Pour réussir en Prépa HEC
(voie économique)

A. RIDARD

Table des matières

Préface

Attention, cet ouvrage ne remplace pas votre cours de Mathématiques mais il vous guidera tout au long de son apprentissage et vous sera d'une aide précieuse lors de vos révisions.

Mode d'emploi

- **Donner du sens aux encadrés**
  Les méthodes exposées ne sont volontairement pas détaillées, leur énoncé est réduit au minimum (pour être appris par coeur). Il convient donc de leur donner du sens à l'aide de votre cours.

- **Faire les exercices**
  Pour illustrer la méthode et vous entraîner, un exercice accompagne la plupart des méthodes.

- **Apprendre par coeur les encadrés**
  A l'écrit ou à l'oral, il faut réagir assez vite devant un énoncé et connaître par coeur les " grandes méthodes " permet le plus souvent de s'en sortir.

Bon courage

Chapitre I

Espaces vectoriels

1. Pour montrer qu'un sous ensemble est un sev

Montrer qu'il contient 0 et qu'il est stable par combinaison linéaire

2. Pour montrer qu'un ensemble est un ev

Montrer que c'est un sev d'un ev de référence

3. Pour montrer que deux ev sont égaux

a. En dimension quelconque

Montrer la double inclusion

b. En dimension finie

Montrer une inclusion et l'égalité des dimensions

4. Pour déterminer la dimension d'un ev

Compter les vecteurs d'une base

Utiliser un isomorphisme avec un ev de dimension connue

5. Pour montrer que $E = F \oplus G$

a. En dimension quelconque

Montrer $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$

b. En dimension finie

Montrer $\dim E = \dim F + \dim G$ et $F \cap G = \{0\}$ (ou $E = F + G$)

6. Pour montrer qu'une famille est libre

Revenir à la définition

7. Pour montrer qu'une famille est liée

Revenir à la définition

Utiliser le lemme de Steinitz

8. Pour montrer qu'une famille est génératrice

Revenir à la définition

9. Pour montrer qu'une famille est une base

a. En dimension quelconque

Montrer que c'est une famille libre et génératrice

b. En dimension finie connue

Montrer que c'est une famille libre maximale (ou génératrice minimale)

Chapitre II

Applications linéaires

1. Pour montrer que f est linéaire

Montrer que f conserve les combinaisons linéaires

2. Pour montrer que $f \in \mathcal{L}(E, F)$

Montrer que f est linéaire après avoir vérifié que f était à valeurs dans F

3. Pour définir une application linéaire

Utiliser tous les vecteurs

Utiliser une base

Utiliser des sev supplémentaires

4. Pour déterminer le rang d'une application linéaire

Utiliser la formule du rang

Revenir à la définition

5. Pour montrer qu'une application linéaire est injective

a. En dimension quelconque

Montrer que son noyau est réduit à 0

b. En dimension finie

Montrer que son noyau est de dimension 0

6. Pour montrer qu'une application linéaire est surjective

a. En dimension quelconque

Montrer que son image est l'espace d'arrivée tout entier

b. En dimension finie

Montrer que son image et l'espace d'arrivée ont même dimension

7. Pour montrer qu'une application linéaire est bijective

a. En dimension quelconque

Montrer qu'elle est injective et surjective

b. En dimension finie

Montrer qu'elle est injective (ou surjective) après avoir vérifié que les espaces de départ et d'arrivée avaient même dimension (finie)

8. Pour montrer que h est une homothétie

Montrer que $(x, h(x))$ est une famille liée pour tout x

9. Pour montrer que p est un projecteur

Montrer que p est linéaire et que $p^2 = pop = p$

10. Pour montrer que s est une symétrie

Montrer que s est linéaire et que $s^2 = sos = Id$

Chapitre III

Matrices d'endomorphismes

1. Pour déterminer $M_{\mathcal{B}}(u)$ où $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$

Ecrire la matrice dont la i-ième colonne représente les coordonnées de $u(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}$

Exercice 1. Soit u l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $u(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + x_2)$.

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer la matrice de u relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

2. Pour déterminer $M_{\mathcal{B}}(u + \lambda v)$

Utiliser $M_{\mathcal{B}}(u + \lambda v) = M_{\mathcal{B}}(u) + \lambda M_{\mathcal{B}}(v)$

3. Pour déterminer $M_{\mathcal{B}}(uov)$

Utiliser $M_{\mathcal{B}}(uov) = M_{\mathcal{B}}(u)M_{\mathcal{B}}(v)$

Exercice 2. Déterminer les matrices M telles que $AM = MA$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Pour déterminer les coordonnées de $u(x)$

Utiliser $Y = AX$

Exercice 3. En reprenant l'énoncé de l'exercice1, déterminer les coordonnées de $u(1, -1)$.

5. Pour changer de base

a. Au niveau de la matrice d'un endomorphisme

Utiliser $A' = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

Exercice 4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.
On considère $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ où $e'_1 = e_1 - e_2$ et $e'_2 = e_1 + e_2$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
2. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$.

b. Au niveau des coordonnées d'un vecteur

Utiliser $X = PX'$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

Exercice 5. On reprend l'énoncé précédent.
Déterminer les coordonnées du vecteur $x = 2e_1 - 3e_2$ dans la base $\mathcal{B}'$.

6. Pour calculer une puissance de matrice

Calculer directement

Décomposer et utiliser le binôme de Newton

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $J^2 = 3J$.
2. En déduire que $J^n = 3^{n-1}J$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
3. En remarquant que $A = J - I$, calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Procéder par récurrence

Exercice 7. Déterminer les puissances succesives de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Diagonaliser

7. Pour montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible

Montrer que 0 n'est pas valeur propre de A

Montrer que les vecteurs colonnes de A forment une famille libre (ou génératrice) de $\mathcal{M}_{n,1}$

Revenir à la définition

8. Pour calculer l'inverse d'une matrice inversible

Utiliser $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ à condition que $ad - bc \neq 0$

Utiliser la réduction de Gauss

Exercice 8. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Diagonaliser

Chapitre IV

Diagonalisation

1. Pour déterminer les éléments propres d'un endomorphisme

Revenir à la définition

Utiliser une matrice associée

2. Pour déterminer les éléments propres d'une matrice

1. Déterminer les valeurs propres [a] :
   - Déterminer une réduite triangulaire de $A - \lambda I$
   - Déterminer les λ qui annulent un des coefficients diagonaux de cette réduite
2. Déterminer les vecteurs propres pour chaque valeur propre λ :
   - Résoudre l'équation $(A - \lambda I)X = 0$ en utilisant la réduite

[a] Si P est un polynôme vérifiant $P(A) = 0$, alors les valeurs propres **possibles** de A sont les racines de P

Exercice 9. Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Pour montrer qu'une matrice est diagonalisable

a. Quand la matrice est réelle symétrique

C'est automatique

b. Quand la matrice de taille n a n valeurs propres distinctes deux à deux

C'est automatique

c. En général

Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres

Exercice 10. Montrer que A est diagonalisable.

4. Pour diagonaliser une matrice diagonalisable

Passer de la base de départ à une base de vecteurs propres

Exercice 11.

1. Diagonaliser A.
2. Déterminer les puissances successives de A.
3. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Chapitre V

Suites

1. Pour étudier la monotonie d'une suite

a. Quand u_n est une somme

Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

Exercice 12. Etudier la monotonie de la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

b. Quand u_n est un produit

Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 à condition que $u_n > 0$ pour tout n

Exercice 13. Etudier la monotonie de la suite définie par $u_n = \frac{n^2}{n!}$ pour tout entier $n \geq 2$.

c. Quand $u_n = f(n)$

Etudier la monotonie de f

Exercice 14. Etudier le sens de variation de la suite définie sur $\{2, 3, \ldots\}$ par $u_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n-1}$.

2. Pour étudier la convergence d'une suite

Utiliser le théorème de la limite monotone

Exercice 15. Soit u la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in [0,1] \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \text{ pour tout } n \in \mathbf{N} \end{array}\right.$.

1. Montrer que u est décroissante.
2. Montrer que u est bornée par 0 et 1.
3. Que peut-on en déduire ?

Utiliser un théorème de comparaison

Exercice 16. Soit u la suite définie par $u_n = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
2. Que peut-on en déduire ?

Utiliser un équivalent

Exercice 17. Discuter suivant la valeur de $\alpha \in \mathbf{R}$ la convergence de la suite définie sur $\mathbf{N}^*$ par $u_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n^\alpha}$

Utiliser une somme de Riemann

Exercice 18. Etudier la convergence de la suite définie sur $\mathbf{N}^*$ par $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+n)] - \ln n$.

Revenir à la définition

Exercice 19. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite qui converge vers $l \in \mathbf{R}$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} = l$.

3. Pour étudier une suite récurrente

a. Quand elle est classique

Utiliser les formules

Exercice 20. Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R} \\ u_{n+1} = au_n + b,\ n \in \mathbf{N} \end{cases}$ avec $a, b \in \mathbf{R}$.
Exprimer u_n en fonction de n dans les cas suivants :

1. $a = 1$ et $b = 0$
2. $a = 1$ et $b \neq 0$
3. $a \neq 1$ et $b \neq 0$

b. Quand "$u_{n+1} = f(u_n)$"

Procéder par récurrence en exploitant les propriétés de f

Exercice 21. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x - x^2$.
Discuter suivant la valeur de $u_0 \in \mathbf{R}$ la convergence de la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Chapitre VI

Séries

1. Pour montrer qu'une série diverge (grossièrement)

Montrer que son tg ne tend pas vers 0

2. Pour étudier la convergence d'une série

a. A termes positifs

Majorer ou minorer le tg

Exercice 22. Etudier la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n^2 + \cos n}$.

Utiliser un équivalent du tg

Exercice 23. Etudier la convergence de la série $\sum \ln(1 + \dfrac{1}{n}) \sin \dfrac{1}{n}$.

Utiliser un "o"

Exercice 24. Etudier la convergence de la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$.

Comparer à une intégrale

Exercice 25. Etudier la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$.

b. A termes quelconques

Etudier la convergence absolue

Utiliser un dl du tg

Exercice 26. Etudier la convergence de la série $\sum \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{n}} - 1$.

3. Pour déterminer la somme d'une série

a. Quand S_n se calcule

Utiliser des dominos

Exercice 27. Etudier la convergence et déterminer la somme des séries suivantes.

1. $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$
2. $\sum \ln(1 - \dfrac{1}{n^2})$
3. $\sum \ln(\cos \dfrac{1}{2^n})$

b. Quand S_n ne se calcule pas

Utiliser l'intégration

Exercice 28. Etudier la convergence et déterminer la somme de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

Utiliser la dérivation

Exercice 29. Etudier la convergence et déterminer la somme de la série $\sum nq^{n-1}$ avec $-1 < q < 1$.

Utiliser une formule de Taylor

Exercice 30. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

4. Formulaire

série	condition de convergence	somme
de Riemann	$\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$	
géométrique	$\sum q^n$ converge ssi $\lvert q\rvert < 1$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
	$\sum nq^{(n-1)}$ converge ssi $\lvert q\rvert < 1$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{(n-1)} = \frac{1}{(1-q)^2}$
	$\sum n(n-1)q^{(n-2)}$ converge ssi $\lvert q\rvert < 1$	$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{(n-2)} = \frac{2}{(1-q)^3}$
harmonique	$\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$
exponentielle	$\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x \in \mathbf{R}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

Chapitre VII

Fonctions numériques réelles

1. Pour étudier une fonction

1. Déterminer l'ensemble de définition
   On rencontre des problèmes avec les dénominateurs, les racines et les logarithmes
2. Déterminer le domaine d'étude D
   On étudie la parité et la périodicité
3. Etudier la continuité
4. Etudier la dérivabilité
5. Etudier les variations
   On étudie, le plus souvent, le signe de la dérivée
6. Etudier les limites aux bornes de D
7. Dresser le tableau de variations
8. Etudier les branches infinies
9. Etudier la convexité
   On étudie, le plus souvent, le signe de la dérivée seconde
10. Tracer le graphe

2. Pour prolonger une fonction par continuité en un point

Etudier la limite en ce point

Exercice 31. Soit f la fonction définie par $f(x) = x \ln x$ pour tout $x > 0$.
Peut-on prolonger la fonction f par continuité en 0 ?

3. Pour étudier la dérivabilité en un point

Revenir à la définition

Exercice 32. Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Utiliser la limite de la dérivée

Exercice 33. Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x}$ pour tout $x \geq 0$.

4. Pour lever une indétermination

a. De la forme $\frac{0}{0}$ en un réel a

Factoriser puis simplifier

Exercice 34. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-3x+2}$.

Utiliser la limite d'un taux d'accroissement

Exercice 35. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$.

b. De la forme $+\infty-\infty$

Mettre le terme dominant en facteur puis utiliser les croissances comparées

Exercice 36. Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3-\ln x)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3-e^x)$

c. De la forme $\frac{\infty}{\infty}$

Mettre les termes dominants en facteur puis utiliser les croissances comparées

Exercice 37. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-\ln x+\frac{1}{x}}{e^x-x-\ln x}$.

d. De la forme 1^∞

Passer au logarithme

Exercice 38. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\dfrac{1}{x})^x$.

5. Pour montrer une inégalité

Utiliser les inégalités classiques (triangulaires, des accroissements finis, ...)

Utiliser la convexité

Exercice 39. Montrer les inégalités suivantes.

1. $e^x \geq 1+x$ pour tout $x\in\mathbf{R}$
2. $\ln(1+x)\leq x$ pour tout $x>-1$

Etudier le signe de la fonction qui va bien

Chapitre VIII

Formules de Taylor

1. Pour obtenir le comportement d'une fonction

a. Globalement

Utiliser Taylor avec reste intégral ou, de manière moins précise, l'inégalité de Taylor

b. Localement (étude d'une branche infinie par exemple)

Utiliser Taylor-Young qui est à la base des dl

2. Pour calculer des dl

Utiliser les dl de référence et les règles opératoires (somme, produit, composée, quotient et primitive)

Exercice 40. Déterminer les dl suivants.

1. $dl_3(0)$ de $x \mapsto (\cos x)\ln(1+x)$.
2. $dl_4(0)$ de $x \mapsto \ln(\cos x)$.
3. $dl_5(0)$ de $x \mapsto \tan x$.
4. $dl_n(0)$ de $x \mapsto \tan x$ en raisonnant par récurrence.

3. Pour réussir les dl

Changer de variable quand ce n'est pas au voisinage de 0

Exercice 41. Déterminer les dl suivants.

1. $dl_3(\frac{\pi}{4})$ de $x \mapsto \sin x$.
2. $dl_3(0)$ de $x \mapsto e^{\cos x}$.

Abandonner l'inutile

Exercice 42. Déterminer le $dl_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\ln(1+x)}$.

4. Pour lever une indétermination dans un calcul de limite

Utiliser un dl seulement si un équivalent échoue

Exercice 43. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

5. Formulaire

a. Dl en 0

$$
\begin{array}{rcl}
e^x & = & 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} & = & 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} & = & 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) & = & x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha & = & 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\
\cos x & = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sin x & = & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})
\end{array}
$$

b. Equivalents en 0

$$
\begin{array}{rcl}
e^x - 1 & \sim & x \\
\ln(1+x) & \sim & x \\
(1+x)^\alpha - 1 & \sim & \alpha x \\
\cos x - 1 & \sim & \frac{x^2}{2} \\
\sin x & \sim & x \\
\tan x & \sim & x
\end{array}
$$

Chapitre IX

Intégrales propres

1. Pour calculer une primitive

a. D'une fonction usuelle

Utiliser les formules

b. D'une fonction rationnelle

Décomposer en éléments simples puis primitiver les éléments simples

Exercice 44.

1. Décomposer $\frac{x^3+3x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+1)}$ sous la forme $a + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$.
2. En déduire une primitive de la fonction définie sur $\mathbf{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^3+3x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+1)}$.

2. Pour calculer une intégrale

Intégrer à vue

Intégrer par parties

Exercice 45. *Pour diminuer le degré d'une partie polynômiale*
Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x \, dx$.

Exercice 46. *Pour faire disparaître les termes en* ln
Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{(t+1)^2} \, dt$.

Effectuer un changement de variable

Exercice 47. *Pour rétrécir l'intervalle d'intégration*
Montrer qu'une fonction T-périodique f vérifie $\displaystyle\int_0^{nT} f(t)\,dt = n\int_0^T f(u)\,du$.

Exercice 48. *Pour intégrer les fonctions de la forme* $f(x, \sqrt{ax+b})$
Calculer $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} \, dx$.

3. Pour borner une intégrale

Utiliser $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$

4. Pour établir une inégalité entre deux intégrales

Intégrer une inégalité entre les deux intégrandes (valable sur l'intervalle d'intégration)

5. Pour montrer qu'une fonction continue est nulle

Utiliser le cours dès que la fonction est positive d'intégrale nulle

Exercice 49. Que dire d'une fonction continue f qui vérifie $\int_0^1 |f(t)|\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$?

6. Pour transformer une intégrale en une intégrale "exploitable"

Intégrer par parties

Exercice 50. Montrer qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur [0,1] telle que $f(0) = f(1)$ vérifie $\int_0^1 f(t)f''(t)\,dt \leq 0$.

Effectuer un changement de variable

Exercice 51. Montrer qu'une fonction T-périodique f vérifie $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$, $a \in \mathbf{R}$.

7. Pour montrer qu'une suite définie par $u_n = \int_a^b f_n(t)\,dt$ converge

Utiliser le théorème de la limite monotone

Exercice 52. Montrer que la suite définie par $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ converge.

8. Pour dériver une fonction définie par $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$

Utiliser $G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$ dès que f est continue

Exercice 53. Montrer qu'une fonction f continue et T-périodique vérifie $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$, $a \in \mathbf{R}$.

Chapitre X

Intégrales impropres

1. Pour étudier la convergence d'une intégrale une fois impropre

a. Quand f est prolongeable par continuité sur $[a, b]$

Expédier le problème (l'intégrale est faussement impropre)

Exercice 54. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge.

b. Quand f est primitivable

Revenir à la définition

Exercice 55. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln t\, dt$ converge.

Exercice 56. *Intégrales de Riemann*

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$.

c. Quand f est positive

Utiliser un théorème de comparaison (majorer, minorer ou donner un équivalent)

Exercice 57. *Majorer ou minorer*
Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2 + \sin^2 t}$ converge.

Exercice 58. *Donner un équivalent*
Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + \sqrt{t}}$ diverge.

Utiliser le comportement de $x^\alpha f(x)$ au voisinage du problème

Exercice 59. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ converge.

d. Quand f n'est pas de signe constant

Etudier l'absolue convergence

Exercice 60. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, dt$ converge.

2. Pour étudier la convergence d'une intégrale plusieurs fois impropre

Découper l'intégrale pour séparer les problèmes

Exercice 61. Etudier la convergence des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t^2)}\, dt$.

3. Pour calculer avec des intégrales impropres

Utiliser la linéarité et Chasles à condition que les intégrales convergent

Effectuer un changement de variable (version impropre)

Exercice 62. Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\, dt$.

Intégrer par parties (version propre puis passage à la limite)

Exercice 63. Etudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Chapitre XI

Fonctions numériques de deux variables

1. Pour calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f

Figer une variable et dériver f par rapport à l'autre

2. Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$

Montrer que les dérivées partielles d'ordre 1 sont définies et continues

3. Pour obtenir le DL de f en (a, b) à l'ordre 1

Utiliser $f(a+h, b+k) = f(a, b) + ph + qk + o(||(h, k)||)$

où $p = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$

4. Pour calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f

Figer une variable et dériver par rapport à l'autre les dérivées partielles d'ordre 1

5. Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$

Montrer que les dérivées partielles d'ordre 2 sont définies et continues

6. Pour obtenir le DL de f en (a, b) à l'ordre 2

Utiliser $f(a+h, b+k) = f(a, b) + ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + o(||(h, k)||^2)$

où $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$[a] et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$

[a] Egalité assurée par le théorème de Schwarz dès que f est de classe $\mathcal{C}^2$

7. Pour déterminer les extremums de f

- Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f
- Déterminer les points critiques[a] de f
- Appliquer les règles de Monge pour chaque point critique

[a] Points qui annulent les dérivées partielles d'ordre 1

Exercice 64. Déterminer les extremums de la foncion définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y$

Chapitre XII

Dénombrement et probabilités classiques

1. Pour dénombrer

a. Avec ordre et répétition

Utiliser les uplets

Exercice 65. p personnes se rendent au restaurant et le serveur propose n menus différents ($n \geq p$).
A combien de situations peut être confronté le serveur ?

b. Avec ordre et sans répétition

Utiliser les arrangements

Exercice 66. On reprend l'énoncé précédent mais avec p personnes prenant des menus tous différents.
A combien de situations peut être confrontés le serveur ?

c. Sans ordre ni répétition

Utiliser les combinaisons

Exercice 67. On reprend l'énoncé précédent.
A combien de situations peut être confrontés le cuisinier ?

d. Sans ordre et avec répétition

Décomposer le problème

Exercice 68. Combien peut-on obtenir de résultats différents quand on lance trois dés identiques ?

Exercice 69. Combien existe-t-il de mains différentes au Poker contenant exactement deux paires ?
Le poker se joue avec un jeu de 32 cartes et une main en contient 5.

2. Pour calculer $\mathbf{P}(A \cup B)$

a. Quand A et B sont incompatibles

Utiliser $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

b. Quand A et B ne sont pas incompatibles

Utiliser $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$

3. Pour calculer $\mathbf{P}(A \cap B)$

a. Quand A et B sont indépendants

Utiliser $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$

b. Quand A et B ne sont pas indépendants

Utiliser $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B\|A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A\|B)$

Exercice 70. Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On effectue n tirages successifs d'une boule de cette urne selon le protocole suivant : si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et si on obtient une boule blanche, on l'élimine.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche quand $n = 2$?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche ?

4. Pour calculer $\mathbf{P}(A)$

a. Sous l'hypothèse d'équiprobabilité

Utiliser $\mathbf{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{nombre\,de\,cas\,favorables}{nombre\,de\,cas\,possibles}$

Exercice 71. On extrait simultanément 3 boules d'une urne contenant 4 boules blanches numérotées de 1 à 4, 5 boules rouges numérotées de 1 à 5 et 3 boules vertes numérotées de 1 à 3.
Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux boules de même couleur.

b. Quand $\mathbf{P}(\overline{A})$ est plus facile à calculer

Utiliser $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A})$

Exercice 72. On reprend l'expérience précédente.
Déterminer la probabilité de tirer au moins une boule numérotée 1.

c. Quand A est lié à un événement B

Utiliser $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A\|B) + \mathbf{P}(\overline{B})\mathbf{P}(A\|\overline{B})$ (formule des probabilités totales)

Exercice 73. Une urne A contient un jeton blanc et un jeton noir, une urne B contient deux jetons blancs et un jeton noir. On choisit une urne au hasard et on en extrait un jeton.
Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton noir ?

Exercice 74. Dans un atelier :
- 90% des pièces fabriquées sont sans défaut
- 5% des pièces avec défaut passent le test
- 98% des pièces sans défaut passent le test

Déterminer la probabilité qu'une pièce prise au hasard passe le test.

5. Pour calculer $\mathbf{P}(B|A)$ à partir de $\mathbf{P}(A|B)$

Utiliser $\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)}{\mathbf{P}(A)}$ (formule de Bayes)

Exercice 75. On reprend l'énoncé précédent.
Déterminer la probabilité qu'une pièce ayant passé le test soit défectueuse.

Exercice 76. On dispose d'un lot de 100 dés cubiques dont 50 sont pipés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir la face notée 6 vaut $\frac{1}{2}$. On choisit un dé au hasard dans le lot, on le lance et on constate que l'on obtient un 6.
Quelle est la probabilité d'avoir choisi un dé pipé ?

6. Pour montrer que des événements sont mutuellement indépendants

Revenir à la définition

Exercice 77. On lance deux dés, un blanc et un noir, et on note :
- $A =$"le dé blanc améne un résultat pair"
- $B =$"la somme des points obtenus est paire"
- $C =$"le dé noir améne un résultat pair"

1. Montrer que A et B sont indépendants.
2. A, B, C sont-ils mutuellement indépendants ?

Chapitre XIII

Va discrètes

1. Pour étudier le nombre de succès au terme de n répétitions indépendantes d'une expérience à deux issues possibles

Utiliser $\mathcal{B}(n,p)$ où p est la probabilité de succès

Exercice 78. On lance n fois deux dés et l'on note X le nombre de doubles obtenus.
Déterminer la loi de X.

2. Pour étudier le nombre d'individus à caractère donné au terme d'un tirage simultané (ou successif mais sans remise) de n individus parmi N

Utiliser $\mathcal{H}(N,n,p)$ où p est la proportion d'individus à caractère donné dans la population

Exercice 79. On prend au hasard une poignée de 7 boules dans une urne contenant 10 boules dont 4 blanches et l'on note X le nombre de boules blanches obtenues.
Déterminer la loi de X.

3. Pour étudier l'attente du premier succès au cours de répétitions indépendantes d'une expérience à deux issues possibles

Utiliser $\mathcal{G}(p)$ où p est la probabilité de succès

Exercice 80. On lance une pièce jusqu'à l'obtention d'un pile et l'on note X le nombre de lancers.
Déterminer la loi de X.

4. Pour déterminer la loi de X

Reconnaître une loi classique

Utiliser la fonction de répartition

Exercice 81. On tire une poignée de k jetons ($k \geq 2$) d'une urne en contenant n numérotés de 1 à n et l'on note X le plus grand des numéros obtenus.
Déterminer la loi de X.

Procéder à un calcul

Exercice 82. *Directement.*
Une urne contient 10 jetons indiscernables au toucher dont :
- 6 portent le numéro 0
- 3 portent le numéro 50
- 1 porte le numéro 200

On mise 20 euros, on extrait simultanément 3 jetons et l'on empoche la somme en euros.
Déterminer la loi de la somme S empochée.

Exercice 83. *Par un conditionnement "unique".*
Une urne contient a boules blanches ($a \geq 2$) et a boules noires. On en extrait, successivement et sans remise, des boules jusqu'à obtenir une blanche pour la deuxième fois.
Déterminer la loi du nombre X de tirages ainsi effectués.

Exercice 84. *Par un conditionnement "complet".*
On dispose de n urnes $U_1, \dots, U_n$, l'urne U_k contenant k jetons numérotés de 1 à k.
On choisit une urne et l'on en extrait un jeton.
Déterminer la loi du numéro X obtenu.

Exercice 85. *Par récurrence.*
Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : on note sa couleur puis on la replace dans l'urne en y ajoutant une boule de la même couleur.
Déterminer le nombre X_n de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

5. Pour résoudre les problèmes de couples

Faire un tableau

Exercice 86. On place au hasard trois objets dans un meuble contenant trois tiroirs et on note X le nombre d'objets contenus dans le premier tiroir et Y le nombre de tiroirs vides.
1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois marginales.
3. Déterminer la loi conditionnelle de $X|(Y = 1)$.
4. Les va X et Y sont-elles indépendantes ?

6. Pour étudier $X + Y$ ou XY

Utiliser le formulaire

Utiliser $\mathbf{P}\Big(f(X,Y) = z\Big) = \sum\limits_{f(x,y)=z} \mathbf{P}\Big((X = x) \cap (Y = y)\Big)$

Exercice 87. On reprend l'énoncé précédent.
1. Déterminer $\mathbf{P}(X + Y = 3)$.
2. Déterminer $\mathbf{P}(XY = 3)$.

7. Pour déterminer l'espérance de ...

a. X

Utiliser le formulaire

Revenir à la définition

Exercice 88. En reprenant l'énoncé de l'exercice 82, déterminer $\mathbf{E}(S)$.

b. $f(X)$

Utiliser le théorème de transfert

Exercice 89. Montrer que $\mathbf{E}(X^2) = \sum_i x_i^2 \mathbf{P}(X = x_i)$.

c. $aX + bY$

Utiliser la linéarité de l'espérance

Exercice 90. On reprend l'énoncé de l'exercice 82.
Exprimer le gain algébrique G en fonction de S et en déduire $\mathbf{E}(G)$.

d. XY

Utiliser $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ à condition que X et Y soient indépendantes

8. Pour déterminer la variance de ...

a. X

Utiliser le formulaire

Utiliser $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$

Exercice 91. En reprenant l'énoncé de l'exercice 82, déterminer $\mathbf{V}(S)$ et $\sigma(S)$.

b. $aX + b$

Utiliser $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$

Exercice 92. En reprenant l'énoncé de l'exercice 82, déterminer $\mathbf{V}(G)$ et $\sigma(G)$.

c. $X + Y$

Utiliser $\mathbf{V}(X+Y) = \begin{cases} \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) & \text{si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2cov(X,Y) & \text{sinon} \end{cases}$

9. Formulaire

loi de X	loi de Y	loi de $X+Y$ à condition que X et Y soient indépendantes
$\mathcal{B}(n_1, p)$	$\mathcal{B}(n_2, p)$	$\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathcal{P}(\mu)$	$\mathcal{P}(\lambda + \mu)$

loi	espérance	variance
$\mathcal{B}(p)$	p	pq
$\mathcal{B}(n, p)$	np	npq
$\mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ
$\mathcal{H}(N, n, p)$	np	$npq\frac{N-n}{N-1}$

Chapitre XIV

Va continues, approximations et estimations

1. Pour passer de la densité à la fonction de répartition

Intégrer

2. Pour passer de la fonction de répartition à la densité

Dériver

3. Pour étudier $X + Y$

Utiliser le formulaire

4. Pour déterminer une espérance ou une variance

Utiliser les méthodes données dans le cas discret

5. Pour majorer une probabilité

Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev

Exercice 93. On lance 1000 fois une pièce honnête.
Majorer la probabilité que la fréquence observée de piles s'écarte de plus de 0,1 de la fréquence théorique 0,5.

6. Pour approcher une probabilité

Utiliser les approximations usuelles :

$$\mathcal{H}(N,n,p) \overset{N\geq 10n}{\approx} \mathcal{B}(n,p) \overset{n\geq 30,\, np\leq 10}{\approx} \mathcal{P}(np)$$

$$\mathcal{B}(n,p) \overset{n\geq 20,\, p\simeq 0{,}5}{\approx} \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$$

$$\mathcal{P}(\lambda) \overset{\lambda\geq 10}{\approx} \mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$$

Exercice 94. On lance 1000 fois une pièce honnête.
Approcher la probabilité que la fréquence observée de piles s'écarte de plus de 0,1 de la fréquence théorique 0,5.

7. Pour estimer une proportion ou l'espérance d'une loi normale

Utiliser la table de $\mathcal{N}(0,1)$

Exercice 95. Pour estimer le résultat d'une élection à deux candidats, on effectue un sondage sur 1000 personnes et 540 déclarent voter pour A.
Au seuil de confiance de 95%, peut-on estimer que A sera élu ?

8. Formulaire

loi de X	loi de Y	loi de $X+Y$ à condition que X et Y soient indépendantes
densité f	densité g	densité définie par $h(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)\,du$
$\mathcal{N}(m_1,\sigma_1)$	$\mathcal{N}(m_2,\sigma_2)$	$\mathcal{N}(m_1+m_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$

loi	densité	espérance	variance
$\mathcal{U}([a,b])$	$f(t)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t\in[a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{E}(\lambda)$	$f(t)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t\geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$\mathcal{N}(m,\sigma)$	$f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2
$\mathcal{N}(0,1)$	$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$	0	1

Bibliographie

[ML] X. MERLIN et C. LEBOEUF, *METHOD'H*, Ellipses, 1996