Probabilités

TD 1 - Calcul probabiliste

A. Ridard

Exercice 1.
On considère une urne contenant 8 boules blanches et 6 boules rouges, indiscernables au toucher.

1. On tire, successivement et avec remise, 5 boules.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir, dans cet ordre, 3 blanches et 2 rouges.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir, peu importe l'ordre, 3 blanches et 2 rouges.

2. On tire, successivement et sans remise, 5 boules.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir, dans cet ordre, 3 blanches et 2 rouges.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir, peu importe l'ordre, 3 blanches et 2 rouges.

3. On tire, simultanément, 5 boules.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir 3 blanches et 2 rouges.
   (b) Comparer le résultat précédent avec celui obtenu à la question 2.(b), puis commenter.
   (c) Calculer la probabilité d'obtenir des boules pas toutes de la même couleur.

Exercice 2.
Un joueur est en présence de deux urnes A et B :

- l'urne A contient une boule blanche et trois boules rouges
- l'urne B contient trois boules blanches et une boule rouge

Ce joueur dispose de deux dés non pipés qu'il lance une fois :

- si la somme des points obtenus est inférieure ou égale à 7, il choisit l'urne A
- sinon, il choisit l'urne B

Il tire alors, dans l'urne choisie, deux boules successivement avec remise.

On notera :

- A (respectivement B) l'événement « choisir l'urne A (respectivement B) »
- R_2 (respectivement R_0) l'événement « tirer deux boules rouges (respectivement blanches) »

1. Lors du lancer des deux dés, onze sommes sont possibles, la probabilité que ce soit 8 vaut-elle alors $\frac{1}{11}$?
2. Déterminer la probabilité de choisir l'urne B.
3. Déterminer la probabilité de tirer deux boules rouges.
4. Ayant tiré deux boules rouges, déterminer la probabilité que les tirages aient été effectués dans l'urne A.
5. Ayant tiré deux boules rouges, déterminer la probabilité que les tirages aient été effectués dans l'urne B.
6. Ayant tiré deux boules blanches, déterminer la probabilité que les tirages aient été effectués dans l'urne B.

Exercice 3 (Algorithme de détection)**.**
Un professeur met au point un algorithme qui détecte si un étudiant a répondu au hasard lors d'un contrôle programmé quelques jours à l'avance. Son expérience lui permet d'estimer à 20% le pourcentage d'étudiants répondant au hasard.
Son algorithme affirme, correctement, que l'étudiant a répondu au hasard dans 95% des cas.
Il affirme cependant, incorrectement, que l'étudiant a répondu au hasard dans 2% des cas.

On pourra considérer les événements suivants :

- *H : « l'étudiant a répondu au hasard »*
- *T : « l'algorithme affirme que l'étudiant a répondu au hasard »*

1. Avec quelle probabilité l'algorithme affirme-t-il que l'étudiant a répondu au hasard ?
2. Quelle est la probabilité qu'un étudiant ait répondu au hasard lorsque l'algorithme l'affirme ?
3. Quelle est la probabilité qu'un étudiant n'ait pas répondu au hasard alors que l'algorithme l'affirme ?
4. Quelle est la probabilité qu'un étudiant ait répondu au hasard alors que l'algorithme ne l'affirme pas ?

Exercice 4 (Paquet perdu)**.**
L'envoi d'un paquet du serveur S_1 au serveur S_2 sur internet passe par deux routeurs intermédiaires R_1 et R_2.
Le chemin est alors constitué de 3 arcs : $a_1 = (S_1, R_1)$, $a_2 = (R_1, R_2)$ et $a_3 = (R_2, S_2)$:

$$\boxed{S_1} \xrightarrow{a_1} \boxed{R_1} \xrightarrow{a_2} \boxed{R_2} \xrightarrow{a_3} \boxed{S_2}$$

Une fois atteint, chaque arc a le même risque p de perdre un paquet.

On considère les événements suivants :

- A_i : « le paquet a bien passé a_i »
- L_i : « le paquet a été perdu au niveau de a_i »
- L : « le paquet a été perdu »

1. Déterminer $\mathrm{P}(L_1)$.
2. Montrer que $\mathrm{P}(L_2) = (1-p)p$.
3. Déterminer $\mathrm{P}(L)$.
4. Déterminer $\mathrm{P}(L_i|L)$.
5. Interpréter les graphiques ci-dessous qui représentent, en fonction de p, respectivement $\mathrm{P}(L)$ et $\mathrm{P}(L_i|L)$: