Pour réussir en Terminale S
(obligatoire)

A. RIDARD

Table des matières

Préface

Attention, cet ouvrage ne remplace pas votre cours de Mathématiques mais il vous guidera tout au long de son apprentissage et vous sera d'une aide précieuse lors de vos révisions.

Mode d'emploi

- **Donner du sens aux encadrés**
  Les méthodes exposées ne sont volontairement pas détaillées, leur énoncé est réduit au minimum (pour être appris par cœur). Il convient donc de leur donner du sens à l'aide de votre cours.

- **Faire les exercices**
  Pour illustrer la méthode et vous entraîner, un exercice accompagne la plupart des méthodes.

- **Apprendre par cœur les encadrés**
  A l'écrit ou à l'oral, il faut réagir assez vite devant un énoncé et connaître par cœur les « grandes méthodes » permet le plus souvent de s'en sortir.

Bon courage

Chapitre I

Etudier un signe

1. Pour étudier le signe d'une expression polynômiale ou rationnelle

Factoriser

Exercice 1. Etudier le signe de $x^3 + 3\sqrt{3}x^2 + 9x + 3\sqrt{3}$ sur $\mathbf{R}$.

Abandonner l'inutile

Exercice 2. Etudier le signe de $\frac{(-2x^2+3x+9)(x^2+1)}{(x+1)^2}$ sur $\mathbf{R}\backslash\{-1\}$.

2. Pour étudier le signe d'une expression trigonométrique

a. De la forme $a\sin x + b, a\cos x + b$ ou $a\tan x + b$

Isoler $\sin x, \cos x$ ou $\tan x$ puis utiliser le cercle trigonométrique

Exercice 3. Etudier le signe de $2\cos x + 1$ sur $[-\pi, \pi]$.

b. En général

Utiliser les formules trigonométriques pour se ramener au cas précédent

Exercice 4.

1. Etudier le signe de $-2\sin(-x + \frac{3\pi}{2}) + 1$ sur $[-\pi, \pi]$.
2. Etudier le signe de $\cos 2x + \sin x$ sur $[0, 2\pi]$.

3. Pour étudier le signe d'une expression irrationnelle

Isoler la racine puis élever au carré

Exercice 5. Montrer que $-1 + \sqrt{x^2+1} \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Multiplier par l'expression conjuguée

Exercice 6. Etudier le signe de $x + 5 - \sqrt{x^2+2}$ sur $\mathbf{R}$ (séparer les cas $x + 5 \leq 0$ et $x + 5 > 0$).

4. Pour étudier le signe d'une expression hybride

Utiliser le tableau de variations de la fonction qui va bien

Exercice 7. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin x - x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1. Dresser le tableau de variations de f (les limites ne sont pas demandées).
2. Calculer $f(0)$.
3. En déduire le signe de $\sin x - x$ sur $\mathbf{R}$.

Chapitre II

Construire un tableau de variations

1. Pour étudier la dérivabilité en un point

Revenir à la définition

Exercice 8. Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

2. Pour calculer une dérivée

Utiliser les formules

Exercice 9. En reprenant l'énoncé précédent, déterminer f'.

3. Pour déterminer une limite

Utiliser les règles opératoires

Exercice 10. Etudier le comportement de $\frac{x-5}{x^2-4}$ au voisinage de -2.

Utiliser un théorème de comparaison

Exercice 11.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} x \sin \dfrac{1}{x}$.
2. Montrer que $x^2 \leq xE(x)$ pour tout $x \leq 0$ puis déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} xE(x)$.

4. Pour lever une indétermination avec des polynômes

a. De la forme $\frac{0}{0}$ en un réel a

Factoriser puis simplifier

Exercice 12. Déterminer $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2+x-21}{x^3-27}$.

b. En l'infini

Mettre les termes de plus haut degré en facteur puis simplifier

Exercice 13. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Chapitre III

Après un tableau de variations

1. Pour déterminer l'équation d'une tangente

Utiliser le cours

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 + x$.
Donner une équation de la tangente à $\mathbf{C}_f$ au point d'abscisse 3.

2. Pour montrer qu'une droite est asymptote oblique

Montrer que $f(x) - (ax + b)$ tend vers 0

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{2x^3+x^2+5x+2}{x^2+2}$.
Montrer que la droite $\Delta : y = 2x + 1$ est asymptote à $\mathbf{C}_f$ en l'infini.

3. Pour étudier la position relative de deux courbes

Etudier le signe de $f(x) - g(x)$

Exercice 16. Pour chacun des exercices précédents, étudier la position relative des deux courbes en jeu.

4. Pour étudier une symétrie

Changer de repère puis étudier la parité

Exercice 17. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}\backslash\{3\}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.
Montrer que le point I(3,2) est centre de symétrie de $\mathbf{C}_f$.

5. Pour déterminer l'image d'un intervalle

Interpréter le tableau de variations

Exercice 18. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 1$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. En déduire l'image par f de $]-\infty, -2]$ et $[-2, 3]$.

6. Pour montrer qu'une équation admet une unique solution

Interpréter le tableau de variations

Exercice 19. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \sin x - x + \frac{1}{2}$.

1. Montrer que l'équation $\sin x = x - \frac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α :
   (a) Par balayage.
   (b) Par dichotomie.

Chapitre IV

Raisonnement par récurrence et suites

1. Pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout n

Utiliser un raisonnement par récurrence

Exercice 20. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{1}{5}(x^3+1)$ et u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n),\ n \in \mathbf{N} \end{cases}$.
Montrer que la suite u est bornée par 0 et 1.

2. Pour montrer qu'une suite est arithmétique

Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est constant

Exercice 21. Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n-4}{u_n-1},\ n \in \mathbf{N} \end{cases}$.
Montrer que la suite v définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n-2}$ est arithmétique.

3. Pour montrer qu'une suite est géométrique

Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant à condition que $u_n \neq 0$ pour tout n

Exercice 22. Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+4}{-2u_n+9},\ n \in \mathbf{N} \end{cases}$.
Montrer que la suite v définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = \frac{u_n-1}{u_n-2}$ est géométrique.

4. Pour étudier une suite arithmétique ou géométrique

Utiliser les formules

Exercice 23.

1. Soit u la suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_3 = 7$.
   Calculer $S_n = u_5 + u_6 + \ldots + u_n$ en fonction de n.
2. Soit v la suite géométrique de raison -2 et de premier terme $v_1 = 5$.
   Calculer $S_n = v_3 + v_4 + \ldots + v_n$ en fonction de n.

5. Pour étudier la monotonie d'une suite

a. Quand u_n est une somme

Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

Exercice 24. Etudier le sens de variation de la suite définie sur $\mathbf{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

b. Quand u_n est un produit

Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 à condition que $u_n > 0$ pour tout n

Exercice 25. Etudier le sens de variation de la suite définie sur $\mathbf{N}^*$ par $u_n = \frac{2\times 4\times \ldots \times 2n}{1\times 3\times \ldots \times (2n-1)}$.

c. Quand $u_n = f(n)$

Etudier la monotonie de f

Exercice 26. Etudier le sens de variation de la suite définie sur $\{2, 3, \ldots\}$ par $u_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n-1}$.

d. Quand $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante

Utiliser un raisonnement par récurrence

Exercice 27. Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 8}{2u_n - 9},\ n \in \mathbf{N} \end{cases}$.

1. Montrer que $u_n \in [1, 3]$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. En déduire que u est bien définie.
3. Etudier le sens de variation de u.

6. Pour étudier la convergence d'une suite

Utiliser un théorème de comparaison

Exercice 28. Etudier la limite de la suite définie sur $\mathbf{N}^*$ par $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$.

Utiliser le théorème de la limite monotone

Exercice 29. Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^2 + 2),\ n \in \mathbf{N} \end{cases}$.

1. Montrer que u est bornée par 0 et 1.
2. Montrer que u est décroisssante.
3. En déduire que u converge et déterminer sa limite.

Utiliser le théorème des suites adjacentes

Exercice 30. Soit u et v les suites définies sur $\mathbf{N}$ respectivement par

$$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

1. Montrer que u et v sont des suites adjacentes.
2. Que peut-on en déduire sur leur convergence ?

Chapitre V

Calcul intégral

1. Pour calculer une intégrale

a. Quand la fonction est impaire

Utiliser $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

b. Quand la fonction est paire

Utiliser $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

c. Quand la fonction est périodique

Utiliser $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$ ou $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$

Exercice 31. Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{192\pi}{5}}^{-\frac{182\pi}{5}} \sin^3 x \cos^4 x\,dx$.

d. Quand la fonction est définie par morceaux ou avec une valeur absolue

Utiliser la relation de Chasles

Exercice 32. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x-1|\,dx$.

e. Quand la fonction a une primitive connue

Utiliser cette primitive

Exercice 33.

1. Calculer $\displaystyle\int_{1}^{2} \left(x^2 - 4x + 2 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x+\frac{1}{3}}{(3x^2+2x+1)^3}\,dx$.

f. Quand la fonction n'a pas de primitive connue

Intégrer par parties

Exercice 34. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos x\,dx$.

2. Pour calculer une aire en cm^2

Calculer l'intégrale correspondante puis multiplier par le nombre de cm^2 de l'unité d'aire

Exercice 35. Calculer en cm^2 l'aire comprise entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$, la courbe d'équation $y = x + 1 - \frac{x}{(x^2+3)^2}$ et la droite d'équation $y = x + 1$ avec $||\vec{i}|| = 1$ cm et $||\vec{j}|| = 2$ cm.

3. Pour déduire d'une inégalité avec des x^r, une autre avec des x^{r+1}

Intégrer l'inégalité

Exercice 36. On se propose de montrer que $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.

1. Montrer que $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
2. En déduire l'inégalité souhaitée.

4. Pour étudier une fonction définie par une intégrale

Se laisser guider par l'énoncé

Exercice 37. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrer que g est impaire en calculant $\displaystyle\int_{-x}^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ de deux manières différentes.
2. Etudier les variations de g sur $[0, +\infty[$ et préciser $g(0)$.

Chapitre VI

Logarithmes, exponentielles, puissances et équations différentielles

1. Pour étudier le signe

a. De $a \ln u(x) + b$

Isoler $\ln u(x)$ puis passer à l'exponentielle

Exercice 38. Déterminer le signe de $-3\ln(x+1)+4$ sur $[-1, +\infty[$.

b. De $ae^{u(x)} + b$

Isoler $e^{u(x)}$ puis passer au logarithme

Exercice 39. Déterminer le signe de $2e^{x+2} - 3$ sur $\mathbf{R}$.

c. D'une expression avec des logarithmes (resp. des exponentielles)

Utiliser les propriétés algébriques pour se ramener au cas précédent

Exercice 40.

1. Déterminer le signe de $\ln(x+2) - 2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln 4$ sur $[1, +\infty[$.
2. Déterminer le signe de $-2e^{3x} + 11e^{2x} - 13e^{x} + 4$ sur $\mathbf{R}$.

d. D'une expression hybride

Utiliser le tableau de variations de la fonction qui va bien

Exercice 41. Déterminer le signe de $e^x - x - 1$ sur $\mathbf{R}$.

2. Pour calculer une dérivée

Utiliser les formules

Exercice 42. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{e^x - x}$.

3. Pour lever une indétermination

a. De la forme $\frac{0}{0}$ en un réel a

$$\boxed{\text{Utiliser la limite d'un taux d'accroissement}}$$

Exercice 43.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

b. De la forme $+\infty - \infty$

$$\boxed{\text{Mettre le terme dominant en facteur puis utiliser les croissances comparées}}$$

Exercice 44.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3 - \ln x)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3 - e^x)$.

c. De la forme $\frac{\infty}{\infty}$

$$\boxed{\text{Mettre les termes dominants en facteur puis utiliser les croissances comparées}}$$

Exercice 45. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 - \ln x + \frac{1}{x}}{e^x - x - \ln x}$.

d. De la forme $0 \times \infty$

$$\boxed{\text{Transformer puis utiliser les croissances comparées}}$$

Exercice 46.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 e^{1-x}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+1)e^{-x}$.

4. Pour calculer une intégrale

a. Quand la fonction a une primitive connue

$$\boxed{\text{Utiliser cette primitive}}$$

Exercice 47.

1. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{x-1}\,dx$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^{x^2+1}\,dx$.

b. Quand la fonction est définie par $g(x)\ln[f(x)]$

Intégrer par parties en dérivant $\ln[f(x)]$

Exercice 48.

1. Calculer $\displaystyle\int_1^3 (x^2+x)\ln x\,dx$.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^2 \ln(x+2)\,dx$.

c. Quand la fonction est définie par $P(x)e^{ax+b}$ où $P(x)$ est un polyn non cst

Intégrer par parties en dérivant $P(x)$

Exercice 49. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x)e^{2x}\,dx$.

5. Pour résoudre une équation différentielle

a. De la forme $y' = ay + b$

Utiliser le cours

Exercice 50. On se propose de résoudre $\begin{cases} y' + 2y = 5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

1. Résoudre $y' + 2y = 5$.
2. Déterminer la solution dont la courbe représentative passe par A(0,1).

b. De la forme $y' = ay + b(x)$

Se laisser guider par l'énoncé

Exercice 51. On se propose de résoudre $y' + 2y = e^x + 3$ (E).

1. Résoudre $y' + 2y = 0$ (E').
2. Déterminer a et b de sorte que la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = ae^x + b$ soit solution de (E).
3. Monter que f est solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E').
4. En déduire les solutions de (E).

Chapitre VII

Probabilités

1. Pour dénombrer

a. Quand plusieurs critères sont en jeu dans une population

Utiliser un diagramme

Exercice 52. On considère 130 élèves qui pratiquent au moins une langue dont :
- 70 font de l'espagnol
- 60 font de l'anglais
- 35 font de l'allemand
- 20 font de l'espagnol et de l'anglais
- 15 font de l'anglais et de l'allemand
- 5 font les trois langues

Déterminer le nombre d'élèves qui patiquent uniquement l'espagnol et l'allemand.

b. Quand l'ordre intervient

Utiliser un arbre

Exercice 53. Une urne contient neuf boules numérotées de 1 à 9.
Déterminer le nombre de tirages possibles lorsque l'on extrait trois boules :
1. successivement et sans remise.
2. successivement et avec remise.

c. Quand l'ordre n'intervient pas

Utiliser les combinaisons à condition qu'il n'y ait pas de répétition

Exercice 54.
1. Une urne contient neuf boules numérotées de 1 à 9.
   Déterminer le nombre de tirages possibles lorsque l'on extrait trois boules simultanément.
2. Déterminer le nombre de full au poker.
   Le poker se joue avec un jeu de 32 cartes et un full est une main contenant trois cartes d'une hauteur et deux d'une autre (3 rois et 2 dames par exemple).

2. Pour calculer $\mathbf{P}(A \cup B)$

a. Quand A et B sont incompatibles

Utiliser $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

b. Quand A et B ne sont pas incompatibles

Utiliser $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$

3. Pour calculer $\mathbf{P}(A \cap B)$

a. Quand A et B sont indépendants

Utiliser $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$

b. Quand A et B ne sont pas indépendants

Utiliser $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)$

4. Pour calculer $\mathbf{P}(A)$

a. Sous l'hypothèse d'équiprobabilité

Utiliser $\mathbf{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{nombre\,de\,cas\,favorables}{nombre\,de\,cas\,possibles}$

Exercice 55. On extrait simultanément 3 boules d'une urne contenant 4 boules blanches numérotées de 1 à 4, 5 boules rouges numérotées de 1 à 5 et 3 boules vertes numérotées de 1 à 3.
Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux boules de même couleur.

b. Quand $\mathbf{P}(\overline{A})$ est plus facile à calculer

Utiliser $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A})$

Exercice 56. On reprend l'expérience précédente.
Déterminer la probabilité de tirer au moins une boule numérotée 1.

c. Quand A est lié à un événement B

Utiliser $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B) + \mathbf{P}(\overline{B})\mathbf{P}(A|\overline{B})$

Exercice 57. Dans un atelier :
- 90% des pièces fabriquées sont sans défaut
- 5% des pièces avec défaut passent le test
- 98% des pièces sans défaut passent le test

Déterminer la probabilité qu'une pièce prise au hasard passe le test.

5. Pour calculer $\mathbf{P}(B|A)$ à partir de $\mathbf{P}(A|B)$

Utiliser $\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)}{\mathbf{P}(A)}$

Exercice 58. On reprend l'expérience précédente.
Déterminer la probabilité qu'une pièce ayant passé le test soit défectueuse.

6. Pour donner la loi de X, $\mathbf{E}(X), \mathbf{V}(X)$ et $\sigma(X)$

Construire un tableau et utiliser les formules

Exercice 59. Une urne contient 10 jetons indiscernables au toucher dont :
- 6 portent le numéro 0
- 3 portent le numéro 50
- 1 porte le numéro 200

On mise 20 euros, on extrait simultanément 3 jetons et on empoche la somme en euros.
En notant X le gain algébrique du joueur, déterminer la loi de X, $\mathbf{E}(X), \mathbf{V}(X)$ et $\sigma(X)$.

7. Pour tracer la fonction de répartition de X

Se rappeler qu'il s'agit d'une fonction en escalier

Exercice 60. On reprend l'expérience précédente.
Tracer la fonction de répartition de X.

8. Pour étudier le nombre de succès au terme d'une expérience

Utiliser une loi binomiale

Exercice 61. On considère un dé tétraédrique régulier dont les quatre faces sont numérotées de 0 à 3 et on le jette 5 fois de suite.
En notant X le nombre de fois où la face 0 est cachée, déterminer la loi de X, la probabilité que la face 0 soit cachée exactement 3 fois, $\mathbf{E}(X)$ et $\sigma(X)$.

9. Pour étudier la durée de vie d'un noyau d'un atome

Utiliser une loi de durée de vie sans vieillissement (loi exponentielle)

Exercice 62. La désintégration d'un noyau d'uranium 238 suit la loi de désintégartion de durée de vie sans vieillissement sur $[0, +\infty[$ de paramètre $k = 1,54^{-10}$ désintégration par an.
Déterminer la demi-vie de l'uranium 238 c'est à dire le temps T tel que $\mathbf{P}([0, T]) = \frac{1}{2}$.

Chapitre VIII

Nombres complexes

1. Pour résoudre une équation du second degré dans C

a. Quand $\Delta \geq 0$

Procéder comme dans **R**

b. Quand $\Delta < 0$

Utiliser les formules

Exercice 63. Résoudre dans **C** l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

2. Pour calculer dans C

Utiliser la forme algébrique des nombres complexes

Exercice 64. Résoudre dans **C** le système $\left\{ \begin{array}{rcl} 2ix + y & = & 3 - i \\ x - (1-i)y & = & 1 + i \end{array} \right.$.

Utiliser la forme trigonométrique des nombres complexes

Exercice 65.

1. Ecrire $1 - i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.
2. Ecrire $\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{1-i}$ sous forme trigonométrique.

Utiliser les formules sur les conjugués

Exercice 66. Déterminer les points $M(z)$ tels que $Z = \frac{1+z}{2-z}$ soit réel.

Utiliser les formules sur les modules

Exercice 67. Soit z un nombre complexe différent de i et $z_2 = \frac{2\overline{z}}{\overline{z}+i}$.
Montrer que $|z_2 - 2| = \frac{2}{|z-i|}$.

Utiliser les formules sur les arguments

Exercice 68. On reprend l'énoncé précédent.
Montrer que $arg(z_2 - 2) = -\frac{\pi}{2} - arg(z - i)\,[2\pi]$.

3. Pour élever un nombre complexe à une très grande puissance

Utiliser la formule de Moivre

Exercice 69. Calculer $\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2000}$.

4. Pour exprimer $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

Utiliser la formule de Moivre

Exercice 70. Exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

5. Pour linéariser $\cos^k x$ ou $\sin^k x$

Utiliser les formules d'Euler

Exercice 71. On se propose de calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx$.

1. Linéariser $\sin^4 x$.
2. En déduire l'intégrale souhaitée.

6. Pour étudier une configuration dans un repère donné

Utiliser $AB = \lvert z_B - z_A\rvert$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

Exercice 72. On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = 1 + i\sqrt{3}, z_B = -1 - i \text{ et } z_C = -(2+\sqrt{3}) + i$$

1. Calculer $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

7. Pour déterminer les points $M(z)$ tels que $\frac{az+b}{cz+d}$ vérifie ...

Utiliser la méthode analytique

Exercice 73. On considère les points $A(i)$ et $B(2i)$.
Déterminer les points $M(z)$ tels que $Z = \frac{2z-4i}{iz+1}$ soit réel.

Utiliser la méthode géométrique

Exercice 74. Reprendre l'exercice précédent avec la méthode géométrique.

8. Pour étudier l'action d'une transformation

Utiliser l'expression complexe d'une translation, d'une homothétie ou d'une rotation

Exercice 75. Déterminer l'antécédent du point $A(1+i)$ par la rotation de centre $I(2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

9. Pour caractériser une transformation définie par $z_2 = az + b$

Décider suivant la valeur de a

Exercice 76. Déterminer la transformation du plan qui a pour expression complexe $z_2 = iz + 1 + i$.

Chapitre IX

Géométrie

1. Pour montrer qu'un point est barycentre

Revenir à la définition

Exercice 77. Soit $ABCD$ un tetraèdre, E, F et G les milieux respectifs de $[AB], [AC]$ et $[AG]$, H le centre de gravité de BCD et I le milieu de $[AH]$.
Montrer que I est le centre de gravité de EFG.

Utiliser le théorème du barycentre partiel

Exercice 78. On reprend l'énoncé précédent et l'on introduit J et K les milieux respectifs de $[BD]$ et $[BC]$ et L l'isobarycentre de $ABCD$.

1. Montrer que G, L et K sont alignés.
2. Montrer que (FJ) et (GK) sont concourantes.
3. Montrer que I, E, F et G sont coplanaires.

2. Pour réduire $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \vec{MA_i}$

a. Quand $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0$

Introduire par exemple le point A_1

b. Quand $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \neq 0$

Introduire le barycentre G de $\{(A_1, a_1), \ldots, (A_n, a_n)\}$

Exercice 79.

1. Soit ABC un triangle équilatéral de côté c.
   Déterminer les points M tels que $||2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}|| = ||\vec{MA} - \vec{MB}||$.
2. Soit ABC un triangle et f l'application du plan dans lui-même qui à M associe N tel que

$$\vec{MN} = 2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$$

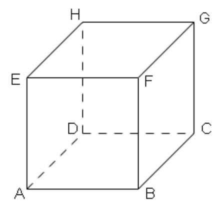
   Déterminer la nature de f.

3. Pour calculer un produit scalaire

a. En géométrie non analytique

Faire apparaître des produits scalaires de vecteurs colinéaires ou orthogonaux

Exercice 80. Calculer $\vec{AG} \bullet \vec{BC}$ en fonction de l'arête a du cube.



b. En géométrie analytique

Utiliser la formule

Exercice 81. Reprendre l'exercice précédent après avoir introduit le repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où

$$\vec{i} = \frac{\vec{AB}}{||\vec{AB}||}, \vec{j} = \frac{\vec{AD}}{||\vec{AD}||} \text{ et } \vec{k} = \frac{\vec{AE}}{||\vec{AE}||}$$

4. Pour caractériser un plan de l'espace

Utiliser un point et un vecteur normal

Exercice 82. *L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct.*
Soit P le plan passant par les points $A(0, 1, 2), B(1, -2, 0)$ et $C(3, 0, 1)$.
Caractériser P à l'aide d'un point et d'un vecteur normal.

Utiliser son équation

Exercice 83. On reprend l'énoncé précédent.
Déterminer l'équation de P.

5. Pour caractériser une droite de l'espace

Utiliser un point et un vecteur directeur

Exercice 84. Soit D la droite définie par $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y - 2z + 5 & = & 0 \\ 2x + y - z + 4 & = & 0 \end{array} \right.$.
Caractériser D à l'aide d'un point et d'un vecteur directeur.

Utiliser une représentation paramétrique

Exercice 85. On reprend l'énoncé précedent.
Caractériser D à l'aide d'une représentation paramétrique.

6. Pour résoudre un problème de parallélisme ou d'orthogonalité

Raisonner avec les vecteurs directeurs des droites et les vecteurs normaux des plans

Exercice 86. *L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct.*

Soit $P : ax + y - 2 = 0$ et D la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = -1 + 2k \\ z = 2 \end{cases}$.

1. Déterminer a pour que P et D soient parallèles.
2. Déterminer a pour que P et D soient orthogonaux.

7. Pour résoudre un problème d'intersection

Raisonner avec les représentations paramétriques des droites et les équations des plans

Exercice 87. Soit $P : x + y + z = 0$, $P' : x + 2y + z = 0$ et D la droite passsant par $A(1, -2, 1)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'intersection entre P et D.
2. Déterminer l'intersection entre P' et D.

8. Pour calculer une distance

Se ramener à la distance entre deux points, entre un point et un plan ou entre deux droites.

Exercice 88. *L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct.*
Déterminer la distance entre le point $A(0, 3, -1)$ et la droite D définie par $\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ y &= 2 \end{cases}$.

Bibliographie

[Cle] B. CLEMENT, *METHOD'S*, Ellipses, 2003