204

Connexité : exples et appl

I) Connexité

1) Déf

- Soit (E,d) un em. les asse :
  (i) $\nexists$ partition de E en 2 ouverts disj $\neq \emptyset$
  (ii) $\nexists$ partition de E en 2 fermés disj $\neq \emptyset$
  (iii) Les seules parties ouvertes et fermées de E st $\emptyset$ et E

Déf : em connexe
partie connexe

2) Caract et const

- L'image d'un connexe par une appl cont est connexe
- E est connexe ssi $\forall$ fct cont de E ds $\{0,1\}$ est cste
- Si A est connexe et $A \subset B \subset \bar{A}$, B est connexe
- Si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille de connexes tq $\exists i_0 \in I, \forall i \in I, C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.
- Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de connexes tq $\forall n \in \mathbb{N}^*, C_{n-1} \cap C_n \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ est connexe
- $E_1 \times \dots \times E_n$ est connexe ssi E_i est connexe pour $\forall i$.

3) Exples

- Les connexes de $\mathbb{R}$ st les intervalles
- Un comp bien enchaîné est connexe
- Soit $(u_n) \subset (E,d)$.
  Si $d(u_n, u_{n+1}) \to 0$, l'ens des val d'adh de (u_n) est connexe.

4) Comp connexes

- Sur E, la rel déf par $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists$ connexe contenant x et y est une rel d'équiv. Ses classes appelées comp connexes de E forment donc une partition de E.

Exples : $O_n(\mathbb{R})$ a 2 comp connexes homéo : $O_n^+(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$.

5) Connexité par arcs

Déf : connexe par arcs

Exples : 1) $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

2) $GL_n(\mathbb{R})$ a 2 comp connexes (par arcs) homéo : $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$

- Un connexe par arcs est connexe.
- Ds un $\mathbb{R}$.evn, un ouvert connexe est connexe par arcs (par lignes brisées)

II) Appl

1) En topologie

- $\mathbb{R} \not\approx \mathbb{R}^2$
- S^1 n'est homéo à aucune partie de $\mathbb{R}$
- $\nexists$ bij cont de $[0,1]$ ds $[0,1]^2$

2) En analyse réelle

- TVI
- Th de Darboux
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ cont.

Alors, f est inj ssi elle est strict^t monot.

3) En analyse différentielle

- Soit E, F 2 $\mathbb{R}$-evn, U un ouvert connexe de E et $f : U \to F$ diff.
  Si $df_x = 0$ pour $\forall x \in U$, f est cste
- Critère de C^1. difféo.

4) En analyse complexe

- Soit γ un chemin fermé et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
  Alors, $z \in \Omega \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est à val ds $\mathbb{Z}$, cste sur chaque comp connexe de Ω et nulle sur la comp non bornée
- Principe des zéros isolés
- $\nexists$ fct cont $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ tq $g(z)^2 = z$ pour $\forall z \in \mathbb{C}^*$.

5) En algèbre

- Un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une mat inv.