245

Dvt d'une fct périodique en série de Fourier. Exples et appl.

On se limite aux fcts 2π-périod

I) Intro

1) Not et déf

Not : C
L^p
e_n
$\mathcal{P}$

Déf : n.ième coeff de Fourier
série de Fourier

2) 1ères propriétés

- les coeff de Fourier d'un polyn trigo (resp d'une série trigo unif^t cvgte) st les coeff du polyn (resp de la série)
- Si $f \in C$ est C^1 par morc, $c_n(f') = in\,c_n(f)$
- $L_1 \to c_0$, $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un morph alg de norme 1

3) Pb

Si $f \in C$ (resp L^1), est-ce que $(S_N(f))$ cvge ?
Si oui, en quel sens ?

II) Ds L^2

1) <u>Un résultat positif</u>

- $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilb de L^2

$\rightarrow$ Si $f \in L^2$, $\|S_N(f) - f\|_2 \to 0$ et
$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$

2) <u>Appl</u>

- Inég isopérimétrique
- Si f est déf par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ pour $z \in D(a,R)$,
$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 d\theta$ pour $r \in]0,R[$
- Si $f \in C$ est C^1 par morc, $(S_N(f))$ CN sur $\mathbb{R}$.

III) <u>En moyenne de Césaro</u>

1) <u>Un résultat positif</u>

- Th de Fejer

2) <u>Appl</u>

- Deux fcts de C (resp L^1) ayant les m̂ coeff de Fourier st égales (resp égales pp)
- Soit $f \in C$ et $x_0 \in \mathbb{R}$
Si $(S_N(f)(x_0))$ cvge, c'est vers $f(x_0)$

IV) <u>Ponctuell^t</u>

1) <u>Un résultat négatif</u>

- $\exists$ fct de C dt la série de Fourier div en 0.

2) Un résultat positif

- Si $f \in C$ est C^1 par morceaux, $(S_N(f))$ CN sur $\mathbb{R}$ vers f

3) Appl

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$
- $\text{cotan}\, t = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}$ pour $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$

(• $\mathcal{P}$ est dense ds C pour $\|\cdot\|_\infty$)

4) Qd f n'est pas cont

- Th de Dirichlet

$\Rightarrow$ Si $f \in D$ est C^1 par morceaux, $(S_N(f))$ CS sur $\mathbb{R}$ vers f.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} = \frac{\pi - a}{2}$ pour $0 < a < 2\pi$.

+ éq de la chaleur.

⚠ Pour mq (e_n) est une base hilb de L^2, on a besoin de la densité des polyn trigo ds C qu'on montre par exple grâce à Stone-Weierstrass.