210

# Appl lin cont entre evn. Exples et appl

## I) Critère de continuité

- Soit $u \in L(E,F)$. Alors, les asse :
(i) $u$ est lipsch
(ii) $u$ est unif cont
(iii) $u$ est cont
(iv) $u$ est cont en 0
(v) $u$ est bornée sur $\overline{B}(0,1)$
(vi) $u$ est bornée sur $S(0,1)$
(vii) $\exists k \geq 0, \forall x \in E, \|u(x)\| \leq k\|x\|$
- Une fl est cont ssi son noyau est fermé
- Une appl lin de rg$<\infty$ est cont ssi son noyau est fermé
- Une appl lin sur un evn de dim$<\infty$ est cont

## II) Esp des appl lin cont

### 1) $L_c(E,F)$

- $\|u\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$

définit une norme sur $L_c(E,F)$.
De plus, $(L_c(E,F), \|.\|)$ est un Banach dès que $(F, \|.\|_F)$ l'est
- Si $u \in L_c(E,F)$ et $v \in L_c(F,G)$, $v\circ u \in L_c(E,G)$ et $\|v\circ u\| \leq \|v\|\,\|u\|$

### 2) $L_c(E)$ (E Banach)

- $(\mathcal{L}_c(E), \|\cdot\|)$ est une alg de Banach
- Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$ et $\sum a_n z^n$ de rayon de cvg ce $R>0$.
Si $\|u\| < R$, $\sum a_n u^n$ cvge ds $\mathcal{L}_c(E)$.
⇒ Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$.
Si $\|u\| < 1$, $Id - u \in GL_c(E)$ et $(Id-u)^{-1} = \sum u^n$.
⇒ Déf l'exp d'un end cont de $E$.
- Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$ et $\sum a_n z^n$ de rayon de cvg ce $R>0$.
Si $\inf_n \|u^n\|^{1/n} < R$, $\sum a_n u^n$ cvge ds $\mathcal{L}_c(E)$.

3) $\mathcal{L}_c(H, \mathbb{K})$ (H Hilbert)

- Th de rep de Riesz
⇒ Compacité faible de $\overline{B}_H(0,1)$
⇒ Déf l'adjoint d'un end cont de H.

# III) Autour des appl lin cont

## 1) Prolong$^t$

- Th de prolong$^t$ des appl lin cont
⇒ Const l'int de Riemann des fcts réglées
- Th de prolong$^t$ des fl cont
⇒ Ds un evn, un sev est dense ssi son orthog est nul

## 2) Th de l'appl ouverte

→ Soit $E, F$ 2 Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$.
Si $u$ est bij, $u^{-1} \in \mathcal{L}_c(F,E)$
⇒ Ds un Banach, 2 normes comparables st équiv
⇒ Th du graphe fermé

3) Th de B.S

$\Rightarrow$ Soit $E$ un Banach, $F$ un evn et $(u_n) \subset \mathcal{L}_c(E,F)$.
Si $u_n \xrightarrow{CS} u$, $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$

$\Rightarrow \exists$ fct cont. $2\pi$ périod dt la série de Fourier div en 0.