Probabilités
Cours 3 - Couples de variables aléatoires finies

A. Ridard

École d'ingénieurs
ensibs
Université Bretagne Sud

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

Plan du cours

1. Loi conjointe
2. Lois marginales
3. Lois conditionnelles
4. Espérance et variance

On considère $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux v.a. finies telles que $X(\Omega) = \{x_i | i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j | j \in J\right\}$ avec I et J finis.

1. Loi conjointe
2. Lois marginales
3. Lois conditionnelles
4. Espérance et variance

Définition (Couple de v.a.)

Le couple (X, Y) représente la variable aléatoire (vectorielle), que l'on notera plus simplement $\mathbf{Z}$, définie par :

$$\mathbf{Z} = (X, Y) : \begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & E \times F \\ \omega & \mapsto & \mathbf{Z}(\omega) = \big(X(\omega), Y(\omega)\big) \end{array}$$

$\mathbf{Z}(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ mais l'autre inclusion n'est pas toujours vraie.

Définition (Loi conjointe)

On appelle loi conjointe de (X, Y) la loi de $\mathbf{Z}$.

- Elle est entièrement déterminée par la connaissance de $\mathrm{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)$ pour tout $\Big(x_i, y_j\Big) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
- Elle est souvent présentée à l'aide d'un tableau.

Une urne comporte 2 boules blanches, 1 rouge et 1 noire.
On tire simultanément deux boules de cette urne.
On note X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules noires tirées.

1. Compléter le tableau de la loi conjointe de (X, Y) :

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 0$			
$Y = 1$			

2. Que vaut la somme des cases ?
3. A-t-on $\mathbf{Z}(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$ où $\mathbf{Z} = (X, Y)$?

1. Loi conjointe
2. Lois marginales
3. Lois conditionnelles
4. Espérance et variance

Définition (Lois marginales)

On appelle lois marginales de (X,Y) la loi de X et celle de Y.

Détermination des lois marginales

La loi conjointe détermine entièrement les lois marginales :

- $\forall i \in I,\ \mathrm{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathrm{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)$
- $\forall j \in J,\ \mathrm{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)$

Suite

Augmenter le tableau de la loi conjointe avec les lois marginales :

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	P_Y
$Y = 0$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	
$Y = 1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	
P_X				

Les lois marginales ne suffisent pas à déterminer la loi conjointe

	$X=0$	$X=1$	P_Y
$Y=0$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$Y=1$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
P_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

	$X=0$	$X=1$	P_Y
$Y=0$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$Y=1$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
P_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

1. Loi conjointe
2. Lois marginales
3. Lois conditionnelles
4. Espérance et variance

Définition (Lois conditionnelles)

On appelle loi conditionnelle de Y sachant $X = x_i$, la loi de Y pour la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(.|X = x_i)$, autrement dit chaque valeur possible y_j de Y est associée à $\mathrm{P}\left(Y = y_j | X = x_i\right)$.

Suite

Compléter le tableau des lois conditionnelles de Y :

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$\mathrm{P}(Y = 0 \mid X = x_i)$			
$\mathrm{P}(Y = 1 \mid X = x_i)$			

1. Loi conjointe
2. Lois marginales
3. Lois conditionnelles
4. Espérance et variance

Définition (Espérance de $\mathbf{Z}$)

L'espérance du couple $\mathbf{Z} = (X, Y)$ est le couple des espérances :

$$E(\mathbf{Z}) = E((X, Y)) = (E(X), E(Y))$$

- $E(\mathbf{Z})$ est un vecteur (couple) que l'on confond parfois avec sa matrice colonne (cf.ci-dessous)
- Plus généralement, l'espérance d'une matrice est la matrice des espérances (cf. ci-dessous)

Suite

Déterminer $E(\mathbf{Z})$.

Définition (Variance de $\mathbf{Z}$)

La variance du couple $\mathbf{Z} = (X, Y)$ est définie par :

$$V(\mathbf{Z}) = E\Big((\mathbf{Z} - E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z} - E(\mathbf{Z}))^t\Big) = \begin{pmatrix} E\Big((X - E(X))(X - E(X))\Big) & E\Big((X - E(X))(Y - E(Y))\Big) \\ E\Big((Y - E(Y))(X - E(X))\Big) & E\Big((Y - E(Y))(Y - E(Y))\Big) \end{pmatrix}$$

En définissant la covariance de X et Y par :

$$Cov(X, Y) = E\Big((X - E(X))(Y - E(Y))\Big)$$

on obtient :

$$V(\mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} V(X) & Cov(X, Y) \\ Cov(Y, X) & V(Y) \end{pmatrix}$$

$V(\mathbf{Z})$ est une matrice appelée, d'après la remarque précédente, matrice de variance-covariance.

- On a évidemment $Cov(X,Y) = Cov(Y,X) = E(XY) - E(X)E(Y)$ donc $V(\mathbf{Z})$ est une matrice symétrique
- Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ donc $Cov(X,Y) = 0$ et donc $V(\mathbf{Z})$ est une matrice diagonale

Suite

Déterminer $V(\mathbf{Z})$.

Définition (Espérance conditionnelle de Y sachant $X = x_i$)

On appelle espérance conditionnelle de Y sachant $X = x_i$, l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $X = x_i$:

$$E(Y|X = x_i) = \sum_{j \in J} y_j \mathrm{P}(Y = y_j | X = x_i)$$

Suite

- Déterminer $E(Y|X = 0), E(Y|X = 1)$ et $E(Y|X = 2)$.

Définition (Espérance conditionnelle de Y sachant X)

On appelle espérance conditionnelle de Y sachant X, la v.a. $E(Y|X)$ dont les valeurs possibles sont les $E(Y|X = x_i)$ de probabilité associée $\mathrm{P}(X = x_i)$.

Suite

Déterminer la loi de la v.a. $E(Y|X)$.

$E(Y|X)$ est une variable aléatoire vérifiant :

- $E\Big(E(Y|X)\Big) = E(Y)$
- $V\Big(E(Y|X)\Big) \leq V(Y)$

Suite et fin

Observer ces deux résultats sur notre exemple.

Cette section peut se généraliser à des vecteurs $(X_1, \ldots, X_n)$ de v.a. finies et même dénombrables ou réelles continues !