221

Eq diff lin, syst d'éq diff lin. Exples et appl

I) EDL d'ordre 1 sur k^n ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Soit $A :]a,b[\to M_n(k)$ et $B :]a,b[\to k^n$ cont

(E) : $X' = A(t)X + B(t)$

(E_H) : $X' = A(t)X$

0) De l'ordre p à l'ordre 1.

- $X^{(p)} = A_{p-1}(t)X^{(p-1)} + \dots + A_0(t)X + B(t)$ équiv à

$$\begin{pmatrix} X \\ \vdots \\ X^{(p-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & \ddots & I_n \\ A_0(t) & \dots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \vdots \\ X^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}.$$

1) Structure des solutions

- S_H est un ev
- Th de Cauchy
- Pour $\forall t_0 \in]a,b[$, $\begin{array}{rcl} S_H & \to & k^n \\ \varphi & \mapsto & \varphi(t_0) \end{array}$ est un iso d'ev.

$\to$ S_H est un ev de dim n

S est un esp aff de dim n (dirigé par S_H)

$\to$ Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in S_H$. Alors, les asse :

(i) $\exists t_0 \in]a,b[$, $(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$ base de k^n

(ii) $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ base de S_H

(iii) $\forall t \in]a,b[$, $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ base de k^n

Déf : Wronskien.

• Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in S_H$. Alors, les asse :
(i) $\exists\, t_0 \in]a,b[$, $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t_0) \neq 0$
(ii) $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ base de S_H
(iii) $\forall t \in]a,b[$, $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) \neq 0$

2) Si $n = 1$ $\quad (x' = a(t)x + b(t))$

• $S_H = \{ t \mapsto \lambda e^{\psi(t)}, \lambda \in \mathbb{K} \}$
où ψ est une prim de a sur $]a,b[$.
$\Rightarrow$ Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in S_H$. Alors,
$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(u)\,du\right)$$
• Méthode de variation des cstes :
on cherche $\varphi \in S$ ss la forme $\varphi(t) = \lambda(t) e^{\psi(t)}$.
Exple : Soit $(E) : x' = -x + \sin t$. Alors,
$$S = \left\{ t \mapsto \frac{\sin t - \cos t}{2} + \lambda e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

II) EDL d'ordre 2 sur $\mathbb{K}$ $\quad (x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t))$

1) Méthode de variation des cstes.

• Si (φ_1, φ_2) est une base de S_H, on cherche $\varphi \in S$ ss la forme $\varphi(t) = \lambda(t)\varphi_1(t) + \mu(t)\varphi_2(t)$.
Exple : Soit $(E) : x'' + x = \tan t$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Alors,
$$S = \left\{ t \mapsto -\cos \ln\left[\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] + \lambda \cos t + \mu \sin t, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

2) Méthode de Liouville $\quad (r = 0)$

• Si $\varphi_1 \in S_H$, on cherche $\varphi_2 \in S_H$ ss la forme $\varphi_2 = z\varphi_1$.

Exple : Soit $(E_H) : (t+1)x'' - x' - tx = 0$ sur $]-1,+\infty[$. Alors,

$$S_H = \{ t \mapsto \lambda e^t + \mu (2t+3) e^{-t}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

3) Etude des zéros $(r=0)$

- Si $\varphi \in S_H$ est non nulle, ses zéros st isolés donc en nbre fini ds tt segment de $]a,b[$.
- Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in S_H \setminus \{0\}$.
  Si φ_1 et φ_2 ont un zéro commun, elles st proportion.
  Si (φ_1, φ_2) est une base de S_H, entre 2 zéros de φ_1, il y a un zéro de φ_2.
- Soit $p=0$ et $q<0$. Alors,
  (i) Si $\varphi \in S_H$ est non nulle, elle s'annule au plus 1 fois
  (ii) Si $]a,b[= \mathbb{R}$, la seule sol bornée sur $\mathbb{R}$ est nulle

III) EDLH à coeff csts

1) D'ordre 1 sur K^n $(X' = AX)$

- La sol qui passe par $(t_0, X_0) \in]a,b[\times K^n$ est $t \mapsto X_0 \exp((t-t_0)A)$.
  $\rightarrow$ Si $\mathrm{Mat}_{(X_1,\dots,X_n)}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

$$S_H = \{ t \mapsto \alpha_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} X_n, \ \alpha_i \in K \}$$

2) D'ordre p sur $\mathbb{C}$ $\left(x^{(p)} + a_{p-1} x^{(p-1)} + \dots + a_0 x = 0 \right)$

- Si $X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_0 = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{n_i}$,

$$S_H = \{ t \mapsto \sum_{i=1}^{r} Q_i(t) e^{\lambda_i t}, \ Q_i \in \mathbb{C}_{n_i - 1}[X] \}$$

3) Exple d'étude qualitative

- Pendule oscillant linéarisé avec frott^t ($g = l$)