239

Transformation de Fourier et prod de convolution. Appl.

I) Transf de Fourier

1) Déf et 1ères propriétés

Déf: transf de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$

- Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,
  (i) Si $g(x) = f(x) e^{i\alpha x}$, $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-\alpha)$
  (ii) Si $g(x) = f(x-\alpha)$, $\hat{g}(t) = \hat{f}(t) e^{-i\alpha t}$
  (iii) Si $g(x) = -ixf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est dér et $\hat{f}'(t) = \hat{g}(t)$.
- Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

2) Esp de Schwartz

Déf: $S(\mathbb{R})$

Exple: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $a > 0$. Alors,
$x \mapsto e^{-ax^2} P(x) \in S(\mathbb{R})$.

- $S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$
- Si $f \in S(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow \widehat{e^{-x^2}}(t) = \sqrt{\pi}\, e^{-t^2/4}$

3) Formule d'inversion de Fourier ds $S(\mathbb{R})$

- Si $f \in S(\mathbb{R})$, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{f}(t)\,dt$ pour tt $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Formules de Parseval ds $S(\mathbb{R})$

4) Th de Plancherel

II) Produit de convol

1) Déf et 1ères propriétés

Déf (formelle)

- Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f*g$ est déf pp, $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\|f*g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$
- Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f*g$ est déf partt, $f*g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\|f*g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}$
- Si $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f*g$ est déf partt.
- Qd $*$ est déf, il est comm
- Qd $f*g$ est déf,

(i) $\text{Supp}(f*g) \subset \overline{\text{Supp} f + \text{Supp} g}$

(ii) Si $\text{Supp} f$ ou $\text{Supp} g$ est comp, $\text{Supp}(f*g) \subset \text{Supp} f + \text{Supp} g$

(iii) Si $\text{Supp} f$ et $\text{Supp} g$ st comp, $\text{Supp}(f*g)$ l'est aussi.

2) Régularisation

- Si $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f*g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et $D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f)*g$ pour $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq k$.

$\Rightarrow$ Si K est un comp de $\mathbb{R}^n$ et Ω un vois ouvert de K, il existe $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tq $\begin{cases} \theta = 1 \text{ sur } K \\ \theta = 0 \text{ sur } \Omega^c \\ 0 \leq \theta \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow C_c^k(\mathbb{R}^n)$ est dense ds $C^k(\mathbb{R}^n)$

3) Approx par convol

- Si $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $f * \rho_\varepsilon \xrightarrow{CU} f$ où $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

avec $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tq $\begin{cases} \rho \geq 0 \\ \operatorname{Supp} \rho \subset \bar{B}(0,1) \\ \int \rho(x)\,dx = 1 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense ds $C^k(\mathbb{R}^n)$.

- Si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $f * k_N \xrightarrow{CU} f$ où k_N est le noyau de Féjer (th de Féjer)

$\Rightarrow$ Les polyn trigo st denses ds $C_{2\pi}(\mathbb{R})$

- Si $f \in C(\mathbb{R})$ est nulle en dehors de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$,

$f * p_n \xrightarrow{CU} f$ où $p_n(t) = \begin{cases} (1-t^2)^n/a_n & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

avec $a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,dt$.

$\Rightarrow$ Th de Weierstrass.