$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$ [ZQ] p 309.

On considère la fct déf par $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$ pour $\forall t \geq 0$

A voir : 1) F est bien déf

2) F cont sur $[0,\infty[$

3) $F(t) = -\arctan t + \frac{\pi}{2}$ pour $\forall t > 0$.

Ccl : $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = F(0) = \lim_{t\to 0^+} F(t) = \frac{\pi}{2}$

---

1) Si $t=0$,

- $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ cvge ($x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge par cont en 0)
- $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ cvge (règle d'Abel ou IPP)

Si $t>0$,

- $\int_0^1 e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$ cvge ($x \mapsto e^{-tx}\frac{\sin x}{x}$ se prolonge par cont en 0)
- $\int_1^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$ cvge ($\left|e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right| \leq e^{-tx}$)

2) On écrit $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ avec $F_1(t) = \int_0^1 e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$

et $F_2(t) = \int_1^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$

On veut mq F_1 et F_2 st cont sur $[0,\infty[$.

Pour F_1 : $\left|e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$ pour $\forall t \geq 0$ et $\forall x \in]0,1]$

d'où la cont (th de cont ss $\int$)

Pour F_2 : On rq que $F_2(t) \underset{IPP}{=} \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\cos x\right]_1^\infty + \int_1^\infty \cos x \left(\frac{e^{-tx}}{x}\right)' dx$

$= e^{-t}\cos 1 - \int_1^\infty \cos x\left(\frac{te^{-tx}}{x} + \frac{e^{-tx}}{x^2}\right)dx$

pour $\forall t \geq 0$.

Il suffit alors de mq $t \mapsto \int_1^\infty \cos x \left(\frac{te^{-tx}}{x} + \frac{e^{-tx}}{x^2}\right) dx$ est cont sur $[0,\infty[$.

Or, $\left|\cos x \left(\frac{te^{-tx}}{x} + \frac{e^{-tx}}{x^2}\right)\right| \leq \left|\frac{txe^{-tx} + e^{-tx}}{x^2}\right|$

$\leq \frac{2}{x^2}$ pour $\forall t \geq 0$ et $\forall x \geq 1$

$(ye^{-y} \leq 1$ pour $\forall y \in \mathbb{R})$

d'où la cont (th de cont ss $\int$)

3) F est C^1 sur $]0,\infty[$ et $F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ pour $\forall t > 0$:

Pour $\forall \varepsilon > 0$, $\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\right)\right| = \left|-e^{-tx} \sin x\right|$

$\leq e^{-\varepsilon x}$ pour $\forall t \geq \varepsilon$ et $\forall x > 0$

donc F est C^1 sur $]0,\infty[$ et $F'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx} \sin x \, dx$ pour $\forall t > 0$ (th de dér ss $\int$).

Mais $\int_0^\infty e^{-tx} \sin x \, dx = \mathrm{Im} \int_0^\infty e^{(i-t)x} dx$

$= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{t-i}\right)$

$= \frac{1}{1+t^2}$ pour $\forall t > 0$.

$F(t) = -\arctan t + \frac{\pi}{2}$ pour $\forall t > 0$:

$F(t) = -\arctan t + c$ pour $\forall t > 0$ d'après ce qui précède

mais $\left|e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\right| \leq e^{-x}$ pour $\forall t \geq 1$ et $\forall x > 0$

donc $F(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ (CDL) et donc $c = \lim_{t\to\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$.