202

Exples de parties denses et appl

I) Ds $\mathbb{R}$

1) Les rationnels

- $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ st denses ds $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est cont nulle part

$\Rightarrow$ le seul end de caps de $\mathbb{R}$ est l'id

$\Rightarrow$ Les end cont de $(\mathbb{R},+)$ st les hom

- Rep p-adique

$\Rightarrow$ Soit I un int et $f : I \to \mathbb{R}$ cont.

Si $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)$ pour $\forall x,y \in I$, f est conv

$\Rightarrow$ Th de Cantor

2) Les ssgpes de $(\mathbb{R},+)$

- Si G est un ssgpe de $(\mathbb{R},+)$, soit $\overline{G} = \mathbb{R}$, soit il existe un unique $a \geq 0$ tq $G = a\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ Périodes d'une fct

$\Rightarrow$ Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\{e^{2in\pi\theta}, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense ds $\mathbb{S}^1$.

II) Ds $\mathcal{M}_n(k)$ $(k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

1) Les mat inversibles

- $GL_n(k)$ est dense ds $\mathcal{M}_n(k)$

$\Rightarrow$ Si $A, B \in \mathcal{M}_n(k)$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

$\Rightarrow$ $Z(GL_n(k)) = Z(\mathcal{M}_n(k))$

$\Rightarrow$ $\mathcal{M}_n(k)$ admet une base formée de mat inv.

2) Les mat diagonalisables

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$\Rightarrow$ Th de Cayley-Hamilton

$\Rightarrow$ Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(e^M) = e^{\mathrm{Tr}(M)}$.

III) Ds les esp de fcts

1) Autour du prolongt des appl unift cont.

- les fcts en escalier st denses ds l'esp des fcts réglées pour $\|\cdot\|_\infty$.

$\Rightarrow$ Déf de l'int de Riemann des fcts réglées.

- $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense ds $L^2(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \mapsto \hat{f}$ se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$

2) Approx unif

- Th de Weierstrass

$\Rightarrow$ Th des moments

- Th de Weierstrass trigo

$\Rightarrow$ Critère de Weyl

$\Rightarrow$ Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\{\{n\alpha\}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense ds $[0,1[$

- Th de Stone-Weierstrass

$\Rightarrow$ Un opérateur à noyau est comp

$\rightarrow$ Soit X loc.comp et A une ss.alg de $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$. Si A sépare les pts de X et si pour $\forall x \in X$, il existe $f \in A$ tq $f(x) \neq 0$, A est dense ds $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Th de Lévy.

3) Ds $L^p(\mathbb{R})$

- $C_c(\mathbb{R})$ est dense ds $L^p(\mathbb{R})$ $\quad (p \in [1,+\infty[)$

$\Rightarrow$ Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ($p,q \in [1,+\infty]$), $f*g$ est unif cont.
En outre, si $p \in]1,+\infty[$, $\lim_{|x|\to\infty} f*g(x) = 0$.

IV) Ds les esp complets

1) Th de Baire

$\Rightarrow$ les fcts cont partt et dér nulle part st denses
$\Rightarrow$ Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.
Si $\forall z \in \mathbb{C}, \exists n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z)=0$ alors f est polyn.
$\Rightarrow$ Th de B.S

2) Ds un Hilbert : L^2

- Vect $\{e_n, n\in\mathbb{Z}\}$ est dense ds $L^2([0,2\pi])$

$\Rightarrow$ Si $f \in L^2([0,2\pi])$, $S_n(f) \xrightarrow{L^2} f$ et
$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$.

- $\{\hat{f}, f \in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})\}$ est dense ds $L^2(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est un isomorph de Hilbert.