# Probabilités

## TD 3 - Couples de v.a. finies

A. Ridard

**Exercice 1.**
On considère le couple $\mathbf{Z} = (X, Y)$ dont la loi conjointe est définie par :

| | $Y=0$ | $Y=1$ | $Y=2$ |
|---|---|---|---|
| $X=-1$ | $a$ | $2a$ | $a$ |
| $X=0$ | $3a$ | $0$ | $a$ |
| $X=1$ | $0$ | $a$ | $a$ |

1. Déterminer $a$.
2. Déterminer les lois marginales.
3. En déduire $E(\mathbf{Z})$.
4. Les v.a. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer les lois conditionnelles.
6. En déduire les lois de $E(Y|X)$ et $E(X|Y)$.
7. On note $S = X + Y$ et $T = XY$.
   (a) Calculer $E(S)$.
   (b) Déterminer la loi de $T$.
   (c) En déduire $Cov(X, Y)$, $V(S)$ et $V(\mathbf{Z})$.

**Exercice 2.**
À un péage autoroutier $n$ voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note $X_1, X_2, X_3$ les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

1. Déterminer la loi de $X_1$.
2. Calculer les variances de $X_1$, $X_2$ et $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de $X_1$ et $X_2$.

**Exercice 3.**
Un étudiant résout un QCM constitué de 5 questions offrant chacune quatre réponses possibles.
Pour chaque question, et indépendamment les unes des autres, il a la probabilité $p$ de savoir résoudre celle-ci.
Si en revanche il ne sait pas résoudre la question, il choisit au hasard l'une des quatre réponses possibles.

On considère :

- $X$ le nombre de questions qu'il savait résoudre
- $Y$ le nombre de questions qu'il a correctement résolues au hasard
- $Z = X + Y$

1. Que désigne $Z$.
2. Déterminer la loi de $X$.
3. Déterminer les lois conditionnelles de $Y$.
4. En déduire que $Z \sim \mathscr{B}\left(5, \frac{3}{4}p + \frac{1}{4}\right)$.
5. Si une bonne réponse rapporte 2 points, qu'une mauvaise réponse retire 1 point, quelle note (sur 10) peut-il espérer obtenir ?