Intégrale d'une fct d'une var réelle.
Suites de fcts intégrables

I) Int de Riemann (les fcts st déf sur $[a,b]$ à val ds un B)

1) 1ères propriétés

- Rel de Chasles
- Linéarité
- Positivité
- Si f est int, $\|f\|$ l'est aussi et $\|\int_a^b f\| \leq \int_a^b \|f\|$.

2) $F : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$

- Si f est int, F est lipsch de rapport $\|f\|_\infty$.
  Si f est cont, F est dér et $F' = f$

$\Rightarrow$ Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est cont, elle admet une prim et pour $\forall$e prim F, $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

On admet qu'une fct cont est int ce qui sera dém plus loin.

3) Deux résultats importants

- Int par parties

$\Rightarrow$ π^2 est irrationnel

$\Rightarrow$ Formule de Wallis

- Chgt de var

$\Rightarrow$ $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

4) Sommes de Riemann

- Si f est int, pour tt $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tq pour tte subd pointée (σ, ξ) de $[a,b]$ vérifiant $|\sigma| < \alpha$, on ait $\| \int_a^b f(t)dt - S(f,\sigma,\xi) \| \leq \varepsilon$ où $S(f,\sigma,\xi)$ est la somme de Riemann de f pour (σ,ξ)

$\Rightarrow$ Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est C^1,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt + \frac{1}{2n}[f(1)-f(0)] + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\Rightarrow$ Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dér et f' int,
$$\int_0^1 f'(t)\,dt = f(1) - f(0).$$

II) Suites de fcts intégrables

1) Un résultat positif mais limité

- Si (f_n) est une suite de fcts int qui CU vers f sur $[a,b]$, f est int et $\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$

$\Rightarrow$ Les fcts réglées st int

$\Rightarrow$ Les coeff de Fourier d'une série trigo unif^t cvgte st les coeff de la série

$\Rightarrow$ Une fct holo est analytique

$\Rightarrow$ La lim unif sur tt comp d'une suite de fcts holo est holo

2) Un outil plus souple : l'int de Lebesgue (on se place ds $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$)

- Th de cvgce monotone

$\Rightarrow$ Si (f_n) est une suite de fcts mes ≥ 0,
$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n \, d\mu$$

$\Rightarrow$ Lemme de Fatou

$\Rightarrow$ Formule d'Euler

- CDL

$\Rightarrow$ Th de cont ss $\int$

$\Rightarrow$ Th de dér ss $\int$
$\Rightarrow$ Th d'holo ss $\int$