CNS d'ext local [Gou] p310

Th : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ un pt critique de f et Q la fq déf par
$$Q(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \quad \text{pour } \forall h \in \mathbb{R}^n.$$
(i) Si f admet un min local en a, Q est positive
(ii) Si Q est déf positive, f admet un min local en a.

Dém :

(i) :

Au vois de 0 pour h,
$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} Q(h) + o(\|h\|^2) \quad (\text{Taylor. Young})$$
donc $Q(h) + o(\|h\|^2) \geq 0$ $\quad (f(a+h) \geq f(a))$.
On fixe $h \in \mathbb{R}^n$.
Alors, au vois de 0 pour t,
$$Q(th) + o(t^2) \geq 0 \quad \text{ie} \quad t^2 [Q(h) + o(1)] \geq 0$$
donc $Q(h) + o(1) \geq 0$ et donc $Q(h) \geq 0$ $\quad (t \to 0)$

(ii) :

Au vois de 0 pour $h \in \mathbb{R}^n$
$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \frac{1}{2} [Q(h) + o(\|h\|^2)] \\ &= \frac{\|h\|^2}{2} \left[Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + o(1) \right] \\ &\geq \frac{\|h\|^2}{2} [\alpha + o(1)] \quad \text{où } \alpha = \inf_{S^{n-1}} Q. \end{aligned}$$
Mais Q atteint sa borne inf sur S^{n-1} (fct cont sur un comp) donc $\alpha > 0$ (Q est déf pos) et donc, au vois de 0 pour h, $\alpha + o(1) > 0$ d'où $f(a+h) - f(a) \geq 0$.

Cor : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a \in U$ un pt critique de f et $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$

Si $rt - s^2 < 0$, f n'admet pas d'ext local en a

Si $rt - s^2 > 0$, f admet un ext local en a et c'est un min si $r > 0$.

Dém :

Q a pour mat $M = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ ds la bc de $\mathbb{R}^2$.

$\exists P \in O_2(\mathbb{R})$, $P^{-1} M P = {}^tP M P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ st les vp de M (M est sym).

Si $rt - s^2 < 0$, $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 \lambda_2 = rt - s^2 = \det M$) donc Q est, ni positive, ni négative et donc f n'admet pas d'ext local en a.

Si $rt - s^2 > 0$, $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ donc Q est, soit déf pos, soit déf nég et donc f admet un ext local en a.

De plus, si $r > 0$, $r + t > 0$ ($rt > s^2 \geq 0$) donc $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ ($\lambda_1 + \lambda_2 = r + t = \operatorname{Tr} M$) et donc $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ($\lambda_1 \lambda_2 > 0$) d'où le résultat.