220

# Eq diff $X' = f(t,X)$ ; exples d'études qualitatives des sol

## I) Eq diff $X' = f(t,X)$

Soit $f : ]a,b[ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(E)$ : $X' = f(t,X)$.

### 1) Etude locale

Déf : sol de $(E)$
sol de $(E)$ qui passe par $(t_0, X_0) \in ]a,b[ \times \Omega$.

- Th de Cauchy - Lipschitz

Exple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(E) : x' = f(x)$.

$$x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \sqrt{x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Alors, $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ t^2/4 \text{ si } t \geq 0 \end{cases} \qquad t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 1 \\ (t-1)^2/4 \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$$

st 2 sol de $(E)$ qui passent par $(0,0)$ mais elles ne coincident pas sur un vois de $(0,0)$

- Th de Péano.

### 2) Etude globale ($f$ est cont et loc. lipsch p.r à $X$)

Déf : prolong$^t$ de sol de $(E)$
sol max de $(E)$
courbes intégrales de $(E)$

- Pour tt $(t_0, X_0) \in ]a,b[ \times \Omega$, il existe une unique sol max de $(E)$ qui passe par $(t_0, X_0)$.

De plus, cette sol est déf sur un int ouvert.

$\rightarrow$ les courbes intégrales de $(E)$ forment une partition de $]a,b[ \times \Omega$.

- Principe de maj a priori (version faible)
- Lemme de Gronwall

$\Rightarrow$ Les sol max de $X' = A(t)X + B(t)$ avec $A : ]a,b[ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : ]a,b[ \to \mathbb{R}^n$ cont sont déf sur $]a,b[$ tt entier.

## II) Exples d'études qualitatives $(X' = f(X))$

### 1) En dim 1

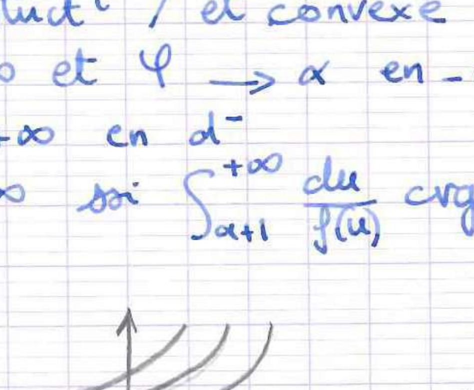
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fct $C^1$ et $\nearrow$ qui admet un unique zéro $\alpha$ et $(E) : x' = f(x)$. Alors,

(i) $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \alpha \end{array}$ est une sol max de $(E)$

(ii) Les graphes des sol max non cstes de $(E)$ sont
soit ds $\Pi^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > \alpha\}$
soit ds $\Pi^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y < \alpha\}$

(iii) Soit $(]c,d[, \varphi)$ une sol max de $(E)$ dt le graphe est ds $\Pi^+$. Alors,

* $\varphi$ est strict$^t$ $\nearrow$ et convexe
* $c = -\infty$ et $\varphi \to \alpha$ en $-\infty$
* $\varphi \to +\infty$ en $d^-$
* $d < +\infty$ ssi $\int_{\alpha+1}^{+\infty} \frac{du}{f(u)}$ cvge



2) <u>En dim 2</u>

• Pendule linéarisé avec frott$^{t}$ $(g = l)$