211

Utilisation de la dim $<\infty$ en analyse.

I) En dim $<\infty$, ttes les normes st équiv

1) Faux en dim ∞

Exple : Sur $C([0,1],\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne st pas équiv

2) Utilisation

- Soit (f_n) une suite de fcts polyn sur $[a,b]$ de deg $\leq n$. Si (f_n) CS, elle CU.
- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\rho(A) = \inf_{n \geq 1} \|A^n\|^{1/n}$.

II) En dim $<\infty$, les comp st les fermés bornés

1) Faux en dim ∞

Exple : Sur ℓ^∞, $\{(\delta_{jk})_{j\in\mathbb{N}}, k \in \mathbb{N}\}$ est fermé borné mais non comp.

- Th de Riesz

$\Rightarrow$ Soit V un sev fermé de $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$. Si $V \subset C^1([a,b])$, $\dim V < \infty$.

2) Utilisation

- Décomp polaire

$\Rightarrow$ $GL_n(\mathbb{R})$ a 2 comp connexes

- Const d'une suite exhaustive de comp d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ Th de Montel.

- Soit E un evn de dim $< \infty$ et $f : E \to \mathbb{R}$ cont.
Si $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$, f est min et atteint son min.
$\Rightarrow$ En dim $< \infty$, la dist entre un comp et un fermé est atteinte
$\Rightarrow$ $\exists$ polyn de meilleure approx unif
$\Rightarrow$ Th de D'Alembert Gauss

III) Un evn de dim $< \infty$ est complet

1) Faux en dim ∞

Exple : un evn à base dénomb n'est pas complet

2) Utilisation

- Déf de l'exp matricielle
- Ds un esp préhilb, un sev de dim $< \infty$ admet un suppl orthog
$\Rightarrow$ $\exists$ polyn de meilleure approx quad
$\Rightarrow$ Soit E un esp préhilb et V un sev muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$.
Si $x \in E$, $d(x, V) = \dfrac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$

IV) Continuité automatique d'une appl lin sur un evn de dim $< \infty$

1) Faux en dim ∞

Exple : $\begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{array}$ n'est pas cont pour $\|\sum_i a_i X^i\|_1 = \max |a_i|$

2) Utilisation

• Soit X un evn, E un sev de dim $< \infty$ de X et F un sev fermé de X. Alors,

(i) $E + F$ est un sev fermé de X

(ii) $\exists$ proj lin cont P de X sur E et $X = E \underset{top}{\oplus} \ker P$

V) Propriétés géométriques

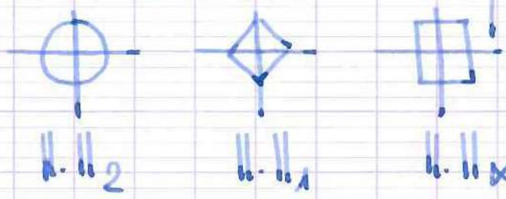
1) Th de Carathéodory

$\Rightarrow$ En dim $< \infty$, l'enveloppe conv d'un comp est comp.

2) Boule unité

• Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dim $< \infty$ et Ω un ouvert de E non vide, borné, convexe et sym p.r 0. Alors, il existe une norme N sur E tq $\Omega = B_N(0,1)$.

Exple : Ds $\mathbb{R}^2$,



VI) De la dim $< \infty$ à la dim ∞

• Th de Brouwer

$\Rightarrow$ Th de Schauder.