1M STANDARD

THÉORIE DES ENSEMBLES
ET
INTRODUCTION À LA LOGIQUE

S. et C. Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2021-2022

Table des matières

1 Les ensembles

1.1 Premières notions

Définition 1.1 Un **ensemble** est une collection d'objets dont les critères d'appartenance sont **bien définis.**

- On peut **dire avec exactitude** si un objet **fait partie ou non** de l'ensemble.
- Un objet figure **au maximum une fois** dans un ensemble.

Exemples :

- « Les romans sortis en librairie cette année » forment un ensemble.
- « Les bons romans sortis en librairie cette année » ne forment pas un ensemble car « être un bon roman » n'est pas défini de la même manière par tout le monde.

Définition 1.2 Un objet a est appelé un **élément de l'ensemble** A, s'il fait partie de l'ensemble A.
On dit alors que a **appartient** à A et on note :

$$a \in A$$

Si l'objet b n'est pas un élément de A, on note :

$$b \notin A$$

Exemple : Soit P l'ensemble des nombres pairs. On peut écrire que $8204 \in P$ et que $19 \notin P$.

Par convention, on utilise des majuscules pour les ensembles et des minuscules pour les éléments.

Définition 1.3 Lorsque deux ensembles A et B contiennent exactement les mêmes objets, on dit qu'ils sont **égaux** et on note :

$$A = B$$

Exemple : A : l'ensemble des diviseurs de 8
B : l'ensemble formé des 4 premières puissances de 2
On a $A = B = \{1\,;\,2\,;\,4\,;\,8\}$.

Définition 1.4 L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé **ensemble vide**.
On le note $\emptyset$.

Exemple : A : l'ensemble des nombres négatifs supérieurs à 2
On a $A = \emptyset$.

1.2 Énumération et extension

Définition 1.5 Définir un ensemble par **énumération** revient à donner la liste de tous ses éléments. L'ensemble est délimité par des **accolades** et les éléments séparés par des **points virgules.** On ne peut énumérer un ensemble que s'il a un nombre fini d'éléments.

$$A = \{1\,;\,2\,;\,3\} \qquad B = \{a\,;\,b\,;\,c\,;\,d\}$$

Exemples : Définir par énumération :

A : l'ensemble des diviseurs de 90

B : l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = 9$

Définition 1.6 Définir un ensemble par **extension** revient à donner une liste partielle de ses éléments, mais qui permet au lecteur de comprendre quels sont tous les éléments de l'ensemble.

$$A = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,\ldots\} \qquad B = \{a\,;\,b\,;\,c\,;\,d\,;\,\ldots\,;\,y\,;\,z\}$$

Exemples : Définir par extension :

C : l'ensemble des multiples [1] de 3

D : l'ensemble des nombres impairs [2]

Il est important de s'assurer qu'il n'y a pas d'ambiguïté :

Exemple : $A = \{1\,;\,2\,;\,4\,;\,\ldots\}$ peut être :

• $A = \{1\,;\,2\,;\,4\,;\,6\,;\,10\,;\,12\,;\,\ldots\}$ car il contient tous les entiers qui précèdent les nombres premiers.

• $A = \{1\,;\,2\,;\,4\,;\,8\,;\,16\,;\,32\,;\,\ldots\}$
car ....

• $A = \{1\,;\,2\,;\,4\,;\,7\,;\,11\,;\,16\,;\,\ldots\}$
car ....

Exercice 1.1 Définir par énumération les ensembles ci-dessous :

a) les multiples de 4 inférieurs ou égaux à 40

b) les diviseurs de 24

c) les lettres qui forment le mot BANANE

d) les solutions de l'équation $(x-3)(x+1) = 0$

e) les puissances de 10 entre 0,5 et 5000

1. Dans cette brochure, lorsqu'on parle de multiples, nous choisissons de prendre les multiples positifs, y compris 0.
2. Dans cette brochure, lorsqu'on parle de nombres pairs ou impairs, nous prenons la définition étendue à $\mathbb{Z}$.

Exercice 1.2 Définir par extension les ensembles ci-dessous :

a) les entiers naturels non nuls

b) les mois de l'année

c) les entiers inférieurs à 3

d) les fractions égales à 3

e) les carrés parfaits

f) les nombres réels supérieurs à 3

g) les puissances de 10 entre 0 et 2

1.3 Les ensembles de nombres

Définition 1.7 Les mathématiciens utilisent des symboles pour désigner les principaux ensembles de nombres :

• l'ensemble des **nombres naturels** (entiers positifs) : $\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,\ldots\}$

• l'ensemble des **nombres entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{\ldots\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,\ldots\}$

• l'ensemble des **nombres rationnels** (qui peuvent s'écrire sous forme de fractions) : $\mathbb{Q}$

• l'ensemble des **nombres réels** : $\mathbb{R}$

Exemples : 1) Justifier pourquoi les affirmations ci-dessous sont vraies.

a) $7 \in \mathbb{Q}$

b) $0{,}7 \in \mathbb{Q}$

c) $0{,}\overline{7} \in \mathbb{Q}$

d) $0{,}\overline{17} \in \mathbb{Q}$

2) Citer des nombres réels qui ne sont pas rationnels.

Définition 1.8 On peut combiner les ensembles de nombres avec les symboles suivants : $_+$, $_-$, * :

• pour **enlever le zéro** : A^*

• pour ne garder **que les nombres positifs**[3] : A_+

• pour ne garder **que les nombres négatifs**[3] : A_-

3. Dans cette brochure, nous considérons que 0 est à la fois positif et négatif.

Exemples : Écrire les ensembles ci-dessous à l'aide de symboles :

a) les nombres rationnels négatifs et différents de zéro

b) les nombres réels non nuls

c) les nombres entiers positifs

1.4 Propriété caractéristique

Définition 1.9 On définit souvent un ensemble A par rapport à un **ensemble de référence** E.
L'ensemble de référence E indique le contexte général, le type d'objets avec lequel on travaille (nombres, élèves, lettres, ...). Il est aussi appelé **référentiel** .

Définition 1.10 Pour obtenir les éléments de A, on ne sélectionne que les éléments de E qui vérifient une condition P. Cette condition est appelée **propriété caractéristique** .
On note :

$$A = \{ x \in E \mid P(x) \}$$

Cela signifie « **les éléments de** E **tels que** $P(x)$ **est vraie** ».

Exemples : Décrire « en français » et par énumération ou extension, lorsque c'est possible :

a) $A = \{ x \in \mathbb{Q}_+ \mid x \leq 1 \}$

b) $B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq 1000 \text{ et } \frac{x}{5} \in \mathbb{N} \right\}$

c) $C = \left\{ x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{5}{x} \in \mathbb{N} \right\}$

d) $D = \{ x \in \mathbb{N} \mid x = 5k \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ et } k \leq 200 \}$

Exercice 1.3 Définir par une propriété caractéristique :

a) les multiples de 30
b) les entiers naturels non nuls
c) les fractions entre 0 et 3
d) les fractions égales à 3
e) les nombres impairs
f) les diviseurs de 30

Exercice 1.4 Définir les ensembles suivants par énumération ou extension :

a) $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x \leq 10 \}$

b) $B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \dfrac{x}{7} \in \mathbb{N} \right\}$

c) $C = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \dfrac{x+1}{7} \in \mathbb{N} \right\}$

d) $D = \left\{ \dfrac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^* \text{ et } \dfrac{a}{b} = 0{,}3 \right\}$

e) $E = \left\{ x \in A \mid \dfrac{80}{x} \in \mathbb{N} \right\}$ où A est l'ensemble défini plus haut

f) $F = \{ x \in A \mid x > 6 \}$

g) $G = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x = 0{,}3 \}$

h) $H = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x + 1 \in \mathbb{Z} \}$

i) $I = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x + 1 \in \mathbb{N} \}$

j) $J = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 1 = 6 \}$

k) $K = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x(x+8)(x-9{,}5) = 0 \}$

Exercice 1.5 Définir par une propriété caractéristique :

a) $\mathbb{R}^*$

b) $\mathbb{R}_-$

c) $\mathbb{R}_+^*$

d) $A = \{ 1 ; 8 ; 27 ; 64 ; 125 ; \ldots \}$

e) $B = \{ 1 ; 8 ; 27 ; 64 ; 125 \}$

Exercice 1.6 Définir par énumération ou par extension, puis par une propriété caractéristique :

a) les multiples de 10

b) les diviseurs de 10

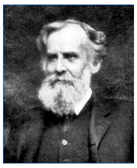
c) les puissances de 10

d) les carrés parfaits

e) les nombres pairs

f) les nombres impairs

1.5 Diagrammes de Venn (-Euler)



John Venn, GB

(1834-1923)

Leonhard Euler, CH

(1707-1783)

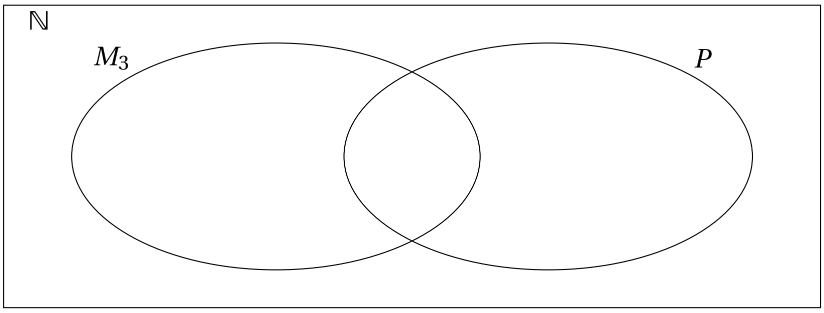
Définition 1.11 Un **diagramme de Venn-Euler** , aussi appelé **diagramme d'Euler** , est une représentation graphique d'ensembles telle que :

- Le référentiel est représenté par un rectangle.
- Les autres ensembles sont représentés par des « ovales ».
- Chaque élément du référentiel peut être inscrit dans une zone.

Exemples :

a) Inscrire les éléments aux bons endroits (3 par plage).

$E = \mathbb{N}$ M_3 : les multiples de 3 P : les nombres naturels pairs



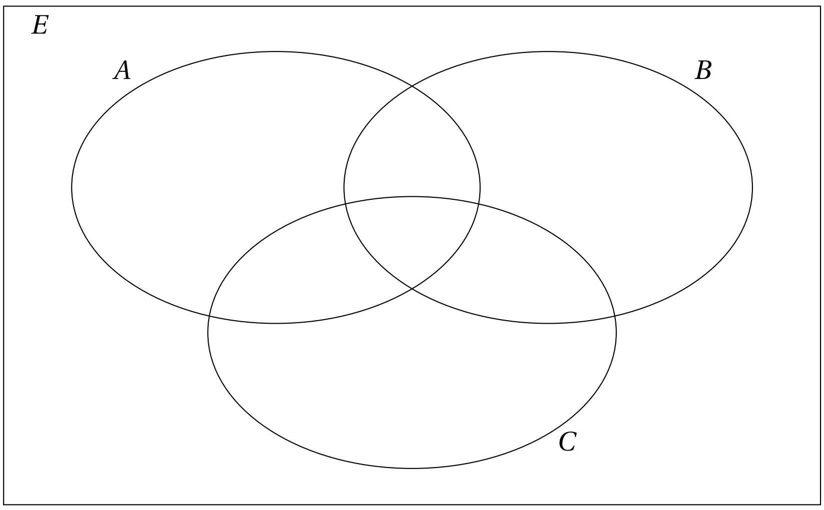
b) Dans chaque plage non vide, dessiner une forme correspondant aux critères.

E : les quadrilatères

A : les quadrilatères qui ont 4 côtés isométriques

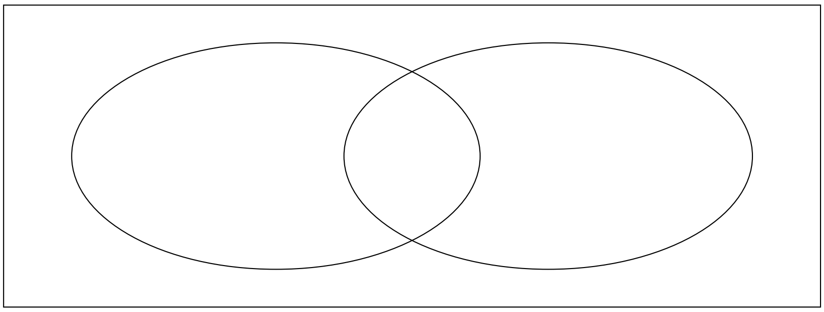
B : les quadrilatères qui ont 2 paires de côtés parallèles

C : les quadrilatères qui ont au moins 2 angles droits adjacents

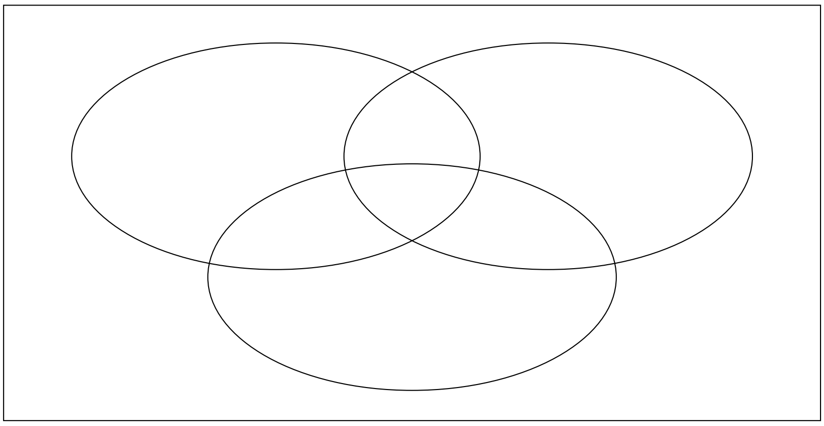


Exercice 1.7 Compléter les diagrammes de Venn-Euler pour les ensembles suivants.

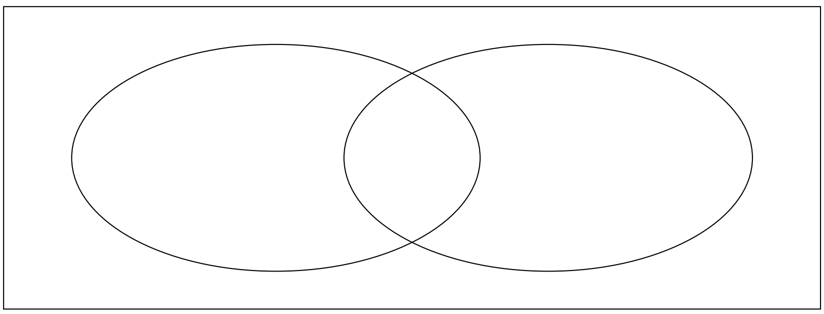
a) $E = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq 30 \}$
A : les diviseurs de 24
B : les diviseurs de 30



b) $E = \{ a ; b ; c ; d ; e ; f \}$
$A = \{ a ; b ; c \}$
$B = \{ b ; c ; d \}$
$C = \{ a ; c ; e \}$

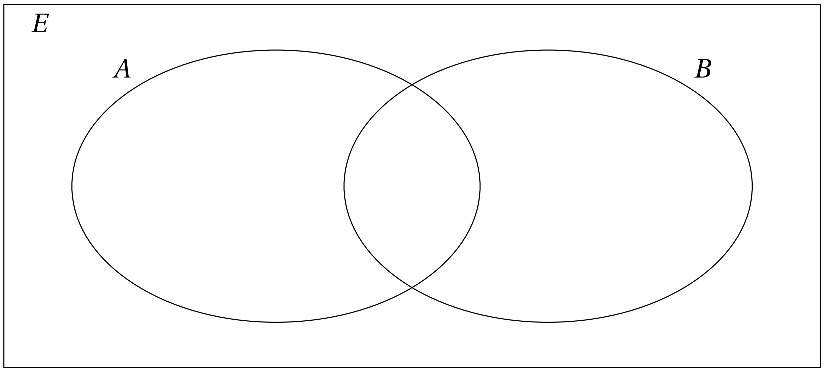


c) E : les triangles
A : les triangles qui ont au moins 2 angles isométriques
B : les triangles qui ont un angle droit



1.6 Les sous-ensembles

Exemple : $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 17\}$ $A = \{x \in E \mid x \text{ est un multiple de } 4\}$
$B = \{x \in E \mid x \text{ est un multiple de } 2\}$

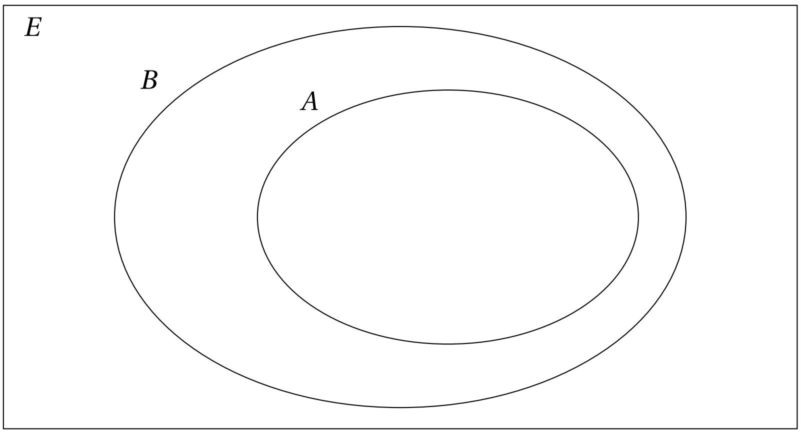


On peut remarquer que ....

Définition 1.12 Soit A et B des ensembles. A **est un sous-ensemble de** B si tout élément de A est aussi un élément de B. On dit alors que A **est inclus dans** B et on note :

$$A \subset B$$

Le diagramme de Venn-Euler peut alors être fait de la manière suivante afin d'éliminer les plages vides :



Exemple : Inscrire les éléments de l'exemple précédent aux bons endroits, dans le diagramme de cette définition 1.12 (3 par plage si il y en a une infinité).

Définition 1.13 Soit A et B des ensembles. A **n'est pas un sous-ensemble de** B si il existe au moins un élément de A qui n'est pas un élément de B. On dit alors que A **n'est pas inclus dans** B et on note :

$$A \not\subset B$$

Propriété : Soit A et B deux ensembles.

$$\boxed{A = B \quad \text{si et seulement si} \quad A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A}$$

Preuve : • 1^{er} sens : si $A = B$ alors $A \subset B$ et $B \subset A$

Si $A = B$:

Tous les éléments de A sont dans B.

Donc $A \subset B$.

Tous les éléments de B sont dans A.

Donc $B \subset A$.

• $2^{ème}$ sens : si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$

Si $A \subset B$, tous les éléments de A sont dans B.

Si $B \subset A$, tous les éléments de B sont dans A.

Ils contiennent donc exactement les mêmes éléments.

Donc $A = B$. #

Exercice 1.8 1) Représenter les ensembles ci-dessous par un diagramme de Venn-Euler sans plage vide, le référentiel étant les lettres de l'alphabet. Inscrire leurs éléments aux bons endroits.

A : ensemble des lettres du mot « maison »

B : ensemble des lettres du mot « ami »

C : ensemble des lettres du mot « moisi »

2) Déterminer si ces affirmations sont vraies pour les ensembles ci-dessus.

a) $A \subset B$	d) $C \subset B$	g) $a \in B$
b) $A \subset C$	e) $B \subset A$	h) $a \in C$
c) $C \subset A$	f) $B \subset C$	i) $a \notin B$

Exercice 1.9 Pour chaque ligne, représenter les ensembles par un diagramme de Venn-Euler sans plage vide. Inscrire leurs éléments aux bons endroits (3 par plage si il y en a une infinité) et écrire les inclusions.

a) $E = \mathbb{N}$ $\quad D_{40}$: l'ensemble des diviseurs de 40 et D_{20} : l'ensemble des diviseurs de 20

b) $E = \mathbb{N}$ $\quad M_{40}$: l'ensemble des multiples de 40 et M_{20} : l'ensemble des multiples de 20

c) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Exercice 1.10 Soit $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 6\}$

Tenir compte de toutes les informations ci-dessous pour énumérer E et ses sous-ensembles A, B et C et les représenter avec leurs éléments par un diagramme sans plage vide.

a) $C \subset A$

b) $C \subset B$

c) $1 \in C$

d) $2 \in A$

e) $2 \in B$

f) $2 \notin C$

g) $3 \in B$

h) $3 \notin A$

i) $4 \notin B$

j) $4 \in A$

k) $5 \notin A$

l) $5 \notin B$

Exercice 1.11 Soit $A = \{a; b; c\}$ et $B = \{a; b; c; d; e\}$

Les assertions suivantes sont-elles correctes ? Si non, proposer une correction sans changer les lettres.

a) $a \subset A$

b) $A \subset A$

c) $A \in B$

d) $d \in A$

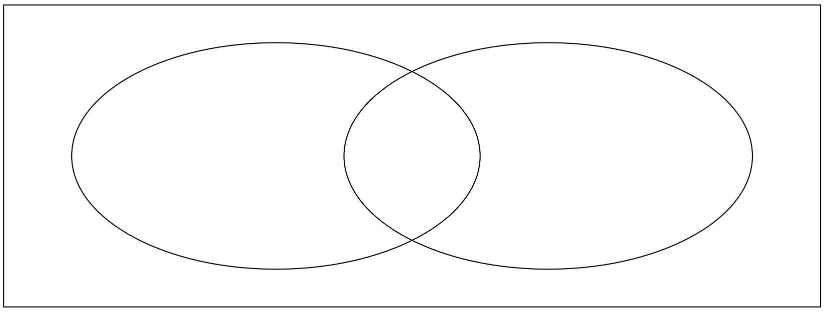
e) $B \subset A$

f) $e \in B$

Exercice 1.12 Lors d'une votation en classe :

- 4 élèves ont refusé les 2 propositions
- 2 élèves ont accepté les 2 propositions
- 10 élèves ont accepté la proposition A
- 12 élèves ont accepté la proposition B

Compléter le diagramme de Venn-Euler en indiquant le nombre d'élèves dans chaque plage.



Exercice 1.13 Pour chaque ligne, représenter le référentiel et les sous-ensembles suivants par un diagramme de Venn-Euler sans plage vide. Inscrire leurs éléments aux bons endroits.

a) $E = \{1 ; 2 ; 3 ; \ldots ; 8\}$ $\quad A = \{1 ; 4 ; 5\}$ $\quad B = \{6 ; 8\}$

b) $E = \{1 ; 2 ; 3 ; \ldots ; 10\}$ $\quad A = \{1 ; 2 ; 6 ; 7\}$ $\quad B = \{2 ; 3 ; 6 ; 8\}$

c) $E = \{1 ; 2 ; 3 ; \ldots ; 10\}$ $\quad A = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10\}$ $\quad B = \{4 ; 8\}$

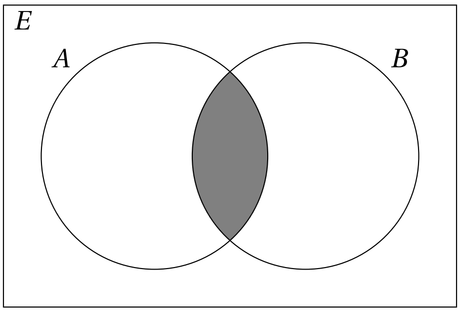
2 Opérations sur les ensembles

Soit E un ensemble de référence et A, B et C des sous-ensembles de E.

2.1 L'intersection ($\cap$)

Définition 2.1 **L'intersection** entre A et B se définit par :

$$A \cap B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B \}$$



L'intersection correspond au connecteur logique **et** .

Exemple : Énumérer A, B et $A \cap B$, inscrire leurs éléments aux bons endroits, dans le diagramme de la définition ci-dessus, puis compléter la propriété caractéristique.

$E = \{ x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 20 \}$

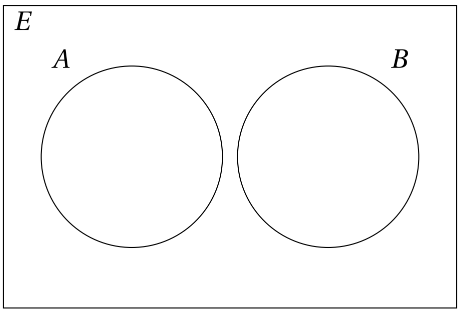
$A = \{ x \in E \mid x \text{ est un diviseur de } 18 \} = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$B = \{ x \in E \mid x \text{ est un diviseur de } 12 \} = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$A \cap B = \{ x \in E \mid x \text{ est } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$= \{ x \in E \mid x \text{ est un diviseur de } \ldots\ldots\ldots \}$

Définition 2.2 Deux sous-ensembles A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.



Exemple : Énumérer A et B et inscrire leurs éléments aux bons endroits, dans le diagramme ci-dessus.

$E = \{ x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 14 \}$

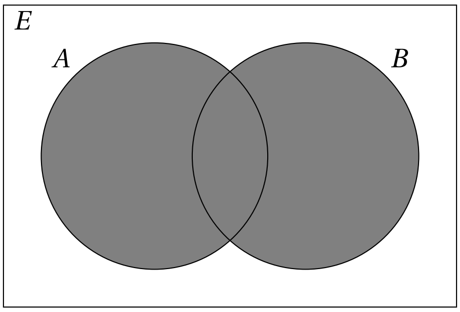
$A = \{ x \in E \mid x \text{ est une puissance de } 3 \} = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$B = \{ x \in E \mid x \text{ est un multiple de } 4 \} = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

2.2 La réunion ($\cup$)

Définition 2.3 La **réunion** de A avec B se définit par :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



La réunion correspond au connecteur logique **ou** .

Exemple : Énumérer A, B et $A \cup B$ et inscrire leurs éléments aux bons endroits, dans le diagramme ci-dessus.
$E = \{\, x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 12 \,\}$
$A = \{\, x \in E \mid x$ est un diviseur de $10 \,\} = \{$ .... $\}$
$B = \{\, x \in E \mid x$ est un diviseur de $8 \,\} = \{$ .... $\}$

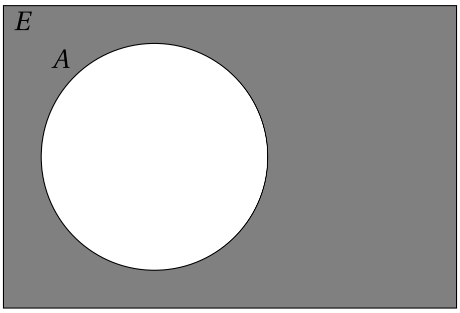
$A \cup B = \{\, x \in E \mid x$ est .... $\} = \{$ .... $\}$

2.3 Le complémentaire ($\overline{A}$)

Définition 2.4 Le **complémentaire** de A se définit par :

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Il se note aussi $E - A$ ou $E \setminus A$ ou $\complement_E A$.



Le complémentaire correspond au connecteur logique **non** .

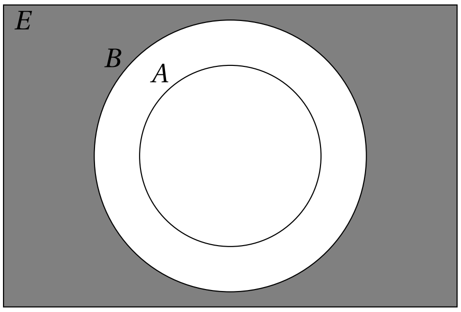
Exemple : Énumérer A et $\overline{A}$ et inscrire leurs éléments aux bons endroits, dans le diagramme ci-dessus.
$E = \{\, x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 20 \,\}$
$A = \{\, x \in E \mid x$ est un nombre premier $\,\} = \{$ .... $\}$
$\overline{A} = \{\, x \in E \mid x$ est .... $\}$
$= \{$ .... $\}$

Propriété : Soit A et B deux sous-ensembles d'un référentiel E.

$$\boxed{A \subset B \quad \text{si et seulement si} \quad \overline{B} \subset \overline{A}}$$

Preuve : • 1^{er} sens : si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$

Si $A \subset B$, tous les éléments de A sont dans B.



Donc un élément qui n'est pas dans B ne peut pas être dans A.
Donc $\overline{B} \subset \overline{A}$.

• $2^{ème}$ sens : si $\overline{B} \subset \overline{A}$ alors $A \subset B$

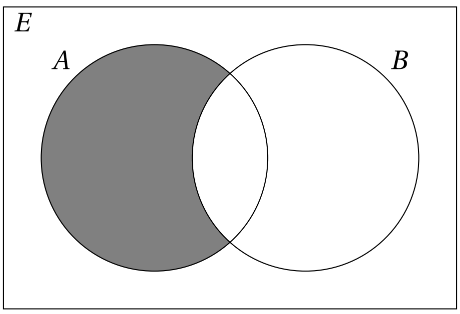
Prenons un élément a de A.
Imaginons qu'il ne soit pas dans B, il est donc dans $\overline{B}$.
Comme $\overline{B} \subset \overline{A}$, a est dans $\overline{A}$.
Mais a ne peut pas être dans A et dans $\overline{A}$. C'est impossible.
Donc ce que nous avions imaginé est impossible, a est forcément dans B.
Tout élément de A est donc dans B. Ainsi, $A \subset B$. #

2.4 La différence ($A \setminus B$)

Définition 2.5 La **différence** de A et de B se définit par :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Il se note aussi $A - B$.



Exemple : Énumérer A, B et $A \setminus B$ et inscrire leurs éléments aux bons endroits, ci-dessus.

$E = \{\, x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 18 \,\}$

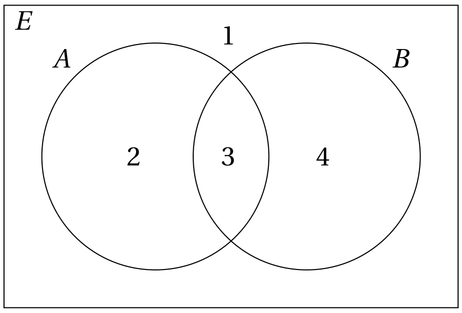
$A = \{\, x \in E \mid x$ est une puissance de $2 \,\} = \{$ .... $\}$

$B = \{\, x \in E \mid x$ est un carré parfait $\,\} = \{$ .... $\}$

$A \setminus B = \{\, x \in E \mid x$ est .... $\} = \{$ .... $\}$

2.5 Exercices sur les opérations

Exercice 2.1



Énumérer les sous-ensembles suivants :

a) A

b) B

c) $\overline{A}$

d) $\overline{B}$

e) $A \cap B$

f) $B \cap A$

g) $A \cup B$

h) $B \cup A$

i) $\overline{A \cap B}$

j) $\overline{A \cup B}$

k) $\overline{A} \cap \overline{B}$

l) $\overline{A} \cup \overline{B}$

m) $A \setminus B$

n) $B \setminus A$

o) $A \setminus (A \cap B)$

Que peut-on observer ?

Exercice 2.2 Soit l'ensemble E et ses sous-ensembles A et B suivants :
E : les élèves de la classe
A : les élèves qui aiment les brocolis, B : les élèves qui aiment les carottes.

A) Associer les descriptions ci-dessous à une écriture du langage ensembliste.

a) Les élèves qui aiment les brocolis et les carottes.

b) Les élèves qui aiment les brocolis ou les carottes.

c) Les élèves qui aiment les brocolis.

d) Les élèves qui n'aiment que les brocolis.

e) Les élèves qui n'aiment pas les brocolis.

B) Décrire les élèves des ensembles ci-dessous.

a) $A \cup B$

b) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

c) $\overline{A \cap B}$

d) $\overline{A} \cap \overline{B}$

Exercice 2.3 Donner deux éléments de chacun des ensembles suivants :

a) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ b) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ c) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

Exercice 2.4 Soit $E = \{ a\,;\, b\,;\, c\,;\, d\,;\, e\,;\, f \}$ et ses sous-ensembles $A = \{ a\,;\, b\,;\, c \}$ et $B = \{ b\,;\, c\,;\, d \}$.
Énumérer les sous-ensembles suivants :

a) $\overline{A}$ d) $A \cup B$ g) $A \setminus B$

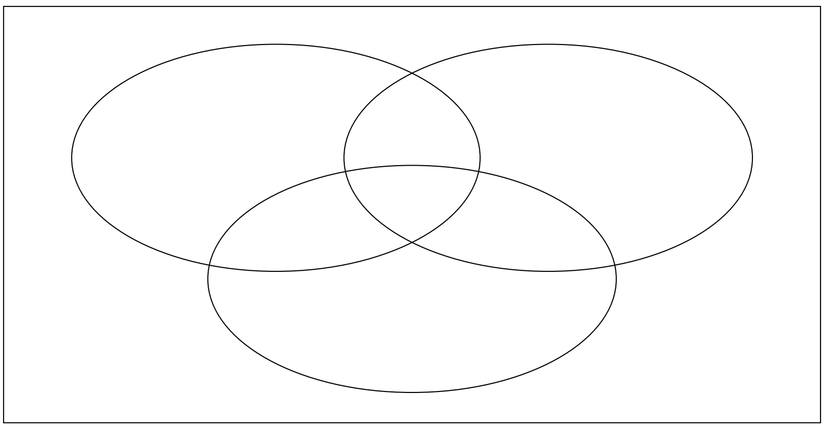
b) $\overline{B}$ e) $\overline{A \cap B}$ h) $B \setminus A$

c) $A \cap B$ f) $\overline{A \cup B}$ i) $\overline{E}$

Exercice 2.5 Soit l'ensemble E et ses sous-ensembles A, B et C suivants :
E : les élèves de la classe
A : les élèves qui aiment les mathématiques,
B : les élèves qui aiment le français
C : les élèves qui aiment la gymnastique.

a) 7 élèves aiment les trois branches.
b) 1 élève n'aime aucune branche.
c) 9 élèves aiment les maths et la gym.
d) 11 élèves aiment les maths et le français.
e) 16 élèves aiment les maths.
f) 1 élève n'aime que le français.
g) 20 élèves aiment les maths ou le français.
h) 22 élèves aiment au moins une branche.

Compléter le diagramme de Venn-Euler en indiquant le nombre d'élèves dans chaque plage.



Exercice 2.6 Soit l'ensemble E et ses sous-ensembles A et B.

Écrire de manière plus simple :

a) $A \cap E$
b) $A \cap \emptyset$
c) $A \cap A$
d) $A \cup E$
e) $A \cup \emptyset$
f) $A \cup A$

Exercice 2.7 Soit l'ensemble E et ses sous-ensembles A et B tels que $A \subset B$.
Écrire de manière plus simple :

a) $A \cap B$
b) $A \cup B$

Exercice 2.8 Dans une classe, on a recensé les élèves quant à leurs loisirs : musique, sport, ciné-club. On a obtenu les résultats suivants :

- 9 élèves font seulement du sport,
- 18 élèves font du sport,
- 20 élèves font de la musique ou vont au ciné-club, éventuellement les deux,
- 6 élèves font du sport et vont au ciné-club,
- 2 élèves participent aux trois activités,
- 7 élèves participent à deux activités exactement,
- 12 élèves ne font pas de sport,
- 19 élèves font soit de la musique, soit du sport, mais pas les deux.

Trouver l'effectif de la classe, ainsi que le nombre d'élèves qui font de la musique.

Exercice 2.9 Dans un collège, les cours de langues à option comprennent l'anglais, le latin et l'italien.

Parmi les 500 élèves de ce collège, 360 étudient au moins l'anglais, 230 au moins le latin et 125 au moins l'italien.

D'autre part, 160 élèves étudient au moins l'anglais et le latin, 85 au moins l'anglais et l'italien et 45 au moins le latin et l'italien.

Enfin, 20 élèves apprennent les trois langues.

Déterminer le nombre d'élèves qui étudient uniquement le latin, qui étudient uniquement l'italien, qui n'étudient aucune de ces trois langues.

2.6 Propriétés

Propriétés :

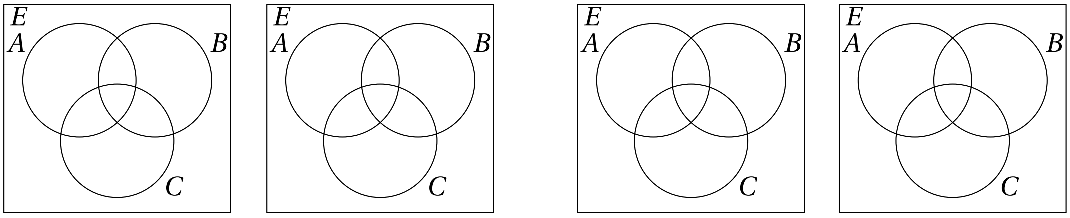
Commutativité

$\boxed{A \cup B = B \cup A}$ $\boxed{A \cap B = B \cap A}$

Associativité

$\boxed{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$ $\boxed{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$

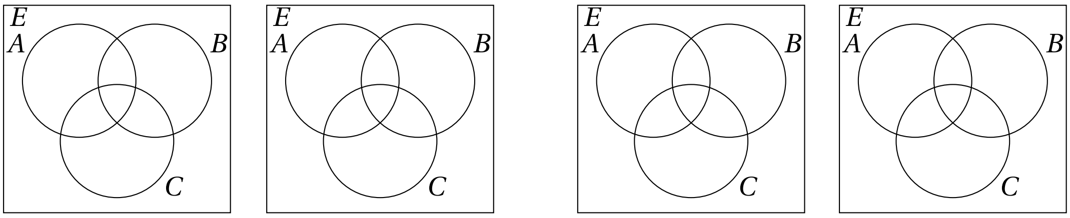
Illustrations :



Distributivité

$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$ $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$

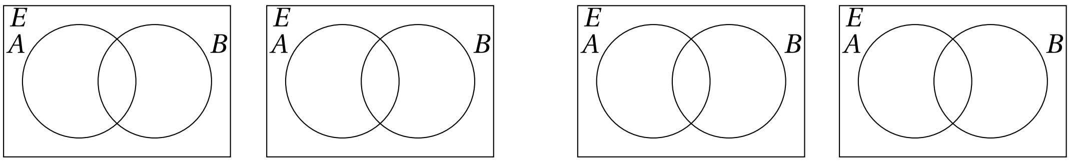
Illustrations :



Lois de Morgan

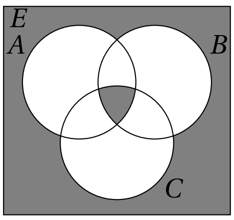
$\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$ $\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$

Illustrations :

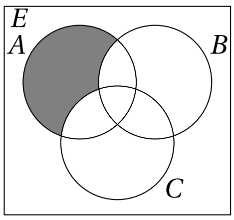


Exercice 2.10 Coder les régions grisées, le plus simplement possible, au moyen du langage ensembliste.

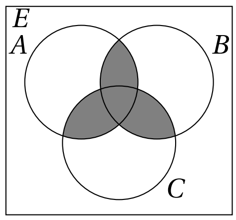
a)



b)

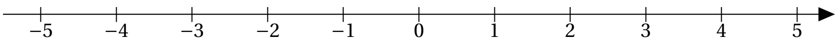


c)



3 Les intervalles

Définition 3.1 L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ peut se représenter par un axe, appelé **droite numérique** .



Définition 3.2 Soit a et $b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$.
Un **intervalle** qui a pour **bornes** a et b est la portion de la droite numérique située entre a et b. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Les bornes peuvent appartenir, ou non, à l'intervalle. On distingue les différents cas de la manière suivante :

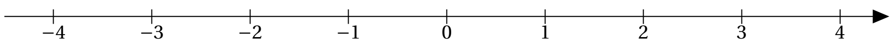
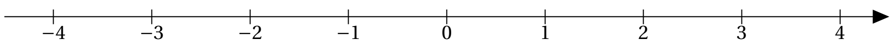
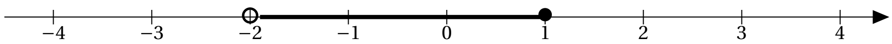
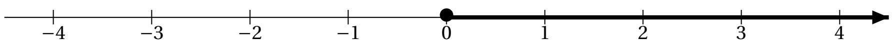
intervalle ouvert	$]a\,;\,b[$	$a < x < b$	
intervalle fermé	$[a\,;\,b]$	$a \leq x \leq b$	
intervalle semi-ouvert	$[a\,;\,b[$	$a \leq x < b$	
	$]a\,;\,b]$	$a < x \leq b$	
intervalle généralisé	$[a\,;\,+\infty[$	$a \leq x$	
	$]-\infty\,;\,a]$	$x \leq a$	
	$]a\,;\,+\infty[$	$a < x$	
	$]-\infty\,;\,a[$	$x < a$	

Exercice 3.1 Pour s'inscrire au concours « Miss Suisse », il faut mesurer au moins 1,68 mètres.
Écrire cette condition à l'aide de crochets et sous forme d'inéquation.

Exercice 3.2 Une entreprise fabrique un téléphone qui coûte CHF 600.−. Les revendeurs y ajoutent une marge, qui peut aller jusqu'à 10% de ce prix.
Écrire la fourchette du prix payé par le client à l'aide des crochets et sous forme d'inéquation.

Exercice 3.3 La température moyenne du mois passé a été de 20°C. Il y a eu au maximum 6,5°C de différence avec celle-ci.
Écrire la fourchette des températures à l'aide des crochets et sous forme d'inéquation.

Exercice 3.4 Compléter le tableau.

Inégalité	**Axe**	**Intervalle**
$-4 \leq x < 1$		
		$]-\infty\,;\,3]$
		
		

Exercice 3.5 Écrire les ensembles suivants à l'aide de la notation des intervalles ou énumérer si c'est impossible.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 23\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -35 < x \leq -2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4{,}5\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \leq x \leq \dfrac{23}{2}\right\}$

f) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{4}{5} < x \leq 2{,}4\right\}$

g) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \dfrac{1}{2}\right\}$

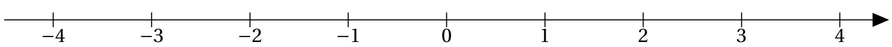
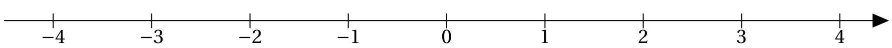
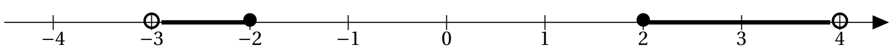
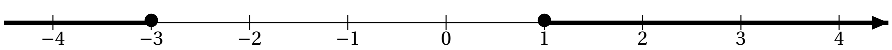
h) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \text{ et } x \leq 1{,}5\}$

i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

j) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 2\}$

k) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < -2\}$

Exercice 3.6 Compléter le tableau.

Inégalité	**Axe**	**Intervalle**
$-4 < x \leq 1$ ou $x > 3$		
		$[1;2[\,\cup\,]3;4]$
		
		

Exercice 3.7 Soit les intervalles : $A = [-7\,;\,3]$ $B =]0\,;\,+\infty[$

Représenter ces intervalles sur la droite numérique et les écrire sous forme d'intervalle :

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A \setminus B$
d) $B \setminus A$
e) $\overline{A}$
f) $\overline{B}$

Exercice 3.8 Soit les intervalles : $A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \,\}$ $B = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \,\}$

Représenter ces intervalles sur la droite numérique et les écrire sous forme d'intervalle :

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A \setminus B$
d) $B \setminus A$
e) $\overline{A}$
f) $\overline{B}$

Exercice 3.9 Écrire les ensembles suivants à l'aide d'une propriété caractéristique.

a) $]-\infty;3]$
b) $[-3;3[$
c) $\{\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\}$

4 Liens entre ensembles et logique

Nous nous contenterons ici d'une approche informelle de la logique, qui nous permettra de mettre en place les notations et les outils nécessaires pour faire ce qui est indispensable et si beau en mathématiques : démontrer les propriétés que nous rencontrerons.

4.1 Propositions et prédicats

Définition 4.1 Une **proposition** mathématique est une assertion qui est forcément vraie ou fausse, mais pas les deux.

Exemples : Les énoncés suivants sont des propositions :
- La baleine est un mammifère.
- $1+1=3$
- 2 est un nombre pair.
- Zurich est la capitale de la Suisse.

Les énoncés suivants ne sont pas des propositions :
- Cette phrase est un mensonge.
- x est un nombre pair.

Ce dernier exemple n'est pas une proposition car le sujet est indéterminé, si bien que l'on ne peut pas dire si elle est vraie ou fausse. Cependant, chaque fois que nous substituerons à x un terme convenablement choisi, nous obtiendrons une proposition.

Définition 4.2 $P(x)$ est un **prédicat** si c'est un énoncé du type "x possède la propriété P".

x est appelé la **variable**.

Le **domaine de définition du prédicat** est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles "x possède la propriété P" est une proposition.

Exemples :
- "être pair" est une propriété.
  "x est un nombre pair" est un prédicat.
  Son ensemble de définition est $\mathbb{Z}$.
- "être strictement inférieur à 2" est une propriété.
  "$x<2$" est un prédicat.
  Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
- On peut avoir des prédicats à plusieurs variables comme "x est un diviseur de y".

4.2 Implication, réciproque et équivalence

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats, E un ensemble contenu dans les deux domaines de définition et les ensembles :

$$A = \{x \in E \mid P(x)\} \qquad \text{et} \qquad B = \{x \in E \mid Q(x)\}.$$

Définition 4.3 $P(x)$ **implique** $Q(x)$ est une proposition qui est vraie uniquement si $A \subset B$.

On notera alors : $P(x) \implies Q(x)$

Dans ce cas, si un élément de E satisfait la propriété P, alors il satisfait forcément la propriété Q.

On peut aussi noter : $P \implies Q$

Exemples :

a) x est un nombre entier $\implies$ x est un nombre rationnel
car $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

b) Être un multiple de 6 $\implies$ Être un multiple de 2
car $M_6 \subset M_2$

c) Être un trapèze $\implies$ Être un quadrilatère qui a une paire de côtés parallèles

d) $x = 2 \implies x$ est un nombre premier pair

e) $x = 3 \implies x^2 = 9$

Remarque : Si $P(x) \implies Q(x)$, cela ne veut pas forcément dire que $Q(x) \implies P(x)$.
En effet, $A \subset B$ ne veut pas forcément dire que $B \subset A$.

Définition 4.4 $Q(x) \implies P(x)$ est la **réciproque** de $P(x) \implies Q(x)$

Exemples : Écrire la réciproque des exemples précédents lorsqu'elle est vraie. Noter un contre-exemple sinon.

a) ....
....

b) ....
....

c) ....
....

d) ....
....

e) ....
....

Définition 4.5 Lorsque $Q(x) \implies P(x)$ et $P(x) \implies Q(x)$ sont toutes deux vraies, on dit que les propriétés P et Q sont **équivalentes** . On note alors :

$$P(x) \iff Q(x)$$

P est vérifié **si et seulement** si Q est vérifié.

Exemple : x est divisible par 6 $\iff$ x est divisible par 2 et par 3

Exercice 4.1 Soit les ensembles suivants dans le référentiel $E = \mathbb{N}$:

A : Les nombres pairs B : Les nombres premiers C : Les multiples de 10

a) Représenter ces ensembles par un diagramme de Venn **sans plage vide**.
(noter uniquement les 3 **plus petits éléments** dans les plages où il y en a une infinité.)

b) Écrire l'inclusion que vous pouvez observer et l'implication qui lui est associée.

Exercice 4.2 Déterminer si les implications ci-dessous sont vraies ou fausses.

a) être un carré $\implies$ être un rectangle

b) être un parallélogramme $\implies$ être un carré

c) x est un nombre premier $\implies$ x est un nombre impair

d) x est divisible par 5 $\implies$ x est divisible par 10

e) x est divisible par 10 $\implies$ x est divisible par 5

Exercice 4.3 Déterminer si les équivalences ci-dessous sont vraies ou fausses.

a) être un triangle équilatéral $\iff$ être un triangle qui a 3 angles de 60°

b) être un cerf-volant $\iff$ avoir au moins un axe de symétrie

c) x est un diviseur de 40 $\iff$ x est un diviseur de 20

d) x est un nombre entier positif $\iff$ x est un nombre naturel

e) être un étudiant qui travaille régulièrement $\iff$ être un étudiant qui a de bonnes notes

4.3 La contraposée

Définition 4.6 On définit la **négation** de la proposition P, notée $\neg P$ ou non P, par

$$\text{non } P \text{ est vrai} \iff P \text{ est faux}$$

Si $P(x)$ est un prédicat et $A = \{\, x \in E \mid P(x) \,\}$,
alors non $P(x)$ est un prédicat tel que $\overline{A} = \{\, x \in E \mid \text{ non } P(x) \,\}$.

Exemples : Énoncer la négation des propositions ou prédicats suivants :

a) J'ai gagné au loto. ....

b) x est un nombre impair ....

c) $x < 2$ ....

Propriété : Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats, E un ensemble contenu dans les deux domaines de définition et les ensembles $A = \{x \in E \mid P(x)\}$ et $B = \{x \in E \mid Q(x)\}$.

$$\boxed{P(x) \implies Q(x) \quad \text{si et seulement si} \quad \text{non } Q(x) \implies \text{non } P(x)}$$

La proposition « non $Q(x) \implies$ non $P(x)$ » est appelée la **contraposée** de la proposition « $P(x) \implies Q(x)$ ».

Preuve : C'est une conséquence de la propriété « $A \subset B$ si et seulement si $\overline{B} \subset \overline{A}$ ».
En effet, comme :
$\overline{A} = \{\, x \in E \mid \text{ non } P(x) \,\}$ et $\overline{B} = \{\, x \in E \mid \text{ non } Q(x) \,\}$,
$P(x) \implies Q(x)$ si et seulement si $A \subset B$ si et seulement si $\overline{B} \subset \overline{A}$
si et seulement si non $Q(x) \implies$ non $P(x)$ #

Exemples : La contraposée de : « x est un nombre entier $\implies$ x est un nombre rationnel »
est :

La contraposée de : « être un chat $\implies$ être un félin »
est :

Exercice 4.4 Formuler les contraposées des implications suivantes :

a) être un dauphin $\implies$ être un mammifère

b) x est un multiple de 20 $\implies$ x est un multiple de 10

c) être un carré $\implies$ être un rectangle

d) x est un nombre premier $\implies$ x a exactement deux diviseurs

e) être un quadrilatère $\implies$ ne pas être un triangle

f) x est divisible par 2 et par 3 $\implies$ être divisible par 6

g) être un mot qui commence par a ou par b $\implies$ être au début du dictionnaire

Exercice 4.5 Formuler les proverbes suivants sous forme d'implications et écrire leurs contraposées :

a) Qui vole un oeuf, vole un boeuf.

b) La nuit, tous les chats sont gris.

c) Pierre qui roule n'amasse pas mousse.

d) Les têtes intelligentes se protègent.

Exercice 4.6 Considérons l'implication : avoir tiré un jeton bleu ou un jeton jaune $\Longrightarrow$ avoir gagné.

A) Écrire la réciproque de cette implication.

B) Décrire un jeu dans lequel l'implication serait vraie mais pas sa réciproque.

C) Parmi les propositions ci-dessous, lesquelles expriment la contraposée de l'implication de départ ?

a) avoir perdu $\Longrightarrow$ ne pas avoir tiré un jeton bleu ou un jeton jaune

b) avoir perdu $\Longrightarrow$ ne pas avoir tiré un jeton bleu et ne pas avoir tiré un jeton jaune

c) avoir perdu $\Longrightarrow$ ne pas avoir tiré un jeton bleu ou ne pas avoir tiré un jeton jaune

d) avoir perdu $\Longrightarrow$ ne pas avoir tiré un jeton bleu et jaune

e) avoir perdu $\Longrightarrow$ ne pas avoir tiré un jeton bleu et un jeton jaune

f) avoir perdu $\Longrightarrow$ n'avoir tiré ni un jeton bleu, ni un jeton jaune

g) avoir perdu si l'on n'a pas tiré un jeton bleu ou un jeton jaune

D) Parmi les propositions ci-dessus, lesquelles sont des contraposées de la réciproque ?

5 Les quantificateurs

5.1 Symboles et signification

Symbole	Signification
$\forall$	pour tout, quelque soit
$\exists$	il existe
$\exists!$	il existe un unique

Exemples : $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists\, a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $\dfrac{a}{b} = x$.
Ce qui veut dire :

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists!\, y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y = 0$.
Ce qui veut dire :

Exercice 5.1 Traduire les affirmations ci-dessous et illustrer par un exemple numérique :

a) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists!\, y \in \mathbb{R}$ tel que $x \cdot y = 1$.

b) x est pair $\iff \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k$.

Exercice 5.2 Écrire à l'aide des quantificateurs :

a) La droite d est parallèle à la droite e si et seulement si tous les points P appartenant à d n'appartiennent pas à e.

b) Pour tous les nombres naturels a et b, si le plus grand diviseur commun de a et b vaut 1 alors le plus petit multiple commun de a et b est égal au produit de a et b.

Exercice 5.3 Écrire les mots « carré(s) » et « rectangle(s) » aux bons endroits (un de chaque par ligne), de manière à ce que ces propositions soient vraies :

a) Les .... sont des ....

b) Les .... peuvent être des ....

c) $\forall$ $ABCD$ .... , $ABCD$ est un ....

d) Tous les .... sont des ....

e) $ABCD$ est un .... $\Longrightarrow$ $ABCD$ est un ....

f) $\exists$ $ABCD$ .... tel que $ABCD$ est un ....

g) Les .... ne sont pas des ....

6 Démonstrations

Exemple : Soit a, b et $m \in \mathbb{N}$.
Si m est divisible par a et par b, alors il est divisible par $a \cdot b$.

a) Trouver trois nombres pour lesquels cette affirmation est vraie.

b) Trouver trois nombres pour lesquels cette affirmation est fausse.

c) Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?

Pour être sûr qu'une implication entre deux prédicats est fausse, il suffit de trouver un **contre-exemple** . On dit alors que l'on a **réfuté** la proposition.

Par contre, pour être sûr qu'elle est vraie, on doit démontrer qu'elle l'est toujours. Donc un exemple ne suffit pas. Il faut faire une **démonstration** . (Nous ne ferons pas de différence entre les mots « prouver » et « démontrer ».) Une fois démontrée, elle portera le nom de **théorème**, de **lemme**, de **corollaire** ou de **proposition démontrée**.

Définition 6.1 On appelle « **hypothèses** » (noté H) les propriétés ou prédicats supposés vrais au départ.

On appelle « **conclusion** » (noté C) les propriétés ou prédicats que l'on aimerait prouver.

Définition 6.2 Une « **démonstration par méthode directe** » est une suite d'implications vraies partant des hypothèses pour arriver à la conclusion.

Exemple : La somme de deux nombres impairs est paire.
H : n et $m \in \mathbb{Z}$ et n et m impairs. C : $n + m$ est pair.
D : n est impair $\Longrightarrow$ $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$
m est impair $\Longrightarrow$ $\exists\, h \in \mathbb{Z}$ tel que $m = 2h + 1$
$\Longrightarrow$ $\exists\, k$ et $h \in \mathbb{Z}$ tels que $n + m = (2k + 1) + (2h + 1) = 2k + 2h + 2 = 2(k + h + 1)$
$\Longrightarrow$ $n + m$ est pair ♯

Définition 6.3 Une « **démonstration par contraposée** » est une suite d'implications vraies partant de la négation de la conclusion pour arriver à la négation de l'hypothèse.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n^2 est pair alors n est pair.
H : $n \in \mathbb{N}$ et n^2 pair. C : n est pair.
Contraposée : H : $n \in \mathbb{N}$ et n impair. C : n^2 est impair.
D : n est impair $\Longrightarrow$ $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$
$\Longrightarrow$ $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$
$\Longrightarrow$ n^2 est la somme d'un multiple de 4 et de 1
$\Longrightarrow$ n^2 est impair

Exercice 6.1 Illustrer chaque théorème ci-dessous par deux exemples, puis identifier l'hypothèse et la conclusion :

a) La somme des angles d'un polygone à n côtés peut se calculer à l'aide de la formule $180 \cdot (n-2)$.

b) Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

c) Si le chiffre des unités d'un nombre entier est zéro, c'est un multiple de 10.

d) Les multiples de 10 ont 0 pour chiffre des unités.

Exercice 6.2 Illustrer chaque proposition ci-dessous par deux exemples, puis écrire les démonstrations :

a) Lorsqu'on double les dimensions d'un carré, son aire quadruple.

b) Si l'aire d'un carré a quadruplé, alors ses dimensions ont doublé.

c) Le produit de deux nombres entiers consécutifs est un nombre pair.

d) La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

Exercice 6.3 Prouver ou réfuter :

a) L'inverse d'un nombre entier est un nombre entier.

b) L'inverse d'un nombre entier n'est jamais un nombre entier.

c) Le quotient de deux nombres rationnels non nuls est un nombre rationnel.

d) La différence de deux nombres impairs est paire.

Exercice 6.4 Vrai ou faux? Réfuter lorsque c'est faux.

a) $\forall x \in \mathbb{N}, \dfrac{x}{4} \in \mathbb{N}.$

b) $\exists x \in \mathbb{N}, \dfrac{x}{4} \in \mathbb{N}.$

c) $\exists! x \in \mathbb{N}, \dfrac{x}{4} \in \mathbb{N}.$

d) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Q}$ tel que $xy = 1.$

e) $\forall x \in \mathbb{N}^*, \exists y \in \mathbb{Q}$ tel que $xy = 1.$

f) $\forall x \in \mathbb{N}^*, \exists y \in \mathbb{Z}$ tel que $xy = 1.$

Exercice 6.5

a) Réfuter cette proposition :

La somme d'un nombre positif et de son double est un multiple de 3.

b) Traduire la proposition ci-dessous en « français ».

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = 2x$.

Si $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $x + y = 3k$ alors $x \in \mathbb{N}$.

c) Identifier l'hypothèse et la conclusion de cette deuxième proposition.

d) Écrire la contraposée de cette deuxième proposition.

e) Écrire la réciproque de cette deuxième proposition.

7 Éléments de solutions des exercices

1 Les ensembles

Exercice 1.1

a) $\{0 ; 4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20 ; 24 ; 28 ; 32 ; 36 ; 40\}$

b) $\{1\ 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24\}$

c) $\{B ; A ; N ; E\}$

d) $\{3 ; -1\}$

e) $\{1 ; 10 ; 100 ; 1000\}$

Exercice 1.2

a) $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; \ldots\}$

b) $\{\text{janvier} ;\ \text{février} ;\ \ldots\ ;\ \text{novembre} ;\ \text{décembre}\}$

c) $\{\ldots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$

d) $\left\{\frac{3}{1} ; \frac{6}{2} ; \frac{9}{3} ; \frac{12}{4} ; \ldots\right\}$[4]

e) $\{0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; \ldots\}$

f) impossible à définir par extension

g) $\{1 ; 0{,}1 ; 0{,}01 ; 0{,}001 ; 0{,}0001 ; 0{,}00001 ; \ldots\}$

Exercice 1.3

a) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{30} \in \mathbb{N}\right\}$ ou $\{x \in \mathbb{N} \mid x = 30k \text{ pour } \mathrm{k} \in \mathbb{N}\}$

b) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\}$ ou $\mathbb{N}^*$

c) $\left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{N}^* \text{ et } 0 < \frac{a}{b} < 3\right\}$

d) $\left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{N}^* \text{ et } a = 3b\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x-1}{2} \in \mathbb{Z}\right\}$ ou $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k+1 \text{ pour } \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$ ou $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{2} \notin \mathbb{Z}\right\}$

f) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{30}{x} \in \mathbb{N}\right\}$ ou $\{x \in \mathbb{N} \mid 30 = kx \text{ pour } \mathrm{k} \in \mathbb{N}\}$

Exercice 1.4

a) $A = \{5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$

b) $B = \{0 ; 7 ; 14 ; 21 ; 28 ; \ldots\}$

c) $C = \{6 ; 13 ; 20 ; 27 ; \ldots\}$

d) $D = \left\{\frac{3}{10} ; \frac{6}{20} ; \frac{9}{30} ; \frac{12}{40} ; \ldots\right\}$

e) $E = \{5 ; 8 ; 10\}$

f) $F = \{7 ; 8 ; 9 ; 10\}$

g) $G = \emptyset$

h) $H = \mathbb{Z}$

i) $I = \{-1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}$

j) $J = \emptyset$

k) $K = \{0 ; -8\}$

4. Rappel : $\frac{3}{1}$ et $\frac{6}{2}$ sont 2 fractions différentes, équivalentes au même nombre rationnel.

Exercice 1.5

a) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \,\}$

b) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \,\}$

c) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\}$

d) $A = \{\, x \in \mathbb{N}^* \mid x = k^3 \text{ pour } k \in \mathbb{N}^* \,\}$
$= \{\, x \in \mathbb{N}^* \mid \sqrt[3]{x} \in \mathbb{N}^* \,\}$

e) $B = \{\, x \in \mathbb{N} \mid x = k^3 \text{ pour } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } k < 6 \,\}$

Exercice 1.6

a) $\{\, \mathbf{0}\,;\, 10\,;\, 20\,;\, 30\,;\, 40\,;\, 50\,;\ldots \,\} =$
$\{\, x \in \mathbb{N} \mid x = 10 \cdot k \text{ pour } k \in \mathbb{N} \,\} = \{\, x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{10} \in \mathbb{N} \,\}$

b) $\{\, 1\,;\, 2\,;\, 5\,;\, 10 \,\} =$
$\{\, x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{10}{x} \in \mathbb{N} \,\} = \{\, x \in \mathbb{N}^* \mid 10 = k \cdot x \text{ pour } k \in \mathbb{N} \,\}$

c) $\{\, \ldots\,;\, 0{,}01\,;\, 0{,}1\,;\, 1\,;\, 10\,;\, 100\,;\ldots \,\} =$
$\{\, x \in \mathbb{Q} \mid x = 10^k \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \,\}$

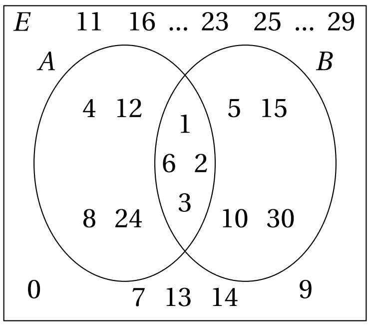
d) $\{\, \mathbf{0}\,;\, 1\,;\, 4\,;\, 9\,;\, 16\,;\, 25\,;\ldots \,\} =$
$\{\, x \in \mathbb{N} \mid x = k^2 \text{ pour } k \in \mathbb{N} \,\} = \{\, x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{N} \,\}$

e) $\{\, \ldots\,;\, -4\,;\, -2\,;\, 0\,;\, 2\,;\, 4\,;\ldots \,\} =$
$\{\, x \in \mathbb{Z} \mid x = 2 \cdot k \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \,\} = \{\, x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{Z} \,\}$

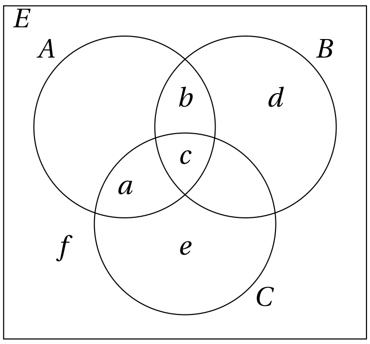
f) $\{\, \ldots\,;\, -3\,;\, -1\,;\, 1\,;\, 3\,;\, 5\,;\ldots \,\} =$
$\{\, x \in \mathbb{Z} \mid x = 2 \cdot k + 1 \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \,\} = \{\, x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x-1}{2} \in \mathbb{Z} \,\} = \{\, x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x+1}{2} \in \mathbb{Z} \,\}$

Exercice 1.7

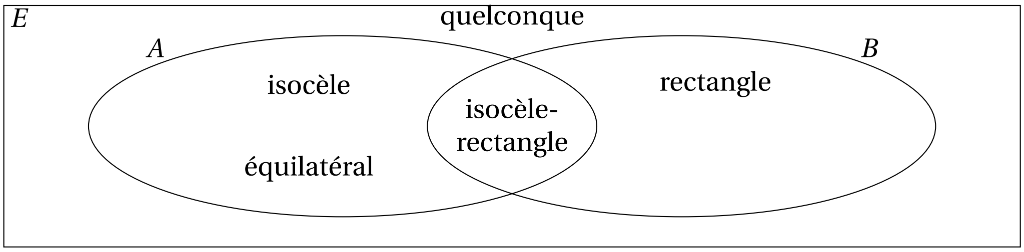
a)



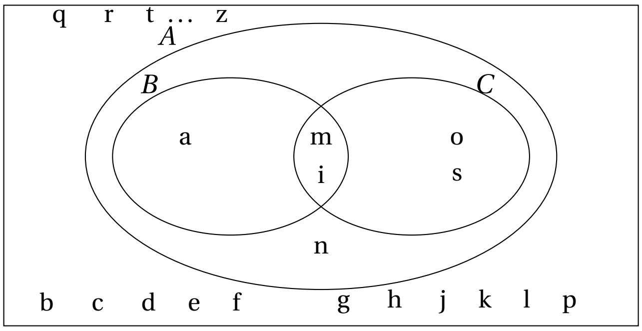
b)



c)

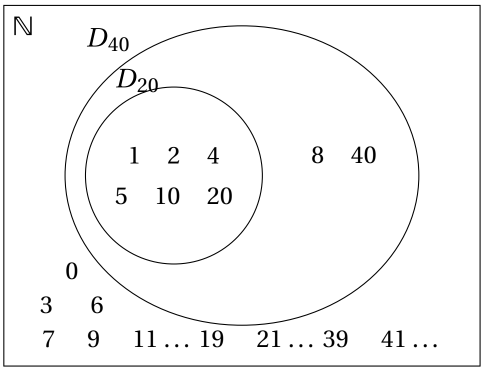


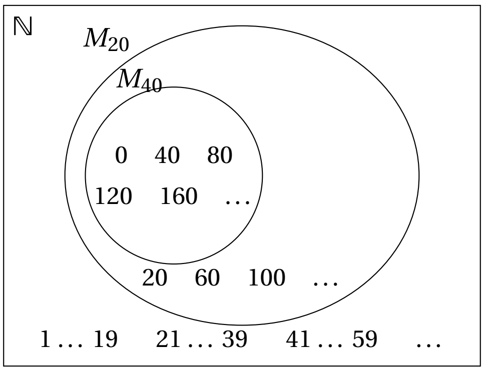
Exercice 1.8



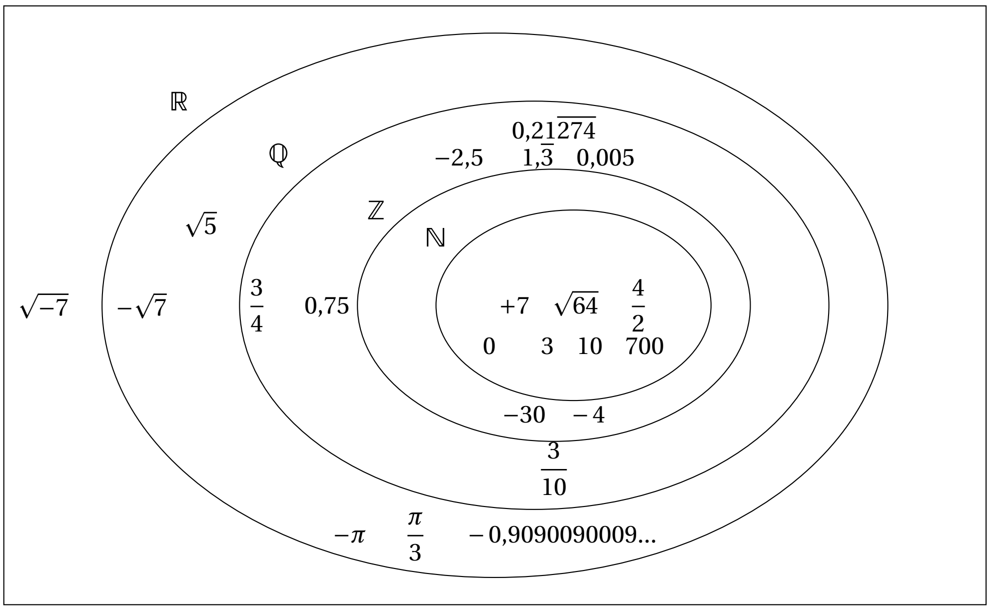
a) faux	d) faux	g) vrai
b) faux	e) vrai	h) faux
c) vrai	f) faux	i) faux

Exercice 1.9 a) $D_{20} \subset D_{40}$ b) $M_{40} \subset M_{20}$

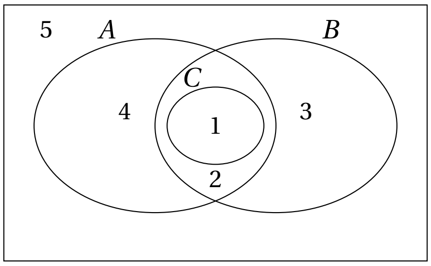




c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

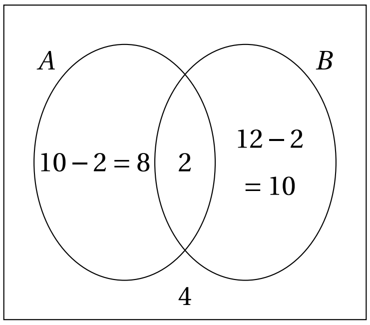


Exercice 1.10 $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$
$A = \{1\,;2\,;4\}$
$B = \{1\,;2\,;3\}$ $\quad C = \{1\}$

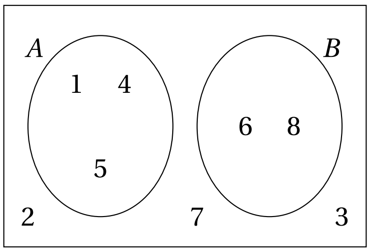


Exercice 1.11 a) $a \in A$ d) $d \notin A$
b) vrai e) $B \not\subset A$
c) $A \subset B$ f) vrai

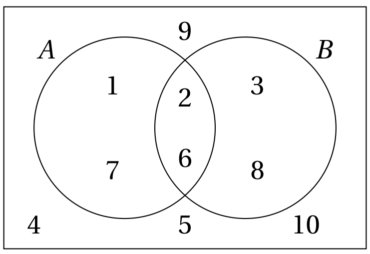
Exercice 1.12



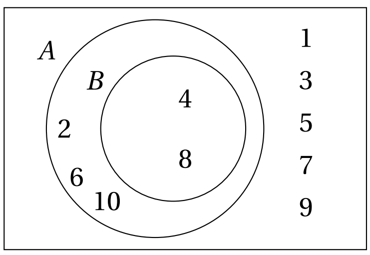
Exercice 1.13 a)



b)



c)



2 Opérations sur les ensembles

Exercice 2.1

a) $\{2\,;3\}$ f) $\{3\}$ k) $\{1\}$

b) $\{3\,;4\}$ g) $\{2\,;3\,;4\}$ l) $\{1\,;2\,;4\}$

c) $\{1\,;4\}$ h) $\{2\,;3\,;4\}$ m) $\{2\}$

d) $\{1\,;2\}$ i) $\{1\,;2\,;4\}$ n) $\{4\}$

e) $\{3\}$ j) $\{1\}$ o) $\{2\}$

$A\cup B = B\cup A \qquad A\cap B = B\cap A \qquad A\setminus B = A\setminus(A\cap B) \qquad \overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B} \qquad \overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$

Exercice 2.2

a) $A\cap B$ b) $A\cup B$ c) A d) $A\setminus B$ e) $\overline{A}$

a) Les élèves qui aiment au moins un de ces légumes.

b) Les élèves qui n'aiment qu'un seul de ces légumes.

c) Les élèves qui n'aiment pas au moins un de ces légumes.

d) Les élèves qui n'aiment aucun de ces légumes.

Exercice 2.3

a) $\pi \qquad -\sqrt{2} \qquad$ 0,123456789101112... ...

b) $\dfrac{2}{7} \qquad -4,\overline{15} \qquad$ 0,12 ...

c) $-4 \qquad -123 \qquad -1'000'000$ ...

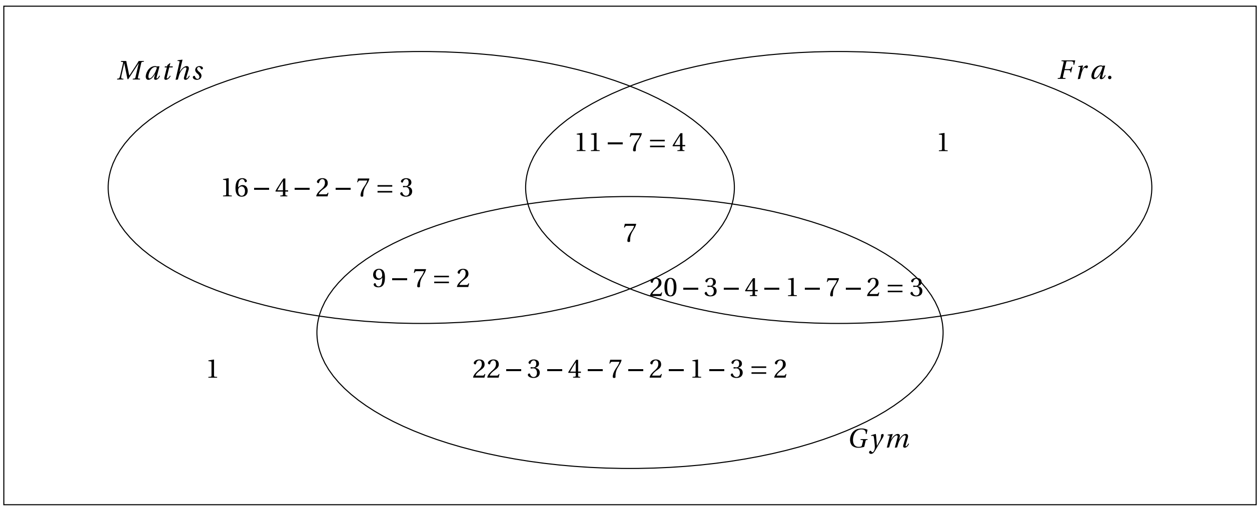
Exercice 2.4

a) $\{d\,;e\,;f\}$ d) $\{a\,;b\,;c\,;d\}$ g) $\{a\}$

b) $\{a\,;e\,;f\}$ e) $\{a\,;d\,;e\,;f\}$ h) $\{d\}$

c) $\{b\,;c\}$ f) $\{e\,;f\}$ i) $\varnothing$

Exercice 2.5



Exercice 2.6 a) A c) A e) A

b) $\varnothing$ d) E f) A

Exercice 2.7 a) A b) B

Exercice 2.8 Il y a 30 élèves dans la classe dont 11 font de la musique.

Exercice 2.9 45 élèves n'étudient que le latin, 15 que l'italien et 55 aucune des trois langues.

Exercice 2.10 a) $(\overline{A \cup B \cup C}) \cup (A \cap B \cap C)$ b) $A \setminus (B \cup C)$ c) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (C \cap B)$

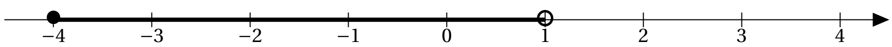
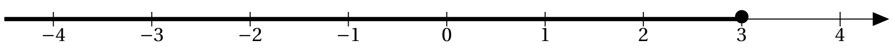
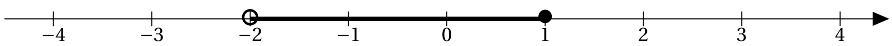
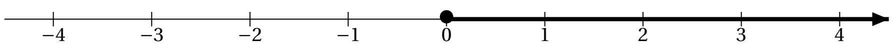
3 Les intervalles

Exercice 3.1 $[1{,}68\,;\,+\infty[$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1{,}68\}$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid 1{,}68 \leq x\}$

Exercice 3.2 $]600\,;\,660]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 600 < x \leq 660\}$

Exercice 3.3 $[13{,}5\,;\,26{,}5]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 13{,}5 \leq x \leq 26{,}5\}$

Exercice 3.4

Inégalité	**Axe**	**Intervalle**
$-4 \leq x < 1$		$[-4\,;\,1[$
$x \leq 3$		$]-\infty\,;\,3]$
$-2 < x \leq 1$		$]-2\,;\,1]$
$0 \leq x$		$[0\,;\,+\infty[$

Exercice 3.5

a) $]4\,;\,23[$

b) $]-35\,;\,-2]$

c) $[-8\,;\,+\infty[$

d) $]-\infty\,;\,4{,}5[$

e) $[\pi\,;\,\frac{23}{2}]$

f) $]-\frac{4}{5}\,;\,2{,}4]$

g) $[\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$

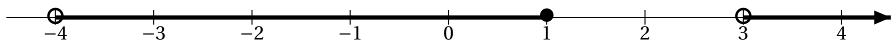
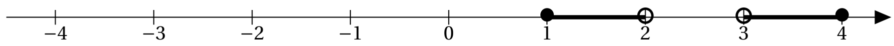
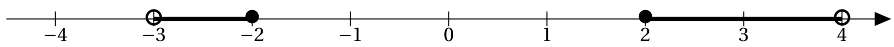
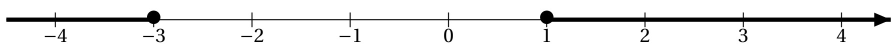
h) $]1\,;\,1{,}5]$

i) $]-\infty\,;\,2[$

j) $\{\ldots\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\}$

k) $\varnothing$

Exercice 3.6

Inégalité	**Axe**	**Intervalle**
$-4 < x \leq 1$ ou $x > 3$		$]-4;1] \cup]3;+\infty[$
$1 \leq x < 2$ ou $3 < x \leq 4$		$[1;2[\cup]3;4]$
$-3 < x \leq -2$ ou $2 \leq x < 4$		$]-3;-2] \cup [2;4[$
$x \leq -3$ ou $x \geq 1$		$]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$

Exercice 3.7

a) $[-7\,;\,+\infty[$
b) $]0\,;\,3]$
c) $[-7\,;\,0]$
d) $]3\,;\,+\infty[$
e) $]-\infty\,;\,-7[\cup]3\,;\,+\infty[$
f) $]-\infty\,;\,0]$

Exercice 3.8

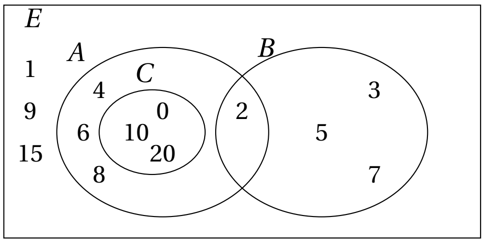
a) $]-\infty\,;\,3]\cup]5\,;\,+\infty[$
b) $\emptyset$
c) $]-\infty\,;\,3]$
d) $]5\,;\,+\infty[$
e) $]3\,;\,+\infty[$
f) $]-\infty\,;\,5]$

Exercice 3.9

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 3\}$

4 Liens entre ensembles et logique

Exercice 4.1



$C \subset A$

être un multiple de 10 $\Longrightarrow$ être pair

Exercice 4.2

a) vrai
b) faux
c) faux (contre-ex. : 2)
d) faux (contre-ex. : 35)
e) vrai

Exercice 4.3

a) vrai
b) faux (contre-ex. : fer-de-lance)
c) faux (contre-ex. : 8)
d) vrai
e) faux (même si c'est souvent vrai !)

Exercice 4.4

a) ne pas être un mammifère $\Longrightarrow$ ne pas être un dauphin
b) x n'est pas un multiple de 10 $\Longrightarrow$ x n'est pas un multiple de 20
c) ne pas être un rectangle $\Longrightarrow$ ne pas être un carré
d) x n'a pas exactement deux diviseurs $\Longrightarrow$ x n'est pas un nombre premier
e) être un triangle $\Longrightarrow$ ne pas être un quadrilatère
f) x n'est pas divisible par 6 $\Longrightarrow$ x n'est pas divisible par 2 **ou** x n'est pas divisible par 3
g) ne pas être au début du dictionnaire $\Longrightarrow$ être un mot qui ne commence **ni** par a, **ni** par b

Exercice 4.5

a) voler un oeuf $\Longrightarrow$ voler un boeuf
ne pas voler un boeuf $\Longrightarrow$ ne pas voler un oeuf

b) être un chat $\Longrightarrow$ être gris la nuit
ne pas être gris la nuit $\Longrightarrow$ ne pas être un chat

c) être une pierre qui roule $\Longrightarrow$ ne pas amasser de la mousse
amasser de la mousse $\Longrightarrow$ ne pas être une pierre qui roule

d) être une tête intelligente $\Longrightarrow$ se protéger
ne pas se protéger $\Longrightarrow$ ne pas être une tête intelligente

Exercice 4.6

A) avoir gagné $\Longrightarrow$ avoir tiré un jeton bleu ou un jeton jaune

B) Un jeu dans lequel on gagne si l'on tire soit un jeton bleu, soit un jaune, soit un rouge.

C) a, b, f

D) c et g

5 Les quantificateurs

Exercice 5.1

a) Pour tout nombre réel non nul, il existe un unique nombre réel tel que leur produit soit égal à 1. (C'est $\frac{1}{x}$, l'inverse de x) Exemple : -7 et $-\frac{1}{7}$

b) Un nombre x est pair si et seulement si il existe un nombre entier k tel que x soit égal au double de k. Exemple : $k = 6$ pour $x = 12$

Exercice 5.2

a) $\forall\ d, e$ droites : d est parallèle à e $\Longleftrightarrow$ $\forall\ P \in d,\ P \notin e$.

b) $\forall\ a, b \in \mathbb{N}$: $pgdc(a;b) = 1 \Longrightarrow ppmc(a;b) = a \cdot b$

Exercice 5.3

a) Les **carrés** sont des **rectangles** .

b) Les **rectangles** peuvent être des **carrés** .

c) $\forall$ $ABCD$ **carré** , $ABCD$ est un **rectangle** .

d) Tous les **carrés** sont des **rectangles** .

e) $ABCD$ est un **carré** $\Longrightarrow$ $ABCD$ est un **rectangle** .

f) $\exists$ $ABCD$ **rectangle** tel que $ABCD$ est un **carré** .

g) Les **rectangles** ne sont pas des **carrés** .

6 Démonstrations

Exercice 6.1

a) triangles : $n = 3$ — somme des angles $= 180 \cdot (3 - 2) = 180°$
quadrilatères : $n = 4$ — somme des angles $= 180 \cdot (4 - 2) = 360°$
H : un polygone à n côtés — **C :** la somme des angles $= 180 \cdot (n - 2)$

b) exemples : faire les dessins de deux triangles rectangles, mesurer et calculer.
H : un triangle rectangle
C : le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés

c) $30 = 3 \cdot 10$ et $7770 = 777 \cdot 10$
H : un nombre entier avec 0 pour le chiffre des unités
C : c'est un multiple de 10

d) $3 \cdot 10 = 30$ et $777 \cdot 10 = 7770$
H : un multiple de 10 — **C :** son chiffre des unités est 0

Exercice 6.2

a) carré de 10 cm de côté — aire $= 100$ cm^2
carré de $10 \cdot 2 = 20$ cm de côté — aire $= 400 = 4 \cdot 100$ cm^2

carré de 3 cm de côté — aire $= 9$ cm^2
carré de $3 \cdot 2 = 6$ cm de côté — aire $= 36 = 4 \cdot 9$ cm^2

H : Soit un carré de côté x et un deuxième carré de côté $2x$.
C : Si A est l'aire du premier carré, alors l'aire du deuxième carré vaut $4 \cdot A$.
D : Aire du premier carré : $A = x^2$.
Aire du deuxième carré : $(2x)^2 = 4x^2 = 4 \cdot A$ ♯

b) carré d'aire $= 100$ cm^2 — côtés $= \sqrt{100} = 10$ cm
carré d'aire $= 4 \cdot 100 = 400$ cm^2 — côtés $= \sqrt{400} = 20 = 2 \cdot 10$ cm

carré d'aire $= 9$ cm^2 — côtés $= \sqrt{9} = 3$ cm
carré d'aire $= 4 \cdot 9 = 36$ cm^2 — côtés $= \sqrt{36} = 6 = 2 \cdot 3$ cm

H : Soit un carré d'aire A et un deuxième carré d'aire $4 \cdot A$.
C : Les dimensions du deuxième carré sont le double de celles du premier.
D : Notons x la longueur des côtés du premier carré.
Côtés du premier carré : $x = \sqrt{A}$
Côtés du deuxième carré : $\sqrt{4 \cdot A} = 2\sqrt{A} = 2x$ ♯

c) $3 \cdot 4 = 12$ qui est pair. $10 \cdot 11 = 110$ qui est pair.

H : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m = n + 1$.

C : $n \cdot m$ est pair

D : Si n est pair $\Longrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k$ $\Longrightarrow$ $n \cdot m = 2km$ est pair.

Si n est impair $\Longrightarrow$ m pair $\Longrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N},\ m = 2k$

$\Longrightarrow$ $n \cdot m = 2kn$ est pair. $\sharp$

d) $(-\frac{1}{5}) + \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{19}{15}$

H : Soit $x, y \in \mathbb{Q}$

C : $x + y \in \mathbb{Q}$

D : $\exists\ p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ tels que, $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{r}{s}$

$x + y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s}{q \cdot s} + \frac{q \cdot r}{q \cdot s} = \frac{p \cdot s + q \cdot r}{q \cdot s} \in \mathbb{Q}$ $\sharp$

Exercice 6.3

a) **H :** Soit $x \in \mathbb{Z}$

C : $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$

Faux : si $x = 2$, son inverse $= \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

b) **H :** Soit $x \in \mathbb{Z}$

C : $\frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$

Faux : si $x = 1$, son inverse $= \frac{1}{1} = 1 \in \mathbb{Z}$

c) **H :** Soit $x, y \in \mathbb{Q}^*$

C : $x : y \in \mathbb{Q}$

D : $\exists p, q, r, s \in \mathbb{Z}^*$, tels que $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{r}{s}$

$x : y = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{p \cdot s}{q \cdot r} \in \mathbb{Q}$ $\sharp$

d) **H :** Soit x, y impairs

C : $x - y$ est pair

D : $\exists m, n \in \mathbb{N}$, tels que $x = 2m + 1$ et $y = 2n + 1$

$\Longrightarrow$ $x - y = (2m + 1) - (2n + 1) = 2m - 2n = 2(m - n)$ est pair. $\sharp$

Exercice 6.4

a) faux, contre exemple : 3 car $\frac{3}{4}$ n'est pas un entier positif.

b) vrai, par exemple : 40 car $\frac{40}{4}$ est un entier positif.

c) faux, on pouvait choisir 40 ou 8 ou 44 donc pas unique.

d) faux, contre-exemple 0 car $0 \cdot y = 0 \neq 1$.

e) vrai, car $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ et $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$.

f) faux, contre-exemple 2 car si $2 \cdot y = 1$ alors $y = \frac{1}{2}$ qui n'est pas entier.

Exercice 6.5

a) Contre-exemple : 0,5 car son double est 1 et 0,5 + 1 = 1,5 n'est pas un multiple de 3. (ou tout autre nombre positif non entier)

b) Soit x un nombre réel et y son double. Si $x+y$ est un multiple de 3 alors x est entier.

c) H : $x \in \mathbb{R}$, $y = 2x$, $x + y = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$ C : $x \in \mathbb{N}$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = 2x$, si $x \notin \mathbb{N}$ alors $\nexists k \in \mathbb{N}$ tel que $x + y = 3k$.

e) Soit $x \in \mathbb{N}$ et $y = 2x$, alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $x + y = 3k$.

Références

[1] *Logique et ensembles* de *Monsieur Amaudruz* du gymnase du Bugnon.

[2] Cours et exercices de *Monsieur Bovet* du gymnase de Beaulieu.

[3] *Vocabulaire sur les ensembles* de *Monsieur Nicollerat* du gymnase du Bugnon.

[4] *Quelques notions de logique* de *Monsieur Marville,* du gymnase du Bugnon.

[5] *Notions élémentaires d'algèbre et de trigonométrie 1MRenf* de *Monsieur Javet,* du gymnase de Morges.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en nous envoyant un mail à :

sarah.delmonico@vd.educanet2.ch
cedric.delmonico@vd.educanet2.ch

Version du 27 août 2022