205

Espaces complets. Exples et appl

I) Esp complets

1) Déf

Déf : suite de Cauchy
em complet
Banach

2) Propriétés

- Un complet est fermé
- Un fermé ds un complet est complet
- $(E_1, d_1) \times \dots \times (E_n, d_n)$ est complet pour la dist prod ssi (E_i, d_i) est complet pour $\forall i$
- Soit (E, d) un complet et (F_n) une suite $\searrow$ de fermés non vides de E.
  Si $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, il existe $x \in E$ tq $\bigcap F_n = \{x\}$
- Un complet précomp est comp

3) Exples

- Un evn de dim $< \infty$ est complet
- $(\mathcal{L}_c(E,F), \|\cdot\|)$ est un Banach dès que F l'est.
- $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un Banach pour $\forall\ 1 \leq p \leq +\infty$
- $(\mathcal{B}(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach

$\Rightarrow$ Const le complété d'un em.

II) Autour de la complétude

1) Prolong^t

- Soit $f :]a,b[\to$ complet dér.
  Si f' est bornée, f se prolonge par cont à $[a,b]$
- Th de prolong^t des appl unif^t cont
  $\Rightarrow$ Const l'int de Riemann des fcts réglées
  $\Rightarrow$ Unicité du complété d'un em.
- Critère de prolong^t d'une sol de $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$

2) Projection

- Th de proj sur un conv complet non vide d'un esp préhilb
  $\to$ Ds un Hilbert, un sev fermé non vide admet un suppl orthog
  $\Rightarrow$ Th de rep de Riesz
  $\Rightarrow$ Ds un Hilbert, un sev est dense ssi son orthog est nul

3) Pt fixe

- Th de pt fixe de Picard
  $\Rightarrow$ Th de Cauchy-Lipsch
  $\Rightarrow$ Th d'inv locale

4) Densité

- Th de Baire
  $\Rightarrow$ Les fcts cont partt et dér nulle part st denses ds $C([0,1], \mathbb{C})$ pour $\|\cdot\|_\infty$
  $\Rightarrow$ Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holo.
  Si pour $\forall z \in \mathbb{C}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $f^{(n)}(z) = 0$, f est polynomiale.