Th d'Ascoli [Nou] p22

[Nou] p22

Th : Soit (K, d) un em comp, $(E, \|.\|)$ un evn de dim $< \infty$ et $M, k > 0$.
Alors, $\mathcal{H} = \{$ fcts de K ds E bornées par M et k.lipsch $\}$
est une partie comp de $C(K, E)$ muni de $\|.\|_\infty$.

Dém :

Soit $(f_n) \subset \mathcal{H}$.
On cherche une ss. suite de (f_n) qui CU sur K ds $\mathcal{H}$.

A voir : 1) Il existe $D = \{a_0, \dots, a_n, \dots\}$ une partie dénomb et dense ds K

2) Il existe une ss. suite de (f_n) qui CS sur D

3) Cette ss. suite CS sur K ds $\mathcal{H}$.

4) La cvgce est unif sur K.

---

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \{x_i^n\}_{i \in \{0, \dots, i_n\}} \subset K$, $K = \bigcup_{i=0}^{i_n} B(x_i^n, \frac{1}{2^n})$
(K est précomp) donc $D = \{x_i^n\}_{n \in \mathbb{N}, i \in \{0, \dots, i_n\}}$ convient
(elle est dénomb et si $x \in K$ et $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tq
$\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ et $i \in \{0, \dots, i_n\}$ tq $x \in B(x_i^n, \frac{1}{2^n})$ donc $d(x, x_i^n) < \varepsilon$)

2) $(f_n(a_0))$ est bornée donc il existe une ss suite (f_n^0) de (f_n)
tq $(f_n^0(a_0))$ cvge (dim $E < \infty$)
De m̂, $(f_n^0(a_1))$ est bornée donc il existe une ss. suite
(f_n^1) de (f_n^0) tq $(f_n^1(a_1))$ cvge.
En procédant par réc, on construit ainsi, pour tt $p \in \mathbb{N}$,
une ss. suite (f_n^p) tq $(f_n^p(a_p))$ cvge.
On rq alors que la suite diagonale (f_n^n) convient

(pour $\forall p \in \mathbb{N}$, $(f_n^n)_{n \geq p}$ est une ss. suite de (f_n^p)).

On note encore (f_n) cette ss. suite pour ne pas alourdir la preuve.

3) Soit $x \in K$.

Il suffit de mq $(f_n(x))$ est de Cauchy ($\dim E < \infty$ donc E complet)

Soit donc $\varepsilon > 0$.

Alors, $\exists p \in \mathbb{N}$, $d(x, a_p) \leq \varepsilon$

$\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall m,n \geq N$, $\| f_n(a_p) - f_m(a_p) \| \leq \varepsilon$

donc
$$\begin{aligned}\| f_n(x) - f_m(x) \| &\leq \| f_n(x) - f_n(a_p) \| + \| f_n(a_p) - f_m(a_p) \| \\ &\quad + \| f_m(a_p) - f_m(x) \| \\ &\leq 2k\, d(x, a_p) + \| f_n(a_p) - f_m(a_p) \| \\ &\leq (2k+1)\varepsilon \quad \text{pour } \forall m,n \geq N.\end{aligned}$$

On note f la lim simple de (f_n) sur K.

Alors, $f \in \mathcal{H}$.

4) Par l'abs, on supp qu'il existe $\varepsilon > 0$, $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict^t $\uparrow$ et $(x_n) \in K$ tq $\| f_{\phi(n)}(x_n) - f(x_n) \| \geq \varepsilon$ pour $\forall n$.

On va mq 0 est val d'adh de $(f_{\phi(n)}(x_n) - f(x_n))$ $\lightning$

$\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict^t $\uparrow$, $x_{\varphi(n)} \to x \in K$ (th de B.W)

mais
$$\begin{aligned}\| f_{\phi\circ\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)}) \| &\leq \| f_{\phi\circ\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f_{\phi\circ\varphi(n)}(x) \| \\ &\quad + \| f_{\phi\circ\varphi(n)}(x) - f(x) \| \\ &\quad + \| f(x) - f(x_{\varphi(n)}) \| \\ &\leq \underbrace{2k\, d(x, x_{\varphi(n)}) + \| f_{\phi\circ\varphi(n)}(x) - f(x) \|}_{\longrightarrow 0}\end{aligned}$$