215

Appl différentiables déf sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exples et appl.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$.

I) Différentielle et dérivées partielles.

1) Différentielle.

Déf : appl différentiable
df_a
df

Exples : 1) Si f est lin, f est diff et $df_a = f$
2) Si f est bilin, f est diff et
$df_{(a_1,a_2)}(h_1, h_2) = f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2)$.

3) Si $n = 1$, f est diff ssi f est dér et ds ce cas, $df_a(h) = hf'(a)$.

- Si f est diff en a, elle est cont en a.
- Si f et g st diff en a, $\lambda f + \mu g$ l'est aussi et $d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a$.
- Si f est diff en a et g diff en $f(a)$, $g \circ f$ est diff en a et $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$.

$\Rightarrow$ Si f et g st diff en a, fg l'est aussi ($m=1$) et $d(fg)_a = g(a)df_a + f(a)dg_a$.

$\Rightarrow$ Si f est un difféo ($m = n$), df_a est inversible et $(df_a)^{-1} = df^{-1}_{f(a)}$.

2) Dérivées partielles.

Déf : appl dérivable selon un vect

- Si f est diff en a, elle est dér en a selon tt vect v et $f'_v(a) = df_a(v)$.

Déf : dér partielles

- Si f admet des dér partielles cont en a, elle est diff en a et $df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i$

Déf : dér partielles d'ordre sup

appl C^p

- Th de Schwarz

Déf : jacobienne

jacobien

- Soit $\varphi : V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ diff tq $\varphi(V) \subset U$.

Alors, $\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial u_j}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(\alpha)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(\alpha)$

Exple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 et F son exp en coord polaires.

Alors, $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.

3) Exples

- Diff de l'inv
- Diff du det

II) IAF et formules de Taylor.

- IAF

$\to$ Soit U conv et f diff.

Si $\|df_x\| \leq M$ pour tt $x \in U$,

$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|$ pour tt $a, b \in U$.

$\to$ Soit U connexe et f diff.

Si $df_x = 0$ pour tt $x \in U$, f est cste

- TRI

⇒ Lemme d'Hadamard

- TY

III) Inv locale et fcts implicites.

- Th d'inv locale

⇒ th d'inv globale

⇒ Critère de C^1. difféo

⇒ lemme de non rétraction C^1.

- Th des fcts implicites.

⇒ L'éq $x^y = y^x$ avec $x, y \in]1, +\infty[$ déf une fct φ C^∞ tq $\varphi(x) \neq x$ dès que $x \neq e$.

⇒ L'im récip d'une submersion est une ss-variété

IV) Extremum local

Déf : max local
min local

- CN

⇒ Th de Rolle en dim n

Déf : pt critique

- CNS

⇒ Règles de Monge

- CN d'extrema liés

⇒