236

Pbs de cvgce et de div d'une int sur un int de $\mathbb{R}$.

I) Int généralisées (on se limite à $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ et les fcts st loc. int sur $[a,b[$)

1) Critère de Cauchy

$\Rightarrow$ Si f et $[a,b[$ st bornés, $\int_a^b f(t)dt$ cvge

$\Rightarrow$ la cvge abs entraine la cvgce

$\Rightarrow$ $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^a} dt$ div pour $a \leq 0$

2) Th de comp (f et g st ≥ 0)

- $\int_a^b f(t)dt$ cvge ssi $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est maj au vois de b

$\Rightarrow$ Si $f \geq g$ et $\int_a^b g(t)dt$ div, $\int_a^b f(t)dt$ div

Si $f \leq g$ et $\int_a^b g(t)dt$ cvge, $\int_a^b f(t)dt$ cvge

Si $f \sim g$, $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ st de m̂ nature

- Int étalons : Int de Riemann
  Int de Bertrand
  $\int_1^\infty e^{-t} dt$

$\Rightarrow$ $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^a} dt$ cvge abs pour $a > 1$

3) Deux résultats importants

- Int par parties

$\Rightarrow$ $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^a} dt$ cvge pour $0 < a \leq 1$

- Chgt de var

$\Rightarrow$ $\int_1^\infty \sin(t^2)dt$ cvge

4) Int semi-cvgtes

- Règle d'Abel
$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^a} dt$ cvge pour $0<a\leq 1$

II) Comp série / int

1) A partir des séries

- Soit f loc. int sur $[a,+\infty[$.
Si $\int_a^\infty f(t)dt$ cvge, $\sum_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$ cvge pour tte tte suite (x_n) tq $x_0 = a$ et $x_n \to +\infty$.
$\Rightarrow \int_1^\infty \left|\frac{\sin t}{t^a}\right| dt$ div pour $0<a\leq 1$

2) A partir des int

- Si $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ est ≥ 0 et $\searrow$,
$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$ pour $\forall k \geq 0$.
$\Rightarrow$ Dvt asympt des nbres harm
$\Rightarrow$ Dvt asympt de ζ en 1^+

III) Comport^t aux bornes et cvge des int

1) On ne peut rien dire eg

- $\int_1^\infty \sin(t^2) dt$ cvge alors que la fct intégrée $\not\xrightarrow[\infty]{} 0$.
- Si f est une fct "à pics", $\int_0^\infty f(t)dt$ cvge alors que f est ≥ 0 et non bornée

2) Des résultats positifs (f est réelle et loc. int sur $[0,\infty[$ tq $\int_0^\infty f(t)dt$ cvge)

- Si f admet une lim en ∞, $f \xrightarrow[\infty]{} 0$
- Si f est unif^t cont, $f \xrightarrow[\infty]{} 0$

- Si f est $\searrow$, $f = o\left(\frac{1}{x}\right)$ en ∞.