242

Cvgce des séries entières, propriétés de la somme. Exples et appl.

I) Rayon et domaine de cvgce

1) Déf et 1ères propriétés

- Lemme d'Abel

Déf : rayon de cvgce

- Si $|z|<R$, $\sum a_n z^n$ CA

  Si $|z|>R$, $\sum a_n z^n$ div ($(a_n z^n)$ n'est pas bornée)

Déf : domaine de cvgce

cercle d'incertitude

Exple : Si $a_n = \frac{1}{n}$, $\sum a_n$ div mais (a_n) est bornée donc $R=1$ et $\sum a_n z^n$ cvge pour tt $z \in S^1 \setminus \{1\}$

- $\sum a_n z^n$ CN sur tt comp de $D(0,R)$!

2) Détermination du rayon

Exples : 1) Si a_n est la n-ième décimale de $\sqrt{2}$, $\sum a_n$ div ($a_n \not\to 0$) et (a_n) est bornée donc $R=1$

2) Si $a_n = \frac{\sin n}{n}$, $\sum a_n$ est semi-cvgte donc $R=1$.

- Formule d'Hadamard

$\Rightarrow$ Si $a_n = \left(\operatorname{ch}\frac{1}{n}\right)^{n^{\alpha-1}}$, $R = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha<3 \\ 1/\sqrt{e} & \text{si } \alpha=3 \\ 0 & \text{si } \alpha>3 \end{cases}$

- Règle de D'Alembert

$\Rightarrow$ Si $a_n = \frac{n^n}{n!}$, $R = \frac{1}{e}$

II) Propriétés de la somme

$\left(f : D(0,R) \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)$

1) Continuité

- f est cont sur $D(0,R)$
- Si f se prolonge de façon cont à $\overline{D}(0,R)$, elle est lim unif de polyn sur $\overline{D}(0,R)$.

2) Dérivabilité

- f est C^∞ sur $]-R,R[$ et $f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)\dots(n+1)a_{n+p}x^n$

$\Rightarrow$ Une fct analyt à var réelle est C^∞

- f est ∞^t $\mathbb{C}$-dér sur $D(0,R)$ et $f^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)\dots(n+1)a_{n+p}z^n$

$\Rightarrow$ Une fct analyt à var complexe est holo

3) Comport^t en 1^- $(R=1)$

- Si $\sum a_n$ cvge, $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} f(1)$ (th d'Abel)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

- Th d'Abel étendu
- Si $\sum a_n$ div avec $a_n > 0$,

(i) $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$

(ii) Si $b_n \underset{1^-}{=} o(a_n)$ (resp $b_n \underset{1^-}{\sim} a_n$), $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \underset{1^-}{=} o\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$

(resp $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \underset{1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$)

III) Appl

1) En analyse complexe

- Principe des zéros isolés

$\Rightarrow$ $\exists$ pt sing sur le cercle d'incertitude

$\Rightarrow$ Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Si $\forall z \in \mathbb{C}, \exists n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z) = 0$ alors f est polyn

- Si f est holo sur $D(a,R)$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^{2n} \text{ pour } \forall r<R$$

$\Rightarrow$ Estimations de Cauchy

$\Rightarrow$ Th du max.

2) Ds les pbs de dénombr^t

- Le nbre de partitions d'un ens à n élts est égal au n-ième nbre de Stirling.