227

Continuité et dérivabilité des fcts réelles à var réelle. Exples et contre exples

Les fcts considérées st réelles et déf sur un intervalle de $\mathbb{R}$

I) Continuité

1) Propriétés issues de la connexité

- TVI

-> Une fct cont qui chge de signe s'annule
=> Un polyn réel de deg impair a une racine réelle.
- Une fct cont est inj ssi elle est strict^t monotone

2) Homéo

- Une fct monotone est cont ssi son image est un int.

=> Une bij cont est un homéo

3) Pts de continuité

- L'ens des pts de cont d'une fct est une $\cap$ dénomb d'ouverts

=> $\nexists$ fct cont sur $\mathbb{Q}$ et discont sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- L'ens des pts de cont de la lim simple d'une suite de fcts cont est un ens dense

4) Pts de discontinuité

Déf: fct réglée

Exples : 1) Les fcts cont, cont par morc et monotones st réglées

2) $x \in]0,1[\mapsto \sin(1/x)$ n'est pas réglée
$0 \mapsto 0$

- L'ens des pts de discont d'une fct réglée sur $[a,b]$ est dénomb

Exple : La fct de Weierstrass est réglée sur $[0,1]$, discont sur les rat et cont sur les irrat.

II) Dérivabilité

1) Dérivabilité et continuité

- Une fct dér est cont
- Les fcts cont partt et dér nulle part st denses ds $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

2) Difféo

- Si f est une bij dér, f^{-1} est dér ssi f' ne s'annule pas. Ds ce cas, $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

$\Rightarrow$ Une bij C^n est un C^n-difféo ssi f' ne s'annule pas.

3) Thm de Rolle et généralisations

- Th de Rolle

$\Rightarrow$ Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$, P' l'est aussi

- TAF

$\Rightarrow$ Critère de monotonie d'une fct dér

- TAF généralisé

$\Rightarrow$ Règle de L'Hospital

- Formule de T.L

⇒ e n'est pas alg d'ordre 2 sur $\mathbb{Z}$

⇒ Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$.
Si f et f'' st bornées, f' l'est aussi et
$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$ où $M_k = \sup |f^{(k)}|$.

⇒ Une fct C^∞ au vois de a est analyt en a dès que son reste de Lagrange en a cvge simplt vers 0 au vois de a.

4| Fct dérivée

- Elle n'est R.int eg
- Elle vérifie la propriété des val interm (Th de Darboux)
- Elle est cont sur un ens dense
- ∃ fct dérivée discont sur un ens dense
- Si f est cont sur I et dér sur $I \setminus \{a\}$, f' se prolonge par cont en a dès que $\lim_a f'$ existe

⇒ Une fct dérivée ne possède pas de discont de 1ère espèce

⇒ Principe de maj à priori (version faible)

⇒ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto e^{-1/x^2}$ se prolonge de façon C^1 et m̂ C^∞ à $\mathbb{R}$.