Probabilités
Cours 2 - Variables aléatoires finies

A. Ridard

École d'ingénieurs ensibs
Université Bretagne Sud

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

Plan du cours

Définition (Variable aléatoire)

Une variable aléatoire (v.a.) est une application mesurable [a] $X : \Omega \to X(\Omega)$ où $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ désigne l'ensemble des valeurs prises par X.

a. Cette notion de la théorie de la mesure ne sera évidemment pas détaillée ici. En gros, elle assure de pouvoir mesurer la probabilité de tout événement sur $X(\Omega)$ à l'aide de la probabilité P définie sur Ω

- L'appellation variable aléatoire est usuelle bien que malheureuse. En effet, X n'est pas une variable, mais bien une fonction et celle-ci n'est pas aléatoire, mais plutôt déterministe. Ce sont les valeurs prises par X qui correspondent à des quantités qui vont varier selon le résultat de l'expérience aléatoire.
- Il est tout à fait possible d'utiliser une v.a. $X : \Omega \to X(\Omega)$ sans préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$.
  C'est même ce qui fait la force de cet objet en le rendant très pratique !

Somme de deux dés équilibrés

On note X la v.a. représentant la somme de deux dés équilibrés.

Compléter la définition suivante :

$$X : \begin{array}{ccc} \dots & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longmapsto & \dots \end{array}$$

Définition (Loi de probabilité)

On appelle loi d'une v.a. $X : \Omega \to X(\Omega)$, l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{P}_X : & \mathscr{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathrm{P}_X(A) = \mathrm{P}(X^{-1}(A)) = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}) = \mathrm{P}(X \in A) \end{array}$$

- P_X est une probabilité !
- L'existence de $\mathrm{P}(X^{-1}(A))$ est assurée par la mesurabilité de X
- La dernière égalité fournit une notation très pratique

Somme de deux dés équilibrés - suite

Calculer la probabilité que la somme soit inférieure ou égale à 3 c'est à dire $\mathrm{P}_X(\{2,3\}) = \mathrm{P}(X \in \{2,3\}) = \mathrm{P}(X \leq 3)$.

Détermination d'une loi de probabilité

La loi d'une v.a. $X : \Omega \to X(\Omega)$ est entièrement déterminée par :

- les valeurs possibles : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$
- pour chacune des valeurs possibles, la probabilité associée : $\forall i \in \{0, \ldots, N\},\ p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$

Une telle loi est souvent présentée à l'aide d'un tableau :

Valeurs possibles x_i	x_0	x_1	$\ldots$	x_N
Probabilités associées p_i	p_0	p_1	$\ldots$	p_N

Bien entendu, on a : $\sum_{i=0}^{N} p_i = 1$.

Elle est représentée graphiquement par un diagramme en bâtons

Somme de deux dés équilibrés - suite

1. Déterminer la loi de X à l'aide d'un tableau.
2. Représenter graphiquement cette loi.
3. Calculer $P(X \leq 3)$.

Définition (Fonction de répartition)

La fonction de répartition d'une v.a. $X : \Omega \to X(\Omega)$ est définie par :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathrm{P}(X \le x) = \sum\limits_{i \mid x_i \le x} p_i \end{array}$$

- Elle est représentée graphiquement par une fonction en escalier où la marche x_i est de hauteur p_i
- Elle est croissante, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$
- Elle est continue à droite
- Cette notion est fondamentale pour simuler des lois à l'aide d'un ordinateur

Somme de deux dés équilibrés - suite

1. Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
2. Retrouver, graphiquement, $\mathrm{P}(X \le 3)$.

Caractérisation d'une loi de probabilité

La loi d'une v.a. est caractérisée par sa fonction de répartition :

- Les valeurs possibles x_i sont les points de discontinuité (à gauche) de F
- Les probabilités associées p_i sont déterminées par :

$$p_i = \mathrm{P}(X = x_i) = \mathrm{P}(X \leq x_i) - \mathrm{P}(X \leq x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

pour $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $p_0 = F(x_0)$.

Somme de deux dés équilibrés - suite

A partir du graphique précédent, retrouver la loi de X.

Définition (Espérance)

On appelle espérance de X le réel défini par $E(X) = \sum_{i=0}^{N} x_i p_i$.

- C'est la moyenne des valeurs possibles pondérées par les probabilités associées
- Les différentes valeurs possibles se répartissent autour de $E(X)$ qui est un indicateur de tendance centrale
- Lorsque $E(X) = 0$, on dit que X est centrée
- Si X est constante égale à c, alors $E(X) = c$

Somme de deux dés équilibrés - suite

Déterminer l'espérance de X.

Linéarité

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.
En particulier, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $E(aX + b) = aE(X) + b$.

- L'espérance d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des espérances
- La v.a. $X - E(X)$ est centrée

Somme de deux dés équilibrés - suite

On considère que la somme obtenue X permet, à chaque élève d'une classe de CE1 lançant les deux dés, de gagner Y Smarties, égal au double de la somme augmenté de un (petit jeu de fin d'année organisé par une maîtresse pour faire calculer mentalement ses élèves).

Déterminer le gain moyen qui permettra à cette maîtresse d'une classe de 30 élèves de prévoir [a] le bon nombre de Smarties.

a. cette prévision repose sur la loi forte des grands nombres qui sera vue dans un prochain module

Théorème du transfert

Soit g une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$.

L'espérance de la v.a. $g(X)$ est alors $E(g(X)) = \sum_{i=0}^{N} g(x_i)p_i$.

Somme de deux dés équilibrés - suite

Déterminer l'espérance de X^2.

Définition (Variance et écart-type)

On appelle variance de X le réel (positif) défini par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{i=0}^{N} (x_i - E(X))^2 p_i.$$

On définit aussi son écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

- La variance et l'écart-type permettent de mesurer la dispersion de X autour de sa moyenne
- Si X se comprend avec une unité, l'espérance et l'écart-type s'expriment avec la même unité
- Lorsque $V(X) = 1$, on dit que X est réduite
- Si X est constante égale à c, alors $V(X) = 0$
- Pour calculer une variance, on préférera la formule suivante

Pourquoi choisir de mesurer la dispersion de X autour de sa moyenne à l'aide de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne (variance), plutôt qu'à l'aide de la moyenne des écarts à la moyenne ?

Formule de Huygens

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$$

Démontrer cette formule.

Somme de deux dés équilibrés - suite

Déterminer, à l'aide de cette formule, la variance de X.

Changement affine

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $V(aX+b) = a^2 V(X)$

La v.a. $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite

Somme de deux dés équilibrés - suite et fin

Déterminer l'écart-type de $Y = 2X + 1$.

Définition (Loi uniforme)

On dit que X suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$, et l'on note $X \sim \mathscr{U}_{\{1,\dots,n\}}$ si :

- $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$
- $\forall k \in \{1, \dots, n\},\ \mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{n}$

La loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ modélise une situation d'équiprobabilité.

Espérance et variance

Si $X \sim \mathcal{U}_{\{1,\dots,n\}}$, alors :

- $E(X) = \frac{n+1}{2}$
- $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

1. Démontrer la formule de l'espérance.
2. En admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, démontrer la formule de la variance.

On lance un dé équilibré et on considère X la v.a. égale au résultat obtenu.

1. Reconnaître la loi de X.
2. Représenter graphiquement la loi et la fonction de répartition de X.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Définition (Loi de Bernoulli)

On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, et l'on note $X \sim \mathscr{B}(p)$ si :

- $X(\Omega) = \{0,1\}$
- $\mathrm{P}(X=1) = p$ et $\mathrm{P}(X=0) = 1-p = q$

La loi de Bernoulli de paramètre p modélise une expérience aléatoire à deux issues possibles (succès noté 1 et échec noté 0) de probabilité de succès p.

Espérance et variance

Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors :

- $E(X) = p$
- $V(X) = p(1-p)$

Démontrer ces deux formules.

On lance une pièce équilibrée et on considère X la v.a. égale à 1 si on obtient pile et 0 sinon.

1. Reconnaître la loi de X.
2. Représenter graphiquement la loi et la fonction de répartition de X.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Définition (Loi binomiale)

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p, et l'on note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ si :

- $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$
- $\forall k \in \{0, \dots, n\},\ \mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

La loi binomiale de paramètres n et p modélise le nombre de succès à l'issue de n répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire à deux issues possibles de probabilité de succès p.

Espérance et variance

Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors :

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$

On lance 10 fois une pièce équilibrée et on considère X la v.a. égale au nombre de piles obtenus.

1. Reconnaître la loi de X.
2. Représenter graphiquement la loi et la fonction de répartition de X.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins 2 piles.

Définition (v.a. indépendantes)

Les v.a. X et Y sont indépendantes si pour tout $(i,j) \in \{0,\ldots,N_X\} \times \{0,\ldots,N_Y\}$, on a :

$$\mathrm{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = \mathrm{P}(X = x_i)\mathrm{P}(Y = y_j)$$

- En s'inspirant de l'indépendance mutuelle d'une famille d'événements, on définit l'indépendance mutuelle d'une famille [a] de v.a. : elle exprime alors le fait que la probabilité de n'importe quelle intersection construite à partir des v.a. coïncide avec le produit des probabilités
- Comme pour les événements, des v.a. deux à deux indépendantes ne sont pas, en général, mutuellement indépendantes

a. Cette notion sera surtout utilisée avec des suites de v.a.

Variance d'une somme

Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Généralisation :

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes deux à deux, alors $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

Faux en général

En fait, $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$
où $Cov(X,Y) = E\Big((X - E(X))(Y - E(Y))\Big)$ désigne la covariance [a] de X et Y.

a. cette notion sera vue dans un prochain module

On considère $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi, la loi $\mathscr{B}(p)$.
On note $X = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de X.
2. Reconnaître la loi de X.
3. Quel résultat du cours vient-on de démontrer ?