229

Séries de nbres réels ou complexes. Comportt des restes ou des sommes partielles des séries num. Exples

I) Cvgce absolue

Déf : série cvgte
série abs cvgte

- Critère de Cauchy

$\Rightarrow$ Si $\sum u_n$ cvge et $(u_n) \searrow$, $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow$ la cvgce abs entraîne la cvgce

II) Séries à termes ≥ 0

1) Th de comp

- $\sum u_n$ cvge ssi (S_n) est majorée

$\Rightarrow$ Si $u_n \geq v_n$ et $\sum v_n$ div, $\sum u_n$ div

Si $u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ cvge, $\sum u_n$ cvge

Si $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ st de m̂ nature

2) Séries étalons

- Séries de Riemann
- Séries de Bertrand
- Séries géométriques

3) Comp à une série géom

- Critère de D'Alembert

- Critère de Cauchy
- Règle de Raab-Duhamel

III) Séries semi-cvgtes

1) CSA

$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ cvge ssi $\alpha > 0$ ou ($\alpha = 0$ et $\beta > 0$)

2) Règle d'Abel

$\Rightarrow \sum \varepsilon_n e^{inx}$ cvge pour $\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ dès que $\varepsilon_n \searrow 0$

IV) Autres pbs de cvgce

1) Gpts de termes

- Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict^t $\uparrow$ tq $\phi(0) = u_0$.
  Si $\sum_n \left(\sum_{i=\phi(n)}^{\phi(n+1)-1} u_i \right)$ cvge et $\sum_{i=\phi(n)}^{\phi(n+1)-1} |u_i| \to 0$,
  $\sum_n u_n$ cvge et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=\phi(n)}^{\phi(n+1)-1} u_i \right)$

$\Rightarrow$ Règle de la loupe

2) Prod de convol

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ cvgent abs, leur prod de convol cvge abs et $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$.
- Si $\sum u_n$ cvge abs et $\sum v_n$ cvge, leur prod de convol cvge et $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$
- Si $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ cvgent, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$

V) Comport^t des restes ou des sommes partielles

1) Autour des rel de comp

- Soit $\sum u_n$ une série num et $\sum w_n$ une série à termes ≥ 0.

Si $\sum w_n$ div, $u_n = O(w_n) \Rightarrow S_n = O(S'_n)$

$u_n = o(w_n) \Rightarrow S_n = o(S'_n)$

$u_n \sim w_n \Rightarrow S_n \sim S'_n$

Si $\sum w_n$ cvge, $u_n = O(w_n) \Rightarrow R_n = O(R'_n)$

$u_n = o(w_n) \Rightarrow R_n = o(R'_n)$

$u_n \sim w_n \Rightarrow R_n \sim R'_n$

2) Comp série / int

- Si $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est ≥ 0 et $\searrow$,

$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$ pour tt $k \geq 0$.

$\Rightarrow$ Dvt asympt des nbres harm

$\Rightarrow$ Dvt asympt de ζ en 1^+

+ Pb de dénombt.