Etude de $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^a}\,dt$ [Gom] p151.

Prop : 1) Pour $a \leq 0$, $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^a}\,dt$ div

2) Pour $a > 1$, $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^a}\,dt$ cvge abs

3) Pour $0 < a \leq 1$, $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^a}\,dt$ est semi. cvgte.

Dém :

1) Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^a}\,dt \right| = \begin{cases} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^a}\,dt & \text{si } n \text{ est pair} \\ \int_{(n+1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t^a}\,dt & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\geq \int_0^\pi \sin t\,dt$$

$$= 2$$

donc le critère de Cauchy est nié.

2) $\left|\frac{\sin t}{t^a}\right| \leq \frac{1}{t^a}$ pour $\forall t \geq 1$ et $\int_1^\infty \frac{dt}{t^a} < +\infty$

3) $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^a}\,dt$ cvge :

1ère méthode :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t^a}\,dt \underset{IPP}{=} \left[-\frac{\cos t}{t^a}\right]_1^x - a\int_1^x \frac{\cos t}{t^{a+1}}\,dt \quad \text{pour } \forall x \geq 1$$

et $\lim\limits_{x\to\infty} \left[-\frac{\cos t}{t^a}\right]_1^x = \cos 1$ donc $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^a}\,dt$ et $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{a+1}}\,dt$ st de m̂ nature mais $\left|\frac{\cos t}{t^{a+1}}\right| \leq \frac{1}{t^{a+1}}$ pour $\forall t \geq 1$

et $\int_1^\infty \frac{dt}{t^{a+1}} < +\infty$ donc $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{a+1}}\,dt$ cvge (abs)

2ème méthode :

- $\left|\int_1^x \sin t\,dt\right| = \left|\int_1^x \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\,dt\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|\left[e^{it}+e^{-it}\right]_1^x\right|$$

$$\leq 4 \quad \text{pour } \forall x \geq 1$$

- $\begin{array}{rcl}[1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{t^a}\end{array}$ est $\searrow 0$

Donc $\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^a}\,dt$ cvge (règle d'Abel)

$\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t^a}\right| dt$ div :

Il suffit de mq $\sum_{n\geq 1} \left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t^a}\right| dt\right)$ div.

Or, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t^a}\right| dt = \begin{cases} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^a}\,dt & \text{si } n \text{ est pair} \\ \int_{(n+1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t^a}\,dt & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

$$\geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin t\,dt$$

$$= \frac{2}{(n+1)\pi}$$

et $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{(n+1)\pi}$ div.