240

Suites et séries de fcts : exples et contre exples.

X est un em, E un evn et (f_n) une suite de fcts de X ds E

I) Suites de fcts

1) Cvgce simple

Déf : cvgce simple
Exples : 1) (x^n) CS vers 0 sur $[0,1[$
2) $(n^\alpha x e^{-nx})$ CS vers 0 sur $[0,\infty[$
• La lim simple conserve les caractères croissant, convexe et m̂ lipschitzien dès que la suite des rapports de Lipsch est bornée.

2) Cvgce unif

Déf : cvgce unif
• La cvgce unif entraîne la cvgce simple
Exples : 1) (x^n) CU vers 0 sur $[0,a]$ $(a<1)$ mais pas sur $[0,1[$
2) $(n^\alpha x e^{-nx})$ CU vers 0 sur $[0,\infty[$ ssi $\alpha<1$.
Si $\alpha\geq 1$, elle CU vers 0 sur $[a,\infty[$ $(a>0)$
3) Si $f\in C([0,1],\mathbb{C})$, $(B_n(f))$ CU vers f sur $[0,1]$
• Critère de Cauchy unif
⟹ Soit (f_n) une suite de fcts cont de X ds E complet.
Si (f_n) CU sur $A\subset X$, elle CU sur $\overline{A}$.
• Th de cont
• Th d'int
• Th de dér
• Th d'holo

3) Qd la cvgce simple entraîne la cvgce unif

- 1^{er} th de Dini
- $2^{ème}$ th de Dini
- Soit (f_n) une suite de fcts de $[a,b]$ ds $\mathbb{R}$ polyn de deg $\leq d$
Si (f_n) CS, elle CU.
- Soit (f_n) une suite de fcts de X comp ds E lipsch dt la suite des rapports de lipsch est bornée.
Si (f_n) CS, elle CU.
$\Rightarrow$ Th d'Ascoli (version faible)

II) Séries de fcts

1) Lien avec les suites de fcts

Déf: cvgce simple
cvgce unif

Exples : 1) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ CU sur $[0,\infty[$
2) $\sum_{n\geq 1} \frac{x}{x^2+n^2}$ CS sur $[0,\infty[$ mais pas unif^t

2) Cvgce normale

Déf: cvgce normale
- Si E est complet, la cvgce normale entraîne la cvgce unif

Exples: 1) $\sum_{n\geq 1} \frac{x}{x^2+n^2}$ CN sur $[0,M]$ $(M>0)$
2) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x}{x^2+n^2}$ CU sur $[0,\infty[$ mais pas normal^t

3) Exples

- Fct cont partt (donc lim unif de fcts C^∞ sur $[a,b]$) et dér nulle part

- Fct C^∞ partt et analytique nulle part
- Fct dér de dérivée discont sur un ens dense
- ζ est C^∞ sur $]1, \infty[$

  $\zeta \longrightarrow 1$ en $+\infty$

  $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ en 1^+

  $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)$ pour $s > 1$

  $\Rightarrow \sum \frac{1}{p_n}$ div.