Formulaire de Terminale S
(obligatoire)

A. RIDARD

1. Nombres complexes

a. Conjugués, modules et arguments

Propriétés des conjugués

Pour tous complexes z_1 et z_2,

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1}\,\overline{z_2} \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq 0\end{aligned}$$

Propriétés des modules

Pour tous complexes z_1 et z_2,

$$\begin{aligned}|z_1 z_2| &= |z_1||z_2| \\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0\end{aligned}$$

Propriétés des arguments

Pour tous complexes non nuls z_1 et z_2,

$$\begin{aligned}arg(z_1 z_2) &= arg(z_1) + arg(z_2)\ [2\pi] \\ arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= arg(z_1) - arg(z_2)\ [2\pi]\end{aligned}$$

b. Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier n,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

c. Formules d'Euler

Pour tout réel θ,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

d. Expressions complexes des transformations

La translation de vecteur $\vec{u}(t)$ est définie par

$$z' = z + t$$

L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbf{R}$ est définie par

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta \in \mathbf{R}$ est définie par

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

2. Algèbre et trigonométrie

a. Equations du second degré dans C

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$:

– Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

De plus,

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

– Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution réelle

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

De plus,

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$$

– Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

De plus,

$$az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$$

b. Formules trigonométriques

Formules d'addition

Pour tous réels a et b,

$$\begin{array}{rcl} \cos(a+b) & = & \cos a\cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) & = & \cos a\cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) & = & \sin a\cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) & = & \sin a\cos b - \cos a \sin b \end{array}$$

Formules de duplication

Pour tout réel a,

$$\begin{array}{rcl} \cos(2a) & = & \cos^2 a - \sin^2 a \\ & = & 2\cos^2 a - 1 \\ & = & 1 - 2\sin^2 a \\ \sin(2a) & = & 2\sin a\cos a \end{array}$$

3. Analyse

a. Dérivées

On considère une fonction f définie sur un intervalle I.

Définition. *On dit que f est dérivable en $a \in I$ si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Dans ce cas, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le nombre dérivé de f en a noté $f'(a)$.*

Propriété. *Si f est dérivable en $a \in I$, l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est*

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
λ	0
x	1
x^n, $n \in \mathbf{N}^*$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbf{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Opérations sur les dérivées

f	f'
$u+v$	$u'+v'$
λu	$\lambda u'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
vou	$(v'ou)u'$
u^n, $n \in \mathbf{N}^*$	$nu^{n-1}u'$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$e^u u'$

b. Limites

Limite de $u+v$

u \ v	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**FI**
$-\infty$	$-\infty$	**FI**	$-\infty$

Limite de uv

u \ v	$l' \neq 0$	0	∞
$l \neq 0$	ll'	0	∞
0	0	0	**FI**
∞	∞	**FI**	∞

Limite de $\frac{u}{v}$

u \ v	$l' \neq 0$	0	∞
$l \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	∞	0
0	0	**FI**	0
∞	∞	∞	**FI**

c. Théorèmes de comparaison

Theorème (des gendarmes)**.** *Soit u, v et w des fonctions définies sur un intervalle I contenant $a \in \mathbf{R}$.*
Si $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$ au voisinage de a et si $\lim_{x \to a} u(x) = \lim_{x \to a} w(x) = l$, alors $\lim_{x \to a} v(x) = l$.

Theorème. *Soit u et v des fonctions définies sur un intervalle I contenant $a \in \mathbf{R}$.*
Si $u(x) \leq v(x)$ au voisinage de a et si $\lim_{x \to a} u(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} v(x) = +\infty$.

d. Suites arithmétiques et géométriques

Si u est une **suite arithmétique** de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r \\ u_n &= u_0 + nr \\ u_0 + u_1 + \ldots + u_n &= (n+1)\tfrac{u_0+u_n}{2} \end{aligned}$$

Si u est une **suite géométrique** de premier terme u_0 et de raison q, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n q \\ u_n & = & u_0 q^n \\ u_0 + u_1 + \ldots + u_n & = & u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \ (q \neq 1) \end{array}$$

e. Théorèmes sur les suites

Theorème (des gendarmes)**.** *Soit u, v et w des suites définies sur $\mathbf{N}$.*
Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Theorème. *Soit u et v des suites définies sur $\mathbf{N}$.*
Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Theorème (de la limite monotone)**.**
- *Une suite croissante et majorée converge*
- *Une suite décroissante et minorée converge*

Theorème (des suites adjacentes)**.** *Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.*

f. Propriétés algébriques des fonctions logarithmes et exponentielles

Pour tous réels strictement positifs a et b,

$$\begin{array}{rcl} \ln(ab) & = & \ln a + \ln b \\ \ln(\frac{a}{b}) & = & \ln a - \ln b \\ \ln(a^n) & = & n \ln a,\ n \in \mathbf{Q} \end{array}$$

Pour tous réels a et b,

$$\begin{array}{rcl} e^{a+b} & = & e^a e^b \\ e^{a-b} & = & \frac{e^a}{e^b} \\ (e^a)^b & = & e^{ab} \end{array}$$

g. Equations différentielles

Pour tous réels a et b avec $a \neq 0$, les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a},\ C \in \mathbf{R}$$

4. Probabiltés

a. Espérance, variance et écart-type

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{E}(X) & = & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ \mathbf{V}(X) & = & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \mathbf{E}(x)^2 \\ \sigma(X) & = & \sqrt{\mathbf{V}(X)} \end{array}$$

b. Lois classiques

loi	définition	espérance	variance
$\mathcal{B}(p)$	$\mathbf{P}(X=1)=p$ et $\mathbf{P}(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
$\mathcal{B}(n,p)$	$\mathbf{P}(X=k)=\mathcal{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $k\in\{0,\dots,n\}$	np	$np(1-p)$
$\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbf{P}(X\leq c)=\int_0^c \lambda e^{-\lambda t}\,dt$, $c\geq 0$		

5. Géométrie

a. Barycentre

Définition. *On dit que G est barycentre de $\Big\{(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)\Big\}$ avec $\alpha_1+\ldots+\alpha_n\neq 0$ si*

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$$

Theorème (du barycentre partiel)**.** *Soit G le barycentre de $\Big\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),(A_3,\alpha_3)\Big\}$.*
Si $\alpha_1+\alpha_2\neq 0$, alors G est le barycentre de $\Big\{(G',\alpha_1+\alpha_2),(A_3,\alpha_3)\Big\}$ où G' est le barycentre de $\Big\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2)\Big\}$.

b. Produit scalaire

Theorème. *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées dans un repère **orthonormal** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors*

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=xx'+yy'+zz'$$

c. Distance

Distance entre deux points

$$d(A,B)=||\overrightarrow{AB}||=\sqrt{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AB}}$$

Distance entre un point et un plan

Si B est un point de (P) et $\vec{n}$ un vecteur directeur de P, alors

$$d(A,(P))=\frac{|\overrightarrow{AB}\bullet\vec{n}|}{||\vec{n}||}$$

Distance entre deux droites

Si A est un point de D_1, B un point de D_2 et $\vec{n}$ un vecteur normal à D_1 et D_2, alors

$$d((D_1),(D_2))=\frac{|\overrightarrow{AB}\bullet\vec{n}|}{||\vec{n}||}$$