223

Cvgce des suites num. Exples et appl

I) Cvgce des suites num

- Une suite est cvgte ssi elle est de Cauchy

$\Rightarrow$ Soit F un fermé de $\mathbb{C}$, $f : F \to F$ et (u_n) déf par $u_0 \in F$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si f est contractante, (u_n) cvge vers l'unique pt fixe de f

- D'une suite bornée, on peut extraire une ss suite cvgte.

$\Rightarrow$ Une suite bornée qui admet une unique val d'adh est cvgte

$\Rightarrow$ Th d'Ascoli (version faible)

$\Rightarrow$ Compacité faible de $\overline{B_H}(0,1)$

- (u_n) cvge ssi $\sum (u_{n+1} - u_n)$ cvge

$\Rightarrow$ Formule de Stirling

$\Rightarrow$ Dvt asymptotique des nbres harmoniques

II) Cvgce des suites réelles

- Th d'encadr^t

$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

- Une suite $\nearrow$ et majorée (resp $\searrow$ et minorée) cvge

$\Rightarrow$ Th de comp des séries à termes ≥ 0

- Th des suites adjacentes

$\Rightarrow$ CSA

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$, λ_1, λ_2 2 pts fixes consécutifs de f et (u_n) déf par $u_0 \in]\lambda_1, \lambda_2[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si f est $\nearrow$ et cont, (u_n) cvge vers λ_1 ou λ_2 selon que le graphe de f est en dessous ou au dessus de la diagonale.

Exple : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2 - \sqrt{u_n}}$.

III) Cvge en moyenne de Césaro

- Th de Césaro

$\Rightarrow$ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
Si $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$, $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = \ell$

$\Rightarrow$ Si $u_0 \in]0, \pi[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$, $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$

$\Rightarrow$ Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries num avec $v_n > 0$.
Si $\sum v_n$ div et $u_n = o(v_n)$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)$

$\Rightarrow$ Si la série de Fourier de $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ en $x_0 \in \mathbb{R}$ cvge, c'est vers $f(x_0)$.