243

Fcts d'une var complexe, holomorphie. Exples et appl.

I) Déf et 1ères propriétés

Déf : fct holo ou $\mathbb{C}$-dér.
- Une cl, un produit, une composée et un quotient de fcts holo st des fcts holo.
- Une fct est holo ssi elle est différentiable et si sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire ie une similitude directe ou nulle.

$\Rightarrow$ Eq de Cauchy-Riemann
  $\Rightarrow z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto \operatorname{Re} z$ et $z \mapsto \operatorname{Im} z$ ne st pas holo.
- Une fct analyt à var complexe est ∞^t $\mathbb{C}$-dér. Plus précist, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ sur $D(a,R)$, f est ∞^t $\mathbb{C}$-dér et $f^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p) \cdots (n+1) a_{n+p} z^n$ sur $D(a,R)$. Ep, $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

II) L'exp complexe

Déf : exp complexe
- exp est analytique et $\exp' = \exp$
- $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un morph surj
- $\exp_{|\mathbb{R}}$ est une fct C^∞ >0 donc strictt $\nearrow$ qui réalise une bijection de $\mathbb{C}$ ds $[0,+\infty[$.
- $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $x \mapsto \exp(ix)$ est un morph surj de noyau $a\mathbb{Z}$ avec $a>0$.

Déf : π
- ϕ induit une bij cont de $[-\pi, \pi[$ ds $\mathbb{S}^1$.
- ϕ induit un homéo de $]-\pi, \pi[$ ds $\mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ dt la réciproque est $\theta : x+iy \mapsto 2\arctg\left(\frac{y}{x+1}\right)$

Déf : dét principale de l'argument sur $\mathbb{C}^*$

• exp induit une bij biholo de $\{x+iy \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in]-\pi,\pi[\}$ ds $\mathbb{C} \setminus]-\infty,0]$ dt la réciproque est la dét principale du log déf par : $\log(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$.

III) Autour du th de Cauchy.

1) Indice d'un pt

Déf : indice de a p.r à γ

• $\mathrm{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{Z}$ est cste sur chaque comp connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ et nulle sur la comp connexe non bornée.

Exple : Si $\gamma = \overleftarrow{C}(a,r)$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 \text{ si } |z-a| < r \\ 0 \text{ si } |z-a| > r \end{cases}$

2) Th de Cauchy et th de Morera

• Th de Cauchy (ds un convexe)

• Th de Morera

$\Rightarrow$ la lim unif sur tt comp d'une suite de fcts holo est holo.

3) Formule de Cauchy (ds un convexe)

$\Rightarrow$ Une fct holo est analytique

$\Rightarrow$ Si (f_n) est une suite de fcts holo qui cvge unift sur tt comp vers f, (f_n') cvge unift sur tt comp vers f'.

$\Rightarrow$ Th de Montel.

4) Propriétés issues de l'analyticité

- Principe des zéros isolés

$\Rightarrow$ $\exists$ pt sing sur le cercle d'incertitude

$\Rightarrow$ Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Si $\forall z \in \mathbb{C}, \exists n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z) = 0$ alors f est polyn.

- Si f est holo sur $D(a,R)$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \text{ pour tt } r<R$$

$\Rightarrow$ Estimations de Cauchy

$\Rightarrow$ Th de Liouville

$\Rightarrow$ Th de D'Alembert. Gauss

$\Rightarrow$ Th du max

$\Rightarrow$ Th de Schwartz.