207

Prolong^t de fcts. Appl

I) Prolong^t cont

1) Principe du prolong^t des id

2) Prolong^t par cont

- Une fct cont $f :]a,b[\to$ em se prolonge par cont à $[a,b]$ dès que $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$ existent.

$\Rightarrow$ Une fct dér $f :]a,b[\to$ complet se prolonge par cont à $[a,b]$ dès que f' est bornée.

- Si A est dense ds E (em), une fct cont $f : A \to$ em se prolonge par cont à E dès que $\lim_{x \to y, x \in A} f(x)$ existe pour $\forall y \in E \setminus A$.

$\Rightarrow$ Th de prolong^t des appl unif^t cont

$\Rightarrow$ Déf de l'int de Riemann des fcts réglées.

$\Rightarrow$ Déf de la transf de Fourier des fcts de $L^2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Unicité du complété d'un em à iso bij près.

3) Th de prolong^t des fl cont

$\Rightarrow$ Un sev est dense ssi son orthog est nul

$\Rightarrow$ $\forall x \in E$, $\exists f \in E'$ tq $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$.

Ep, $\|x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|$.

4) Th de Tietze-Urysohn

II) Prolong^t C^1 et C^∞

1) Un résultat négatif de prolong^t C^1.

- $Id_{S^{n-1}}$ ne se prolonge pas de façon C^1 à $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ Th de Brouwer

2) Un résultat positif de prolong^t C^1

- Soit $f : I \setminus \{a\} \to$ evn une fct C^1 qui se prolonge par cont^t en a.

Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ existe, le prolong^t est C^1.

$\Rightarrow$ une fct dérivée ne possède pas de discont de 1ère espèce

$\Rightarrow$ Critère de prolong^t d'une sol de $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$

$\Rightarrow$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto e^{-1/x^2}$ se prolonge de façon C^1 et m̂ C^∞ à $\mathbb{R}$.

3) Un résultat positif de prolong^t C^∞

- Soit $f : I \to$ Banach une fct C^∞.

Si $f(a) = 0$, $x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x)}{x-a}$ se prolonge de façon C^∞ à I.

III) Prolong^t holo

1) Un résultat négatif

- $\nexists$ fct cont $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ tq $g(z)^2 = z$ pour tt $z \in \mathbb{C}^*$.

$\Rightarrow$ Ln et $\sqrt{\ }$ ne se prolongent pas de façon holo à $\mathbb{C}^*$

2) Un résultat positif

- Une fct holo sur $\Omega \setminus \{a\}$ se prolonge de façon holo à Ω dès qu'elle est bornée sur $\dot{D}(a,r)$

$\Rightarrow$ Une sing isolée est, soit artificielle, soit un pôle, soit essentielle.

3) Principe du prolong^t analytique

$\Rightarrow$ $\exists$ pt sing sur le cercle d'incertitude.

$\Rightarrow$ Th du max

4) Un exple

- Γ se prolonge de façon holo à $\{\Re z > 0\}$ et $\hat{m}$ à $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$.