

# Probabilités

## Cours 1 - Calcul probabiliste

A. Ridard



## A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante :  
[anthony.ridard@univ-ubs.fr](mailto:anthony.ridard@univ-ubs.fr)

# Plan du cours

- 1 Probabilités
  - Un peu de vocabulaire pour commencer
  - Notion de probabilité
  
- 2 Probabilités conditionnelles et indépendance
  - Notion de probabilité conditionnelle
  - Événements indépendants

- 1 Probabilités
- 2 Probabilités conditionnelles et indépendance

- 1 Probabilités
  - Un peu de vocabulaire pour commencer
  - Notion de probabilité
  
- 2 Probabilités conditionnelles et indépendance
  - Notion de probabilité conditionnelle
  - Événements indépendants

Une **expérience** est dite **aléatoire**<sup>1</sup> lorsque son résultat n'est pas connu à l'avance. On note alors  $\Omega$  l'ensemble des résultats possibles appelé **univers**.

Dans ce cours, sauf mention contraire,  $\Omega$  désignera un ensemble fini  $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ .

---

1. En opposition avec déterministe

La théorie des probabilités s'appuie sur la théorie des ensembles mais sa terminologie est spécifique :

- L'ensemble des parties de  $\Omega$  est notée  $\mathcal{P}(\Omega)$  et ses éléments sont appelés des **événements**.

On dit alors que le couple  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  est un **espace probabilisable**

- Si  $A$  est un événement,  $\bar{A}$  est l'**événement contraire** de  $A$
- $\Omega$  est l'**événement certain** et  $\emptyset$  l'**événement impossible**
- Deux **événements**  $A$  et  $B$  sont **incompatibles** si  $A \cap B = \emptyset$
- Un **système complet d'événements** est une partition de  $\Omega$  c'est à dire une famille<sup>2</sup>  $(A_1, \dots, A_n)$  d'événements :
  - possibles :  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, A_i \neq \emptyset$
  - incompatibles deux à deux :  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
  - décrivant tout l'univers :  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$

---

2. En fait, la notion de famille est plus générale car elle autorise une infinité dénombrable d'événements, mais cela sort du cadre de ce cours

- 1 Probabilités
  - Un peu de vocabulaire pour commencer
  - Notion de probabilité
  
- 2 Probabilités conditionnelles et indépendance
  - Notion de probabilité conditionnelle
  - Événements indépendants



### Définition (Probabilité)

Une probabilité sur un espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  est une application  $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  vérifiant :

- $P(\Omega) = 1$
- Si  $A$  et  $B$  sont des événements incompatibles, alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  (additivité)



On dit alors que le triplet  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  est un espace probabilisé.

### Définition (Probabilité uniforme)

On appelle probabilité uniforme l'application :

$$P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

$$A \mapsto P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$



### Il existe d'autres probabilités

La probabilité uniforme est utilisée uniquement lorsque tous les résultats possibles sont équiprobables

## Propriétés élémentaires

- $P(\emptyset) = 0$
- Si  $A$  est un événement, alors  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Pour tout événement  $A$  et  $B$ , on a :
  - $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si  $A_1, \dots, A_n$  sont des événements incompatibles deux à deux, alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

- 1 Probabilités
- 2 Probabilités conditionnelles et indépendance

## 1 Probabilités

- Un peu de vocabulaire pour commencer
- Notion de probabilité

## 2 Probabilités conditionnelles et indépendance

- Notion de probabilité conditionnelle
- Événements indépendants

### Définition (Probabilité conditionnelle)

Soit  $B$  un événement réalisable c'est à dire vérifiant  $P(B) \neq 0$ .  
On appelle probabilité conditionnelle sachant  $B$  l'application :

$$\begin{aligned} P_B: \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0,1] \\ A &\mapsto P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{aligned}$$



- $P_B$  est une probabilité !
- Si  $P(B) = 0$ , on convient de poser  $P(A|B) = 0$

## Formule des probabilités composées

Si  $A$  et  $B$  sont des événements, alors  $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ .

### Généralisation :

- Si  $A, B, C$  sont des événements, alors  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$
- Si  $A_1, \dots, A_n$  sont des événements, alors  

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$



Une urne contient  $n$  boules blanches et  $n$  boules rouges.

On tire successivement et sans remise  $n$  boules dans cette urne.

On note  $A_k$  l'événement « la boule obtenue lors du  $k$ -ième tirage est blanche ».

Déterminer la probabilité qu'une boule rouge figure dans ce tirage en mesurant l'événement contraire.

*On pourra étudier les cas  $n = 2$  et  $n = 3$  avant de répondre dans le cas général.*

## Formule des probabilités totales

Soit  $A$  un événement de sorte que la famille  $(A, \bar{A})$  soit un système complet d'événements<sup>a</sup>.

Si  $B$  est un événement<sup>b</sup>, alors  $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$ .

### Généralisation :

- Soit  $(A_1, A_2, A_3)$  un système complet d'événements.

Si  $B$  est un événement, alors

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$

- Soit  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements.

Si  $B$  est un événement, alors 
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$$

---

a. Si ce n'est pas le cas ( $A$  impossible ou certain), ce conditionnement n'aurait pas d'intérêt !

b. dont la réalisation "dépend" de celle de  $A$



## Problème de Monty Hall

Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur). Ce joueur est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture (ou tout autre prix magnifique) et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre (ou tout autre prix sans importance). Il doit tout d'abord désigner une porte. Puis le présentateur doit ouvrir une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début). Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte.

Que doit faire le candidat ? Quelles sont ses chances de gagner la voiture en agissant au mieux ?

**Indice** : on pourra considérer  $G$  l'événement « le joueur gagne la voiture » et  $B$  celui « le joueur avait choisi la bonne porte », puis calculer  $P(G)$  si le joueur change de porte, et sinon.





On dispose de six urnes numérotées de 1 à 6.

L'urne numéro  $k$  comporte  $k$  boules blanches et une boule rouge.

Un joueur lance un dé équilibré puis choisit une boule dans l'urne correspondant au résultat du dé.

On note  $A_k$  l'événement « le dé donne la valeur  $k$  » et  $B$  l'événement « la boule tirée est blanche ».

Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.

## Formule de Bayes

Soit  $A$  un événement de sorte que la famille  $(A, \bar{A})$  soit un système complet d'événements.

Si  $B$  est un événement réalisable, alors

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}.$$

### Généralisation :

Soit  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements.

Si  $B$  est un événement réalisable, alors pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}.$$



La formule de Bayes est utile pour les raisonnements « rétroactifs ». Si on sait mesurer la conséquence  $B$  d'un événement  $A$  et que l'on sait l'événement  $B$  réalisé, la formule de Bayes permet de savoir si l'événement  $A$  l'a été. On parle parfois de la formule de probabilité des causes.



Une urne contient deux dés : l'un est équilibré et l'autre donne systématiquement un 6.

On choisit un dé dans l'urne et on le lance.

On note  $A$  l'événement « le dé choisi est équilibré » et  $B$  l'événement « le dé lancé donne un 6 ».

En supposant que le dé lancé donne un 6, déterminer la probabilité que ce dé soit équilibré.



## Problème de Monty Hall

On se propose ici de résoudre le problème de Monty Hall d'une autre manière.

On considère  $F_i$  l'événement « la voiture est derrière la porte  $i$  » et  $O_j$  celui « le présentateur ouvre la porte  $j$  ».

Pour fixer les idées, sans perdre de généralité<sup>a</sup>, on peut supposer que le joueur ait choisi la porte 1, et le présentateur ouvert la porte 2.

**Indice :** Calculer  $P(F_1|O_2)$  et  $P(F_3|O_2)$ , puis conclure<sup>b</sup>.

a. Les calculs seraient les mêmes dans les autres cas

b. Le joueur peut évaluer les probabilités de  $F_1$  et  $F_3$  avec une information supplémentaire

## 1 Probabilités

- Un peu de vocabulaire pour commencer
- Notion de probabilité

## 2 Probabilités conditionnelles et indépendance

- Notion de probabilité conditionnelle
- Événements indépendants

### Définition (Indépendance de deux événements)

On dit que deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$



- Soit  $B$  un événement réalisable. Alors,  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $P(A|B) = P(A)$  autrement dit, savoir que  $B$  est réalisé n'apporte rien!
- Si  $A$  et  $B$  sont des événements indépendants, alors  $A$  et  $\bar{B}$  le sont aussi, tout comme  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ .



- ① On lance deux fois un dé équilibré.  
Les événements  $A$  : « le premier lancer donne un six » et  $B$  : « le second lancer donne un six » sont-ils indépendants?
- ② On tire successivement sans remise deux boules dans une urne contenant 5 boules blanches et 2 boules rouges.  
Les événements  $A$  : « la première boule tirée est blanche » et  $B$  : « la seconde boule tirée est blanche » sont-ils indépendants?
- ③ Même question avec un tirage successif avec remise.



### Ne pas confondre indépendance et incompatibilité

D'après le tableau suivant, dans quel(s) cas les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants?

	$P(A)$	$P(B)$	$P(A \cup B)$
cas 1	0.1	0.9	0.91
cas 2	0.4	0.6	0.76
cas 3	0.5	0.3	0.8

### Définition (Indépendance mutuelle d'événements)

On dit que les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont mutuellement indépendants si pour tout  $J$  finie  $a \subset \{1, \dots, n\}$ , on a :

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

a. Inutile ici, mais permet de généraliser la définition à une infinité dénombrable d'événements



### Ne pas confondre indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

On lance deux dés discernables et l'on considère les événements :

- $A$  : « le premier dé lancé donne un résultat pair »
- $B$  : « le second dé lancé donne un résultat pair »
- $C$  : « la somme des deux dés est paire »

Montrer que les événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.