz\right) dx$

$$\underset{\text{Fubini}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\,\|f(\cdot - \varepsilon z) - f\|_p^p\,dz$$

mais $\rho(z)\,\|f(\cdot - \varepsilon z) - f\|_p^p \leq \rho(z)\left(\|f(\cdot - \varepsilon z)\|_p + \|f\|_p\right)^p$

$$\leq 2^p\,\|f\|_p^p\,\rho(z) \in L^1 \text{ pour tt } \varepsilon \text{ et tt } z$$

donc il suffit de mq $\|f(\cdot - \varepsilon z) - f\|_p \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ pour tt $z \in \overline{B}(0,1)$

car alors $\rho(z)\,\|f(\cdot - \varepsilon z) - f\|_p^p \longrightarrow 0$ pour tt $z$

donc $\|\rho_\varepsilon * f - f\|_p^p \longrightarrow 0$ (CDL).

Soit donc $z \in \overline{B}(0,1)$ et $\alpha > 0$.
Il existe alors $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tq $\|f - g\|_p \leq \frac{\alpha}{3}$
$\left( C_c(\mathbb{R}^n) \text{ est dense ds } L^p(\mathbb{R}^n) \right)$ donc

$$\|f(\cdot - \varepsilon z) - f\|_p \leq \|f(\cdot - \varepsilon z) - g(\cdot - \varepsilon z)\|_p + \|g(\cdot - \varepsilon z) - g\|_p + \|g - f\|_p$$
$$\leq \frac{2\alpha}{3} + \|g(\cdot - \varepsilon z) - g\|_p \quad \text{pour } \forall \varepsilon > 0$$

mais $|g(x - \varepsilon z) - g(x)|^p \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ pour $\forall x$ ($g$ cont)

et $|g(x - \varepsilon z) - g(x)|^p \leq \left(2 \sup_{\mathbb{R}} |g|\right)^p \mathbb{1}_{\overline{B}(0,R+1)}(x) \in L^1$

pour $\forall x$ et $\forall\, 0 < \varepsilon \leq 1$ si $\operatorname{Supp} g \subset \overline{B}(0,R)$

donc $\|g(\cdot - \varepsilon z) - g\|_p \longrightarrow 0$ (CDL)

et donc $\exists\, \varepsilon_0 > 0, \forall\, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \|g(\cdot - \varepsilon z) - g\|_p \leq \frac{\alpha}{3}$

d'où le résultat.