208

Utilisation de la cont unif en analyse.

I) Déf et exples.

Déf : fct unif^t cont

Exples : 1) $x \mapsto \sin x^2$ n'est pas unif^t cont sur $\mathbb{R}$

2) une cl de fcts unif^t cont est unif^t cont.

Déf : fct lipsch

Exples : 1) Une appl lin cont est lipsch

2) une fct dér de I ds $\mathbb{R}$ est lipsch dès que sa dérivée est bornée.

3) la fct distance à une partie $\neq \emptyset$ est 1-lipsch.

- Une fct lipsch est unif^t cont
- Th de Heine

$\Rightarrow$ Une fct cont périod de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{C}$ est unif^t cont

$\Rightarrow$ Une fct cont de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}$ admettant des lim $< \infty$ en $\pm\infty$ est unif^t cont.

II) En intégration.

- Th élém de cont ss $\int$
- Th élém de dér ss $\int$

$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$

$\Rightarrow$ Lemme d'Hadamard

- Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ loc. int tq $\int_0^\infty f(t)dt$ cvge. Si f est unif^t cont, $f \underset{\infty}{\to} 0$

III) Ds les pbs d'approximation.

- Th de Weierstrass

$\Rightarrow$ Th des moments

- Les fcts aff par morc st denses ds $C([a,b],\mathbb{C})$

$\Rightarrow$ Th de Weierstrass trigo

- Th de Féjer

$\Rightarrow$ Si $f \in C_{2\pi}$ est C^1 par morc, $S_n(f) \xrightarrow{cv} f$.

- Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ et (ρ_ε) une unité approchée de convolution.

  Alors, $\rho_\varepsilon * f$ cvge unift vers f sur $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense ds $C^k(\mathbb{R}^n)$.

IV) Ds les pbs de prolong^t

- Th de prolong^t des fcts unif^t cont

$\Rightarrow$ Déf de l'int de Riemann des fcts réglées

$\Rightarrow$ Déf^o de la transf de Fourier des fcts de $L^2(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ Unicité du complété d'un em à iso bij près.