203

# Utilisation de la notion de compacité

## I) Utilisation des propriétés de BL et BW

### 1) BL

- 1er th de Dini
- Une fct réglée de $[a,b]$ ds un evn est lim unif de fcts en escalier
- Soit $K$ un comp et $I$ un idéal de $C(K,\mathbb{R})$.
  Alors, il existe $x \in K$ tq $f(x)=0$ pour $\forall f \in I$
  $\Rightarrow$ Soit $K$ un comp et $\phi$ un morph d'alg de $C(K,\mathbb{R})$ ds $\mathbb{R}$.
  Alors, il existe $x \in K$ tq $\phi : f \mapsto f(x)$ (eval en $x$)

### 2) BW

- Ds un comp, une suite cvge ssi elle a une unique val d'adh
  $\Rightarrow$ Décomp polaire
- Soit $K$ un comp conv non vide d'un evn.
  Si $f : K \to K$ est 1-lipsch, elle admet un pt fixe

## II) Utilisation de la continuité sur un comp

### 1) L'image est comp

- Critère d'homéo
  $\Rightarrow$ $\nexists$ bij cont de $[0,1]$ ds $[0,1]^2$ — $\exists$ surj cont
  $\Rightarrow$ Une inj cont de $S^1$ ds $S^1$ est un homéo
  $\Rightarrow$ Soit $G$ un gpe top opérant cont sur un esp top sép $X$.
  Si $G$ est comp, $G/Stab(x) \to Orb(x)$ est un homéo
  $$\bar{g} \mapsto g \cdot x$$

- Soit $(K,d)$ un comp et $f : K \to K$ cont.
Si $d(f(x), f(y)) \geq d(x,y)$ pour $\forall x, y \in K$, $f$ est une isométrie bij.

2) <u>les bornes st atteintes</u>

- Th de Rolle
- Th du pt fixe de Picard perturbé
- En dim $< \infty$, les normes st équiv
$\Rightarrow$ En dim $< \infty$, les comp st les fermés bornés
- la dist entre 2 comp est atteinte.
la dist entre un comp et un fermé disj est $> 0$
- Soit $E$ un evn de dim $< \infty$, $F$ un fermé non borné de $E$ et $f : F \to \mathbb{R}$ cont.
Si $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$, $f$ est minorée et atteint son min.
$\Rightarrow$ En dim $< \infty$, la dist entre un comp et un fermé est atteinte

3) <u>la continuité est unif</u> (th de Heine)

- Th élém de cont ss $\int$
- Th élém de dér ss $\int$
- Une fct cont de $[a,b]$ ds $\mathbb{R}$ est lim unif de fcts aff par morc
- Th de Weierstrass
- Une fct cont et $2\pi$-périod de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{C}$ est lim unif de polyn trigo
- 2ème de Dini.