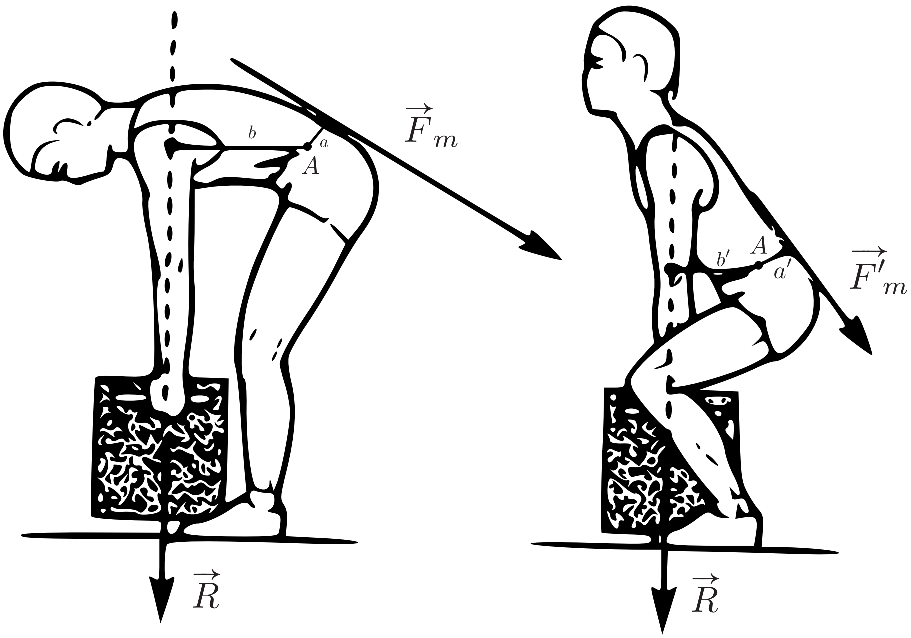
Géométrie Vectorielle

2C option santé

Jean-Philippe Javet



1

Vecteurs, base et composantes

1.1 Les vecteurs

1.1.1 La notion de vecteur

Définition: Un **vecteur** non nul est caractérisé par la donnée de trois éléments : une **direction**, un **sens** et une **longueur** (appelée aussi **norme**).

Pour dessiner un vecteur, on choisit un point à partir duquel on trace une flèche qui a la direction, le sens et la longueur souhaités.

de même direction　　de même sens　　de même longueur

Un **vecteur nul** est un vecteur de longueur zéro. Sa direction et son sens ne sont pas définis. Un tel vecteur se dessine à l'aide d'un point.

On note généralement les vecteurs à l'aide de minuscules surmontées d'une flèche : $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...

Pour deux points A et B, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur qui peut se dessiner à l'aide d'une flèche joignant A à B.

Le vecteur nul est noté $\vec{0}$. Pour tout point P, on a $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$.

Définition: On note V_2 l'ensemble de tous les vecteurs du plan et V_3 l'ensemble de tous les vecteurs de l'espace.

---

2 critères: Citons deux critères exprimant l'égalité entre deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff ABCD \text{ est un parallélogramme (éventuellement dégénéré).}$$
$$\iff \text{La translation qui envoie } A \text{ sur } B \text{ envoie aussi } D \text{ sur } C.$$

De cette manière, un vecteur peut être considéré comme un *ensemble de flèches* qui ont :

a) même direction,

b) même sens,

c) même longueur.

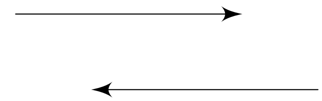
Généralement, on dessine un tel vecteur à l'aide d'*une seule* flèche, appelée **représentant**.

Exemple 1: Soit $ABCD$ un parallélogramme. Regrouper tous les représentants de chaque vecteur que l'on peut définir à l'aide des lettres de cette figure.

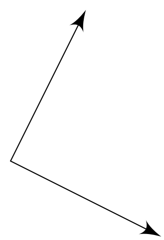
Exercice 1.1: Pour chaque paire de flèches, dire si elles sont le représentant d'un même vecteur ou pas. Justifier vos réponses en termes de : "direction" "sens" et "longueur".

a)

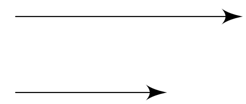
b)



c)

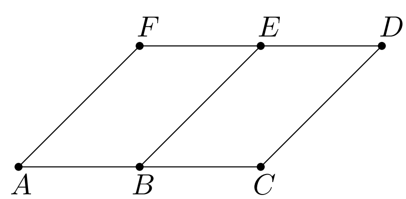


d)

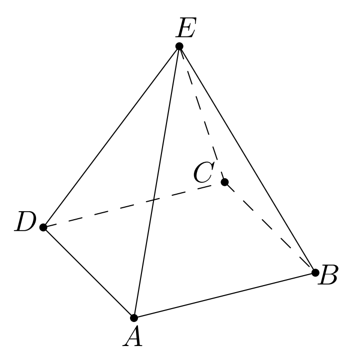


Exercice 1.2: Donner un représentant pour chaque vecteur pouvant se définir à l'aide des sommets de chacune des figures ci-dessous.

a) Parallélogramme

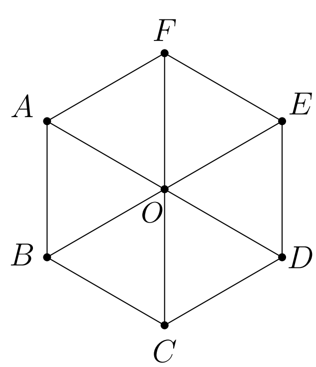


b) Pyramide à base carrée



Dans la figure qui suit, donner le nombre de vecteurs différents que l'on peut définir à l'aide des différentes lettres.

c) Hexagone régulier



1.1.2 Opérations sur les vecteurs du plan ou de l'espace

Définition: Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs.

- La **somme** (addition) $\vec{a} + \vec{b}$:

  On choisit un point A, et l'on note par B le point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ et par C celui pour lequel $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

  Ainsi $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$:

- L'**opposé** $-\vec{a}$ de $\vec{a}$:

  On choisit un point A, et l'on note par B le point tel que $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$.

- La **différence** (soustraction) $\vec{a} - \vec{b}$:

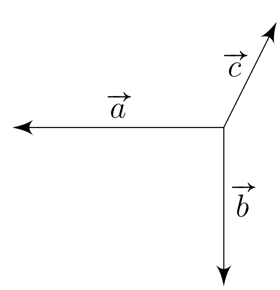
  À l'aide de ce qui précède, on définit la **soustraction** par :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

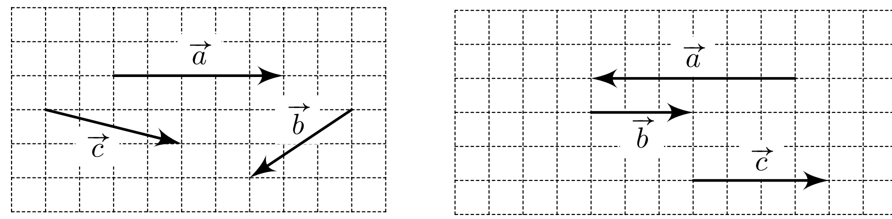
Exercice 1.3:

a) Construire la somme des trois vecteurs ci-dessous.

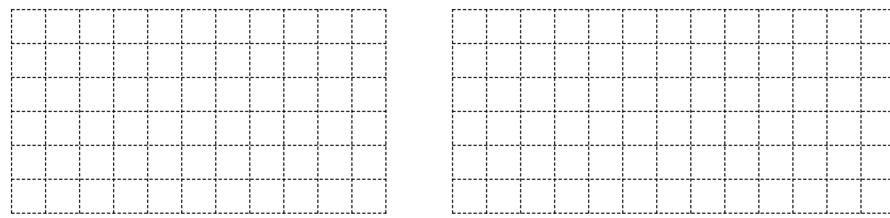
b) Représenter trois vecteurs non nuls, n'ayant pas la même direction, et dont la somme est le vecteur nul.



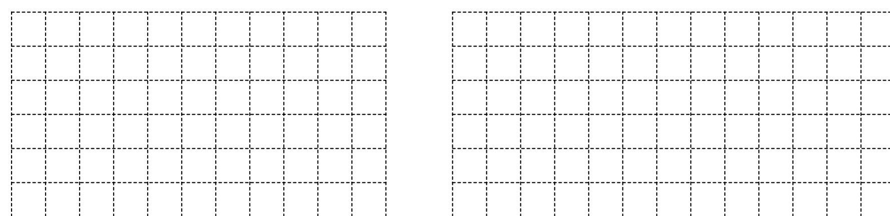
Exercice 1.4: Construire dans chacun des deux cas le vecteur demandé.



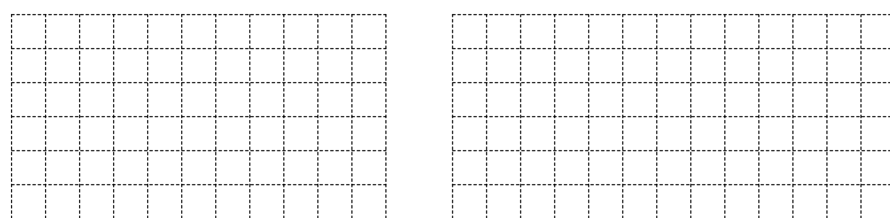
a) le vecteur $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



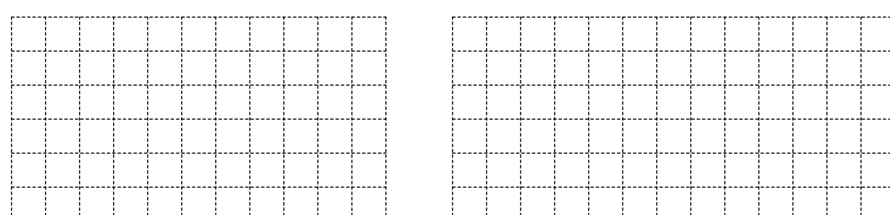
b) le vecteur $\vec{w} = \vec{b} - \vec{c} + \vec{a}$



c) le vecteur $\vec{z} = \vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$

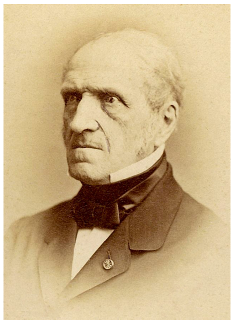


d) le vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$



Propriétés: Pour tous points A, B et C, on a :

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *(règle de Chasles)*
- $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$



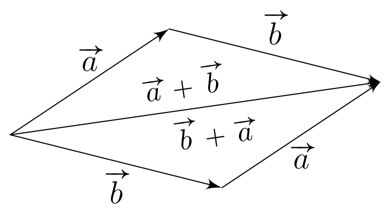
Michel Chasles
(1793 - 1880)

Quels que soient les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, on a :

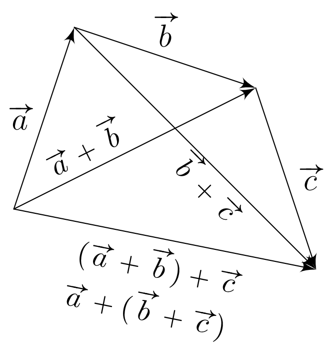
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (*commutativité*)
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (*associativité*)
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ($\vec{0}$ *est élément neutre*)
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ($-\vec{a}$ *est l'opposé de* $\vec{a}$)

Justification: Les deux premières égalités découlent immédiatement des définitions. Les autres sont illustrées ci-dessous :

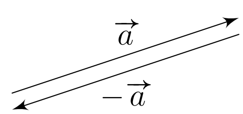
- commutatitivé :



- associativité :



- élément neutre : évident.
- opposé :



Exemple 2: Soient A, B, C, D des points quelconques de l'espace. Simplifier l'expression :

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$$

Exercice 1.5: Soit A, B, C, D et E des points quelconques du plan ou de l'espace, simplifier le plus possible les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ **b)** $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$

c) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$ **d)** $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$

Exercice 1.6: On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$ représenté sur la figure. Exprimer plus simplement les vecteurs suivants :

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$

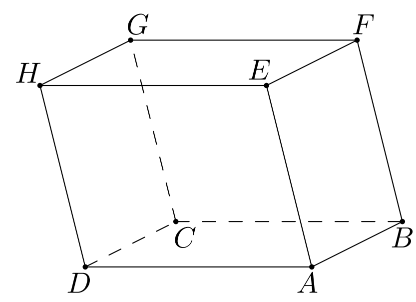
b) $\vec{b} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CD}$

c) $\vec{c} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$

d) $\vec{d} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$

e) $\vec{e} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$

f) $\vec{f} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$



Exercice 1.7: Associer à chaque égalité vectorielle la phrase correspondante et, dans chaque cas, illustrer par une figure :

1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ **A.** $ABCD$ est un parallélogramme

2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **B.** $ABDC$ est un parallélogramme

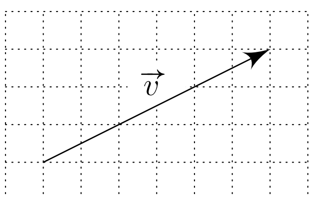
3. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ **C.** D est le milieu de AB

4. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ **D.** $ADBC$ est un parallélogramme

Définition: Soit $\overrightarrow{a}$ un vecteur et k un nombre réel.

- Si k est positif, le vecteur $k \cdot \overrightarrow{a}$ (que l'on peut également écrire $k\overrightarrow{a}$) est défini par :
  - **a)** sa direction et son sens sont les mêmes que ceux de $\overrightarrow{a}$,
  - **b)** sa norme est égale à k fois celle du vecteur $\overrightarrow{a}$.
- Si k est négatif, le vecteur $k\overrightarrow{a}$ est défini comme l'opposé de celui considéré avec k positif.

Exercice 1.8: Reproduire le vecteur $\overrightarrow{v}$ dans votre cahier puis construire les vecteurs :

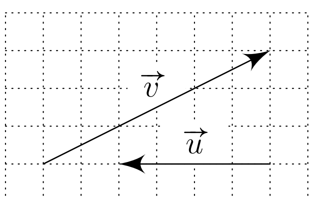


a) $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{v}$ **b)** $\overrightarrow{b} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{v}$

c) $\overrightarrow{c} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{v}$ **d)** $\overrightarrow{d} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{v}$

e) $\overrightarrow{e} = \dfrac{11}{6}\overrightarrow{v}$

Exercice 1.9: Reproduire les vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans votre cahier puis construire les vecteurs :



a) $\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{v} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{v}$ puis $\overrightarrow{a_2} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{v}$

b) $\overrightarrow{b_1} = \dfrac{3}{4}(-\overrightarrow{u})$ puis $\overrightarrow{b_2} = -\dfrac{3}{4}\overrightarrow{u}$

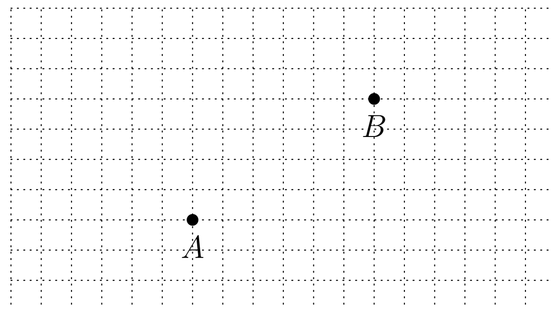
c) $\overrightarrow{c_1} = 2\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$ puis $\overrightarrow{c_2} = 2\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$

Que constatez-vous ?

Propriétés: Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et les nombres réels k, m, on a :

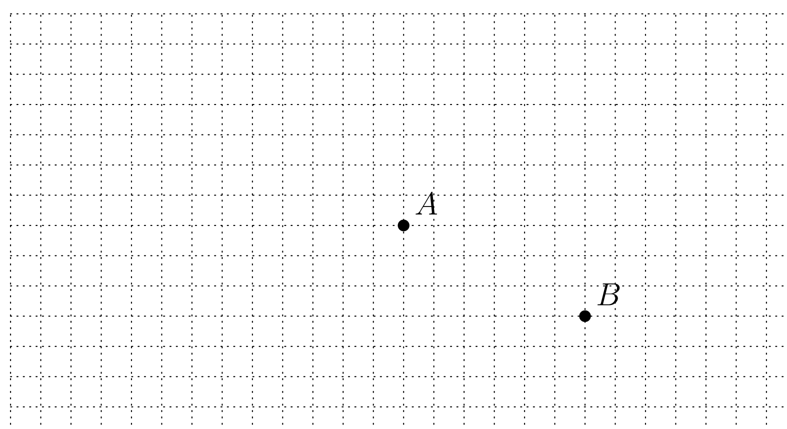
- $k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$
- $(k+m)\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{a}$
- $k(m\overrightarrow{a}) = (km)\overrightarrow{a}$
- $1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$
- $(-1)\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$
- $k(-\overrightarrow{a}) = (-k)\overrightarrow{a} = -(k\overrightarrow{a})$
- $0\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$
- $k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$

Exemple 3: Représenter le point P pour lequel l'égalité vectorielle suivante est vérifiée : $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

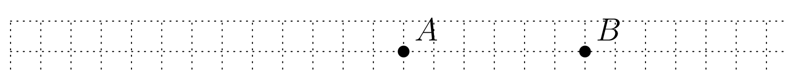


Exercice 1.10: Même consigne que l'exemple précédent :

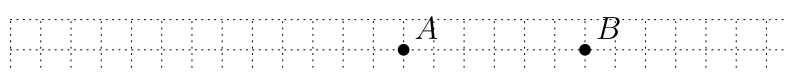
a) $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{AB}$



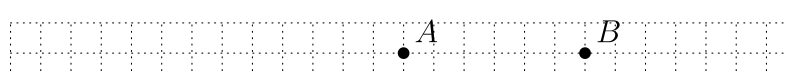
b) $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



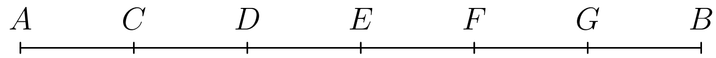
c) $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{PB}$



d) $\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$



Exercice 1.11: Le segment AB est divisé en 6 parties de même longueur.

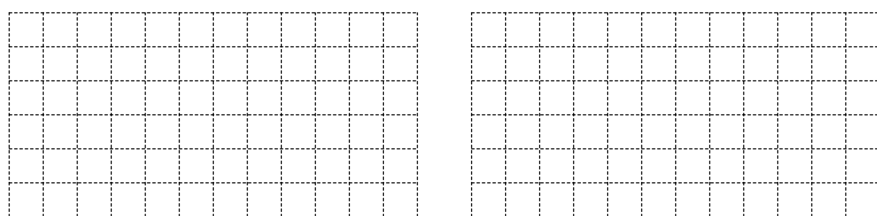


Compléter les relations suivantes par :

- la lettre qui convient :	- le nombre qui convient :
1) $\overrightarrow{E\ldots} = -2\overrightarrow{EF}$	**4)** $\overrightarrow{CE} = \ldots\overrightarrow{AB}$
2) $\overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{\ldots F} = \overrightarrow{0}$	**5)** $\overrightarrow{AD} = \ldots\overrightarrow{BF}$
3) $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\ldots}$	**6)** $\overrightarrow{DE} = \ldots\overrightarrow{BF}$

Exercice 1.12: Reprendre les vecteurs de l'exercice 1.4 et représenter le vecteur :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \frac{3}{2}\overrightarrow{c}$$



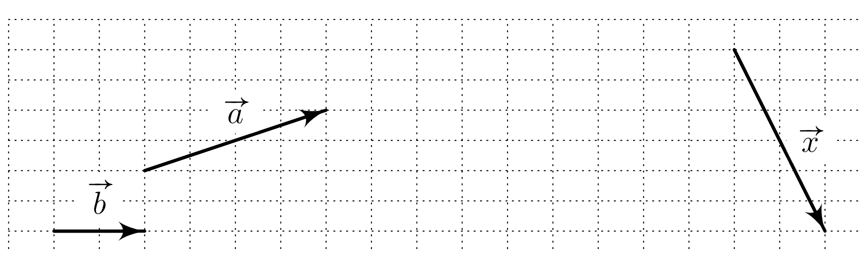
*Dans cet exercice, on dira que le vecteur $\overrightarrow{v}$ s'écrit comme **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ admettant comme **coefficients** respectivement 1, 2 et $-\frac{3}{2}$. Plus généralement :*

Définition: On dit que le vecteur $\overrightarrow{a}$ est **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, ..., $\overrightarrow{e_n}$, s'il existe des nombres réels a_1, ..., a_n tels que :

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + ... + a_n\overrightarrow{e_n}$$

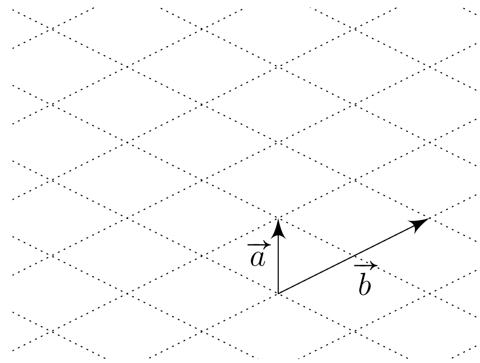
Les nombres $a_1, \ldots, a_n$ s'appellent les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple 4: Décomposer graphiquement le vecteur $\overrightarrow{x}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.



Exemple 5: Construire ci-dessous les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ définis par les combinaisons linéaires suivantes :

$$\vec{v} = 3\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} \qquad \text{et} \qquad \vec{w} = 2\vec{a} + \vec{b}$$



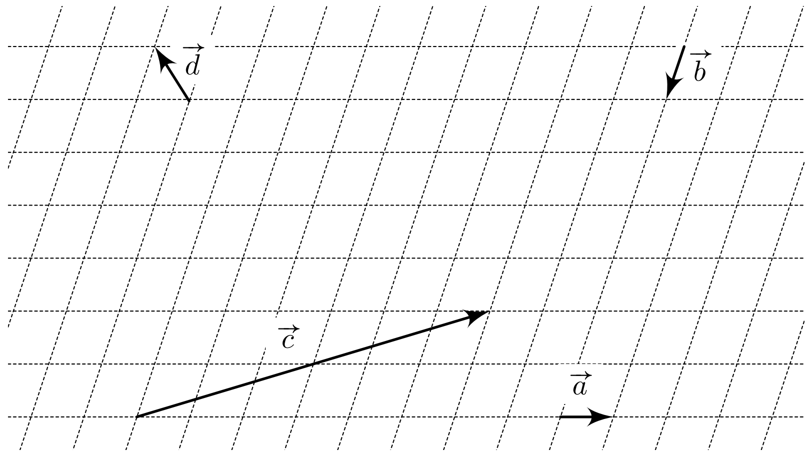
Exprimer ensuite les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 1.13: Par rapport aux vecteurs de la figure ci-dessous :

a) Exprimer $\vec{c}$ puis $\vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

b) On considère le vecteur $\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{c} - 5\vec{d}$.
Exprimer $\vec{x}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

c) Exprimer $\vec{a}$ puis $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{c}$ et $\vec{d}$.



Exercice 1.14: Soit $ABCD\ EFGH$ un cube pour lequel on pose :

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{c} = \overrightarrow{AE}.$$

Soit M le milieu de $[FG]$, N celui de $[HG]$ et P le centre de $ABCD$.

Exprimer les vecteurs suivants comme combinaisons linéaires de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{EP}\ ,\ \overrightarrow{EM}\ ,\ \overrightarrow{EN}\ ,\ \overrightarrow{NM}\ ,\ \overrightarrow{PN}\ ,\ \overrightarrow{NP}\ ,\ \overrightarrow{PM}$$

Exercice 1.15: Soit $ABCD$ un parallélogramme pour lequel on pose :

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{b} = \overrightarrow{AD}.$$

Soit M le milieu de $[BC]$ et P un point tel que $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PC}$.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{DM}$ comme combinaisons linéaires de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Exercice 1.16: Représenter un carré $OABC$, puis construire les points E, F et G tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OC} \quad ; \quad \overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BO}$$

Exercice 1.17: Exprimer $\vec{v}$ en fonction de $\vec{a}$ et de $\vec{b}$ si :

$$3(\vec{a} - 2\vec{v}) - 6\vec{b} = -7\left(\frac{15}{7}\vec{v} - 3\vec{b}\right) + 12\vec{a}$$

1.1.3 La géométrie vectorielle pour démontrer...

Exemple 6: Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On désigne par M et N les points milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$. Montrer que :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}\right)$$

Exercice 1.18: Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit E le milieu de $[BC]$, F le milieu de $[DC]$. Montrer que

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

Exercice 1.19: On donne le quadrilatère $ABCD$. Soit P, Q, R et S les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

a) Montrer l'égalité vectorielle $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SR}$

b) Que peut-on en déduire au sujet du quadrilatère $PQRS$?

Exercice 1.20: $ABCD$ est un parallélogramme. Les points M, N, P et Q sont tels que :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{DQ} = 2\overrightarrow{DA}.$$

Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.

Exercice 1.21: Montrer que si le quadrilatère $ABCD$ admet des diagonales qui se coupent en I, leur point milieu alors $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 1.22: Soit cinq points O, A, B, C et D tels que :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

1.1.4 Tests de colinéarité et de coplanarité

Définition: Des vecteurs du plan ou de l'espace sont dits **colinéaires** s'il est possible de les représenter sur une même droite.

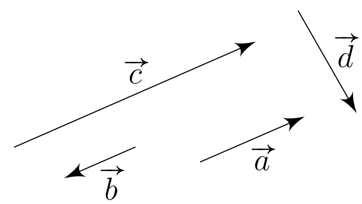
Exemple 7: Les vecteurs listés ci-dessous sont-ils colinéaires ?

a) $\vec{a}$ et $\vec{b}$

b) $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$

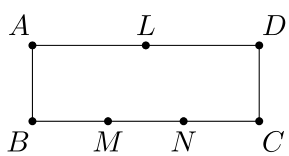
c) $\vec{a}$ et $\vec{d}$

d) $\vec{d}$ et $\vec{0}$

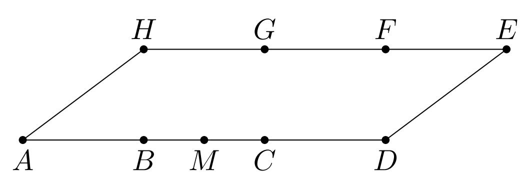


Critère: Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si l'un d'entre eux peut s'écrire comme **le produit de l'autre par un nombre réel**.

Exemple 8: Sur le rectangle proposé, donner un représentant de chaque vecteur colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AD}$.



Exercice 1.23: Sur le parallélogramme de la figure ci-dessous, les points G et F divisent le segment $[HE]$ en trois parties égales, les points B et C divisent $[AD]$ en trois parties égales et M est le milieu de $[BC]$. Donner un représentant de chaque vecteur colinéaire à $\overrightarrow{HG}$.



Exercice 1.24: Soit ABC un triangle. Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs suivants :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB}$$

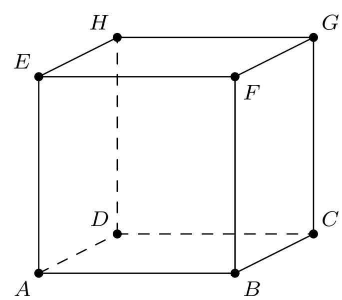
$$\vec{v} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB}$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

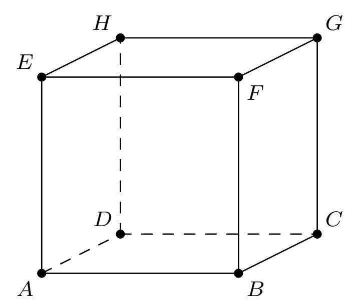
Définition: Des vecteurs de l'espace sont **coplanaires** s'il est possible de les représenter dans un même plan.

Exemple 9: On considère un cube $ABCD\,EFGH$. Les triplets de vecteurs proposés sont-ils coplanaires ?

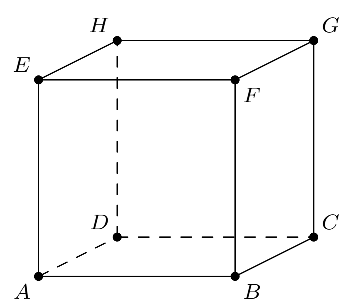
a) $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AH}$



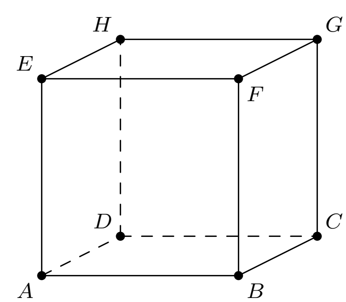
b) $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AD}$



c) $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CD}$



d) $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{HF}$



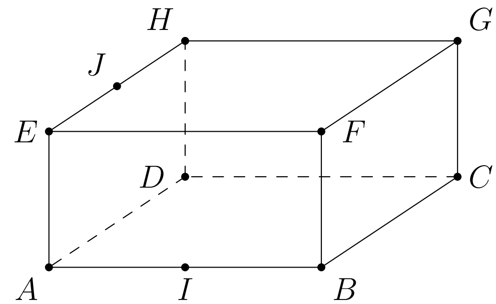
Remarque: Deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires.

Critère: Trois vecteurs de l'espace sont coplanaires si et seulement si l'un de ces trois vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres.

Dans l'exple ci-dessus:

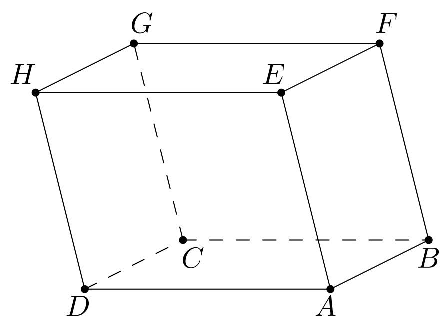
Exemple 10: Considérons le parallélépipède $ABCDEFGH$ et notons I, J les milieux des segments $[AB]$ et $[EH]$ respectivement.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont coplanaires.

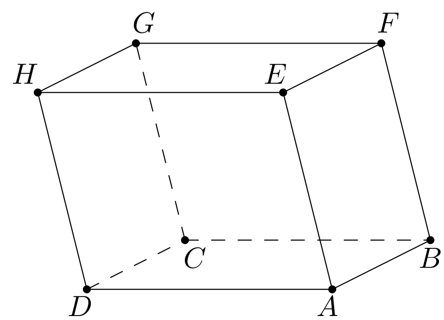


Exercice 1.25: On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$. Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Si tel est le cas, exprimer le premier vecteur proposé comme combinaison linéaire des deux autres.

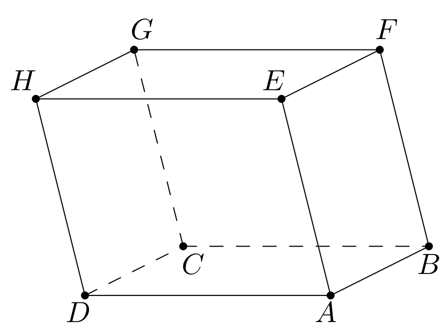
a) $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DG}$



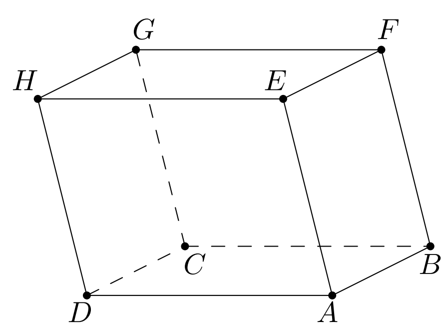
b) $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{AB}$



c) $\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{CD}$

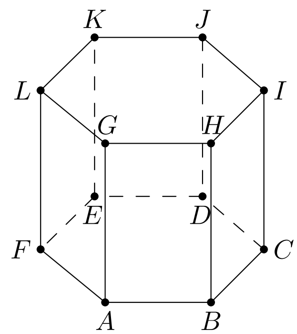


d) $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{GH}$

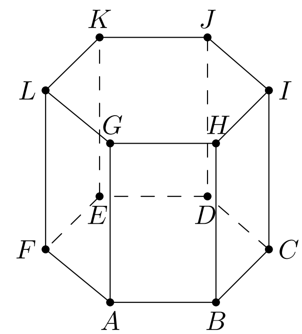


Exercice 1.26: On considère le prisme $ABCDEF\ GHIJKL$ dont les bases sont des hexagones réguliers. Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Si tel est le cas, exprimer le premier vecteur proposé comme combinaison linéaire des deux autres.

a) $\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{BC}$

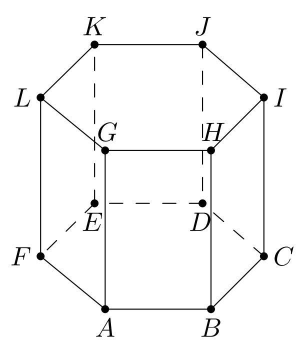


b) $\overrightarrow{LG}, \overrightarrow{ID}, \overrightarrow{KB}$

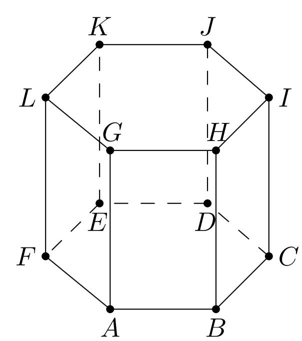


Exercice 1.27: Même consigne que l'exercice précédent

a) $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{JD}, \overrightarrow{HI}$



b) $\overrightarrow{KF}, \overrightarrow{CH}, \overrightarrow{GD}$

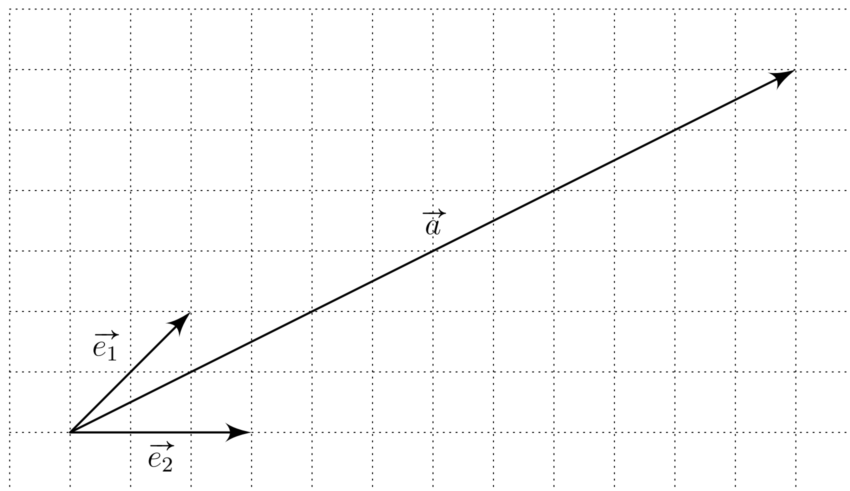


1.2 Bases et composantes

1.2.1 Dans le plan

Considérons deux vecteurs de V_2 non colinéaires $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$, et soit $\vec{a}$ un vecteur quelconque de V_2.

Nous avons déjà observé qu'il n'y a qu'une manière de décomposer $\vec{a}$ comme combinaison linéaire de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$, c'est-à-dire d'écrire $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$



☞ Sur la figure ci-dessus : $\vec{a} = \ldots \vec{e_1} + \ldots \vec{e_2}$

Définition: Deux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ du plan, qui ne sont pas colinéaires forment, dans cet ordre, une **base** de V_2, notée $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$.

Pour chaque vecteur $\vec{a}$ du plan, les nombres réels a_1 et a_2, tel que $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$ s'appellent les **composantes** de $\vec{a}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

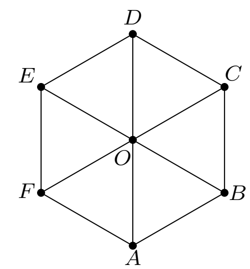
Pour noter un vecteur, on privilégie la **notation en colonne** :

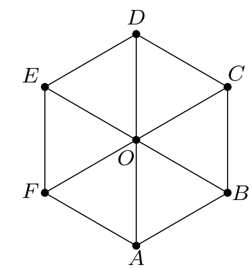
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \iff \vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$$

☞ Sur la figure ci-dessus : $\vec{a} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Exemple 11: Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{DB}$ dans les deux bases :

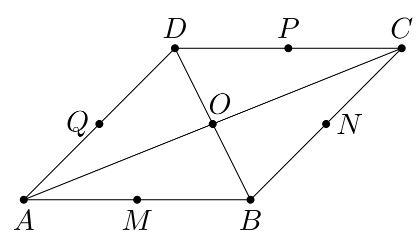
$\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{EF}\,;\overrightarrow{DE})$





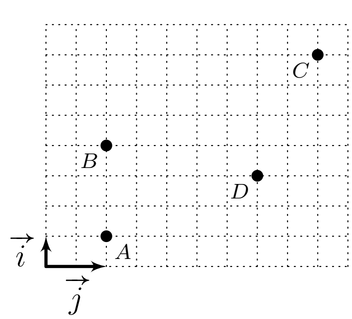
Remarque: Les composantes d'un vecteur sont définies par rapport à une base déterminée ; le changement de base implique inévitablement un changement de ses composantes.

Exercice 1.28: Les points M, N, P et Q sont les milieux des côtés du parallélogramme $ABCD$.



- Donner, dans la base $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{CM}$.
- Même question, mais relativement à la base $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AM})$.

Exercice 1.29: On donne une base $\mathcal{B} = (\vec{i}\,;\vec{j})$ de vecteurs. Dans cette base :



- Exprimez les vecteurs suivants comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$

  a) $\overrightarrow{AB} = \ldots$ **b)** $\overrightarrow{AC} = \ldots$ **c)** $\overrightarrow{BC} = \ldots$

- Déterminer les composantes des vecteurs suivants dans la base $\mathcal{B}$

  d) $\overrightarrow{CA} = \ldots$ **e)** $\overrightarrow{AD} = \ldots$ **f)** $\overrightarrow{CD} = \ldots$

Règles de calcul: Soit $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ une base du plan relativement à laquelle :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

et soit k un nombre réel. On a les 3 règles suivantes :

- $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$
- $k\vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$
- $\vec{a} = \vec{b} \iff \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$

Exemple 12: Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on considère les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Calculer

  a) $\vec{a} - \vec{b} =$

  b) $4\vec{a} =$

  c) $2\vec{a} + 3\vec{b} =$

- Montrer que $5\vec{a} = -10\vec{b}$

Exercice 1.30: Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$ **b)** $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c}$ **c)** $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Exercice 1.31: Dans une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les deux vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Déterminer les composantes d'un vecteur $\vec{v}$ qui s'écrit comme la combinaison linéaire suivante :

$$\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b}.$$

Exercice 1.32: Dans une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les trois vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -16 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Exprimer $\vec{u}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Exercice 1.33: Sur une feuille quadrillée de votre cahier, représenter deux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ non colinéaires.

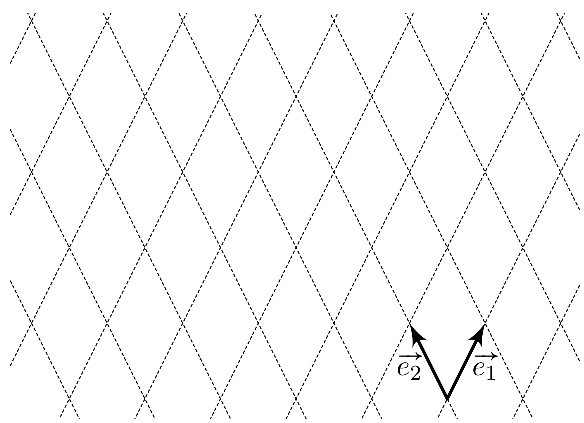
Considérer alors la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$. Par rapport à cette base, on définit les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Déterminez graphiquement les composantes de $\vec{c}$ dans la base $\left(\vec{a}\,;\vec{b}\right)$ (valeurs approchées).

b) Calculez les composantes de $\vec{c}$ dans la base $\left(\vec{a}\,;\vec{b}\right)$ (valeurs exactes).

Exercice 1.34: On considère la figure suivante :



a) Représenter les vecteurs suivants, dont les composantes sont données, relativement à la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$:

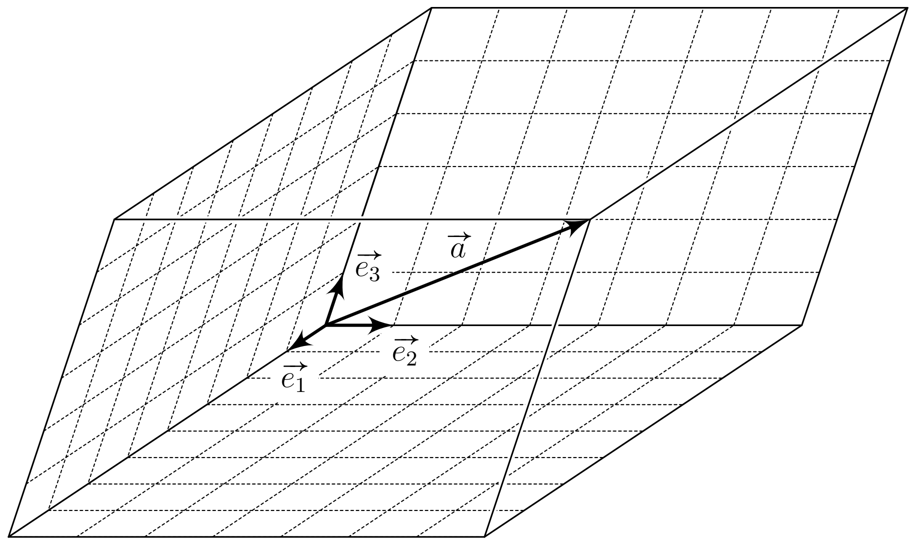
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

b) Représenter les vecteurs $\vec{v} = \vec{d} - \vec{c}$ et $\vec{w} = \dfrac{3}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{d}$, puis donner leurs composantes dans $\mathcal{B}$.

1.2.2 Dans l'espace

Ce qui a été vu et défini dans le cas du plan se généralise au cas de l'espace.

Lorsque l'on travaille dans V_3, on part de la constatation que tout vecteur $\overrightarrow{a}$ peut s'exprimer d'une seule manière comme combinaison linéaire de trois vecteurs non coplanaires $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$.



☞ Sur la figure ci-dessus : $\overrightarrow{a} = \ldots \overrightarrow{e_1} + \ldots \overrightarrow{e_2} + \ldots \overrightarrow{e_3}$

Définition: Trois vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ de l'espace, qui ne sont pas coplanaires forment, dans cet ordre, une **base** de V_3, notée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2}\,;\overrightarrow{e_3})$.

Pour chaque vecteur $\overrightarrow{a}$ du plan, les nombres réels a_1, a_2 et a_3, tel que $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + \ a_2\overrightarrow{e_2} + \ a_3\overrightarrow{e_3}$ s'appellent les **composantes** de $\overrightarrow{a}$ relativement à la base $\mathcal{B}$

Pour noter un vecteur, on privilégie la **notation en colonne** :

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$$

☞ Sur la figure ci-dessus : $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

Règles de calcul: Les règles de calculs dans V_3 sont semblables à celles dans V_2

Exemple 13: Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_3, on considère les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

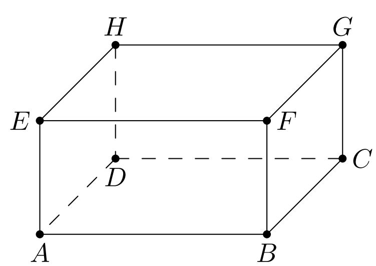
a) Calculer $\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} =$

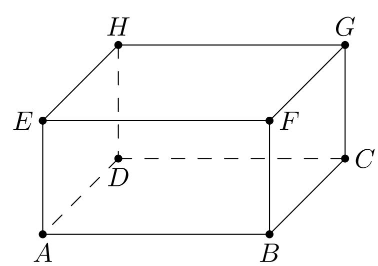
b) Montrer que $3\vec{a} - 2\vec{b} = -3\vec{c}$

Exemple 14: Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_3, calculer les composantes du vecteur $\vec{x}$ tel que $2(\vec{x} + \vec{a}) = 8\vec{a} - (\vec{b} + \vec{x})$, sachant que

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.35: On considère un parallélépipède $ABCD\ EFGH$ de centre K. Les points M et R sont les milieux respectifs des arêtes $[CG]$ et $[BC]$, S est le centre de la face $BCGF$.





a) Donner, dans la base $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE})$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AK}$.

b) Même question relativement à la base $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{BR})$.

Exercice 1.36: Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_3, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Former le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} + 2\vec{a} = \vec{b} - 2\vec{c}$.

b) Calculer le vecteur $\vec{w}$ tel que $6\left(\vec{c} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{w}\right) + 2\vec{b} = \vec{0}$.

c) Déterminer le vecteur $\vec{t}$ tel que :

$$2\vec{t} - \vec{a} = \frac{3}{2}\left(2\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{t}\right) + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

1.2.3 Tests de colinéarité et de coplanarité

Test de colinéarité I: Pour déterminer si deux vecteurs du plan ou de l'espace sont colinéaires, il faut vérifier si l'un est produit de l'autre par un nombre réel.

Exemple 15: Les vecteurs ci-dessous sont-ils colinéaires ?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -49/3 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 1.37: Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ -1/3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Regrouper les vecteurs qui sont colinéaires.

Dans le cas des vecteurs du plan, on dispose d'un autre critère pour déterminer la colinéarité de deux vecteurs. Il se base sur la notion de déterminant.

Définition: Relativement à une base $\mathcal{B}$ du plan, on donne :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, noté $\det(\vec{a}\,; \vec{b})$, le nombre défini par :

$$\det(\vec{a}\,; \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Test de colinéarité II: Soit deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ du plan

$$\vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ sont colinéaires} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\vec{a}\,; \vec{b}) = 0.$$

Preuve: Nous accepterons ce résultat sans preuve.

Exemple 16: Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} m \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} m+1 \\ m+1 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 1.38: Déterminer m pour que les vecteurs suivants soient colinéaires :

$$\textbf{a)} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -2 \\ m+4 \end{pmatrix} \qquad \textbf{b)} \begin{pmatrix} m \\ m+4 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.39: Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_3, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -3/2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5/2 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{g} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Regrouper les vecteurs qui sont colinéaires.

Question: Dans V_2, nous avons utilisé un critère (celui du déterminant) pour déterminer si deux vecteurs sont colinéaires. Existe-t-il un équivalent dans V_3 pour déterminer si 3 vecteurs sont coplanaires ?

Définition: Considérons les 3 vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ donnés relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_3 :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Le **déterminant** de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, noté $\det(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c})$ est le nombre défini par :

$$\det\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

Exemple 17: Calculer le déterminant des vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Test de coplanarité:

Trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires

$$\Updownarrow$$

$$\det\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\right)=0.$$

Exemple 18:

- Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de l'exemple précédent sont-ils coplanaires ?
- Qu'en est-il de $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}6\\-3\\15\end{pmatrix}$?

Exercice 1.40: Déterminer dans chaque cas si les trois vecteurs sont coplanaires :

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}13\\2\\7\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}6\\-11\\4\end{pmatrix}$

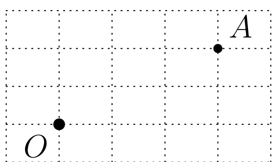
c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}$

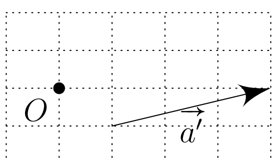
2

Points, repère et coordonnées

2.1 Repères et coordonnées

2.1.1 Dans le plan





Nous avons vu que tout vecteur du plan pouvait être représenté par une flèche d'origine quelconque.

Si l'on décide de fixer un point noté O, à partir duquel on représente tous les vecteurs, on établit une correspondance entre l'ensemble V_2 de tous les vecteurs du plan et l'ensemble $\mathbb{R}^2$ de tous les points du plan :

- à tout point A de $\mathbb{R}^2$, on associe l'unique vecteur $\vec{a}$ de V_2 tel que $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$,
- à tout vecteur $\vec{a'}$ de V_2, on associe l'unique point A' de $\mathbb{R}^2$ tel que $\vec{a'} = \overrightarrow{OA'}$.

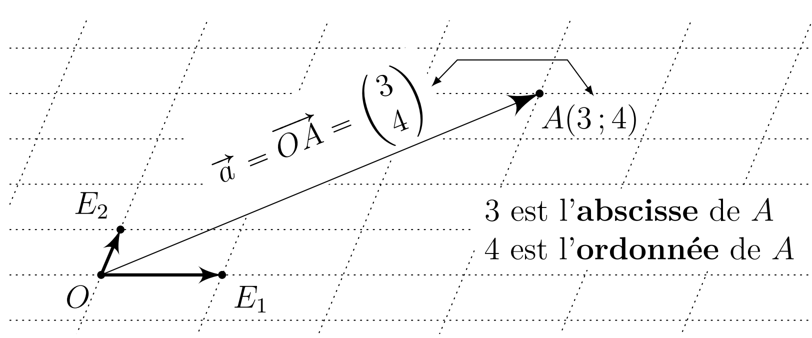
Trois points O, E_1, E_2 non alignés forment dans cet ordre un **repère** $\mathcal{R}$ du plan. On utilise la notation $\mathcal{R} = (O\,;E_1\,;E_2)$ et on dit que le point O est l'**origine** du repère.

Les points O, E_1, E_2 n'étant pas alignés, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{OE_1}\,;\overrightarrow{OE_2})$ est une base du plan appelée **base associée** au repère.

Les **coordonnées** a_1 et a_2 d'un point A de $\mathbb{R}^2$ relativement au repère sont par définition les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base associée au repère. Plus succinctement :

$$A(a_1\,;a_2) \iff \vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

a_1 est l'**abscisse** du point A et a_2 est l'**ordonnée** du point A.



Exemple 1: Déterminer les composantes des vecteurs ci-dessous dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{OD}\,;\overrightarrow{OE})$, ainsi que les coordonnées des points associés dans le repère $\mathcal{R} = (O\,;D\,;E)$:

$\overrightarrow{OA} = \qquad \Longleftrightarrow \qquad A(\dots\,;\dots)$

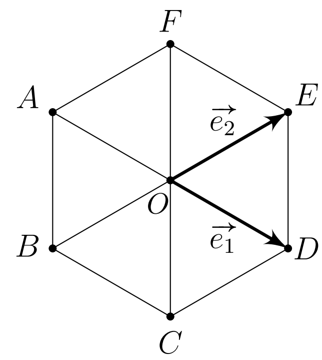
$\overrightarrow{OB} = \qquad \Longleftrightarrow \qquad B(\dots\,;\dots)$

$\overrightarrow{OC} = \qquad \Longleftrightarrow \qquad C(\dots\,;\dots)$

$\overrightarrow{OD} = \qquad \Longleftrightarrow \qquad D(\dots\,;\dots)$

$\overrightarrow{OE} = \qquad \Longleftrightarrow \qquad E(\dots\,;\dots)$

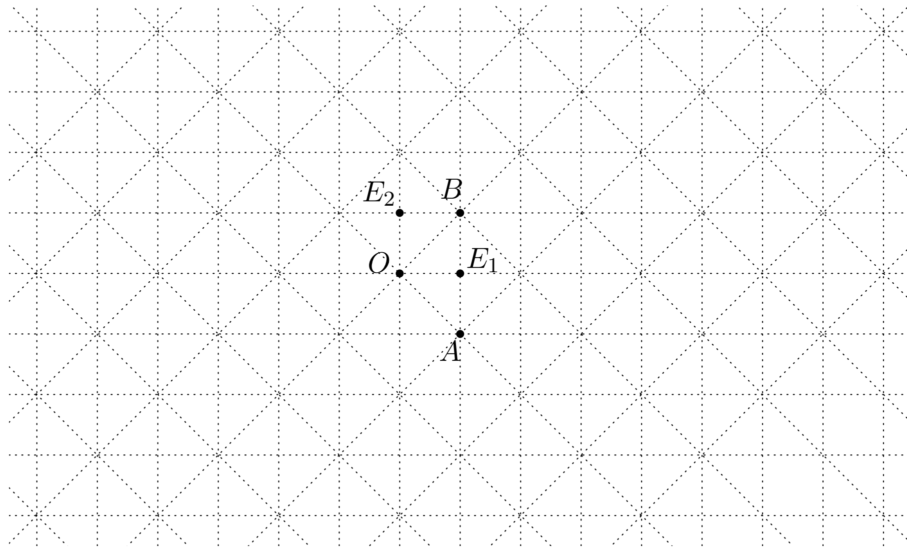
$\overrightarrow{OF} = \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(\dots\,;\dots)$



Il est important de ne pas confondre les notations utilisées pour l'ensemble V_2 des vecteurs du plan avec celles utilisées pour l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des points du plan. Le tableau suivant rappelle les distinctions à faire :

V_2	$\mathbb{R}^2$
vecteur $\overrightarrow{a}$	point A
base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{OE_1}\,;\overrightarrow{OE_2})$	repère $\mathcal{R} = (O\,;E_1\,;E_2)$
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$	$A(a_1\,;a_2)$
a_1 et a_2 sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{a}$ relativement à la base $\mathcal{B}$	a_1 et a_2 sont les coordonnées du point A relativement au repère $\mathcal{R}$

Exercice 2.1: On considère la figure suivante :



a) Représenter les points dont les coordonnées relativement au repère $\mathcal{R}_1 = (O\,;E_1\,;E_2)$ sont :

$$M(4\,;2),\ N(-3\,;3),\ P(-4\,;-4),\ Q(2\,;3),\ R(1\,;-3),$$

$$S(0\,;-3),\ T(5\,;0),\ U(-1\,;-4),\ V(-2\,;3)$$

b) Trouver les coordonnées de ces points relativement au repère $\mathcal{R}_2 = (O\,;A\,;B)$.

Les 4 Questions:

- Si $A(3\,;2)$ et $B(5\,;9)$, que vaut $\overrightarrow{AB}$?

- Si $A(-1\,;5)$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, que valent les coordonnées de B ?

- Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $B(1\,;5)$, que valent les coordonnées de A ?

- Si $A(a\,;7)$ et $B(-3\,;9)$, que vaut $\overrightarrow{AB}$?

Dans ce dernier cas, on pourra préférer utiliser la règle de calcul suivante :

Règle de calcul: On donne relativement à un repère $\mathcal{R}$ d'origine O du plan les points $A(a_1\,;a_2)$ et $B(b_1\,;b_2)$, alors on a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$.

Preuve: Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, d'où le résultat :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercice 2.2: Calculer les composantes ou les coordonnées manquantes :

a) $A(2\,;3)$ $B(-5\,;4)$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

b) $A(5\,;-1)$ $B(-2\,;3)$ et $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

c) $A(2\,;-7)$ $B(\dots\,;\dots)$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $A(\dots\,;\dots)$ $B(7\,;-9)$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

e) $A(\dots\,;\dots)$ $B(3\,;-1)$ $R(1\,;0)$ $\overrightarrow{AR} - 5\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Suggestion : posez x et y les 2 coordonnées et résolvez une équation

Exercice 2.3: On donne les points $A(3\,;4)$ et $B(-3\,;3)$. Calculer les points C, D, L et R pour lesquels :

$$\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{BA} \quad , \quad \overrightarrow{LA} = \frac{5}{3}\,\overrightarrow{LB} \quad , \quad \overrightarrow{RA} = -\frac{3}{4}\,\overrightarrow{RB}$$

<u>Suggestion</u> : Dans les 2 derniers cas, posez x et y les coordonnées inconnues et résolvez une équation

Exercice 2.4: On donne les points $A(3\,;2)$, $B(-5\,;6)$ et $C(-2\,;-3)$. Trouver les coordonnées des points L et M situés respectivement au quart du segment $[AB]$ depuis A, aux deux tiers du segment $[BC]$ depuis B.

Exercice 2.5: On donne les points $A(1\,;1)$, $B(10\,;5)$ et $C(4\,;12)$. Calculer les coordonnées du point D tel que :

a) $ABCD$ soit un parallélogramme.

b) $ABDC$ soit un parallélogramme.

Rappel: Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Il est important de ne pas confondre les mots “colinéaires” et “alignés”. La notion d'alignement s'applique à des points, alors que celle de colinéarité s'applique à des vecteurs.

Exemple 2: Les points $A(1\,;-1)$, $B(3\,;1)$ et $C(-2\,;3)$ sont-ils alignés ?

Exercice 2.6: Les points $A(-56\,;84)$, $B(16\,;-24)$ et $C(-8\,;12)$ sont-ils alignés ?

Exercice 2.7: Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre k les points sont-ils alignés ?

a) $A(1\,;2)$ $\qquad B(-3\,;3)$ $\qquad C(k\,;1)$

b) $A(2\,;k)$ $\qquad B(7k-29\,;5)$ $\qquad C(-4\,;2)$

Exercice 2.8: On donne $A(7\,;-3)$ et $B(23\,;-6)$. Déterminer le point C de l'axe des abscisses qui est aligné avec les points A et B.

Exercice 2.9: Soit f l'homothétie de centre $C(1\,;0)$ et de rapport -2, et soit g l'homothétie de centre $D(8\,;7)$ et de rapport 3.

a) Calculer le point $M = g(f(P))$, si $P(1\,;1)$.

b) Déterminer le point F tel que $F = g\left(f(F)\right)$.

2.1.2 Dans l'espace

Ce qui a été vu et défini dans le cas du plan se généralise au cas de l'espace.

Quatre points O, E_1, E_2, E_3 non coplanaires forment dans cet ordre un **repère** $\mathcal{R}$ de l'espace.
On utilise la notation $\mathcal{R} = (O\,;E_1\,;E_2\,;E_3)$ et on dit que le point O est l'**origine** du repère.

Les quatre points n'étant pas coplanaires, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{OE_1}\,;\overrightarrow{OE_2}\,;\overrightarrow{OE_3})$ est une base de l'espace appelée **base associée** au repère.

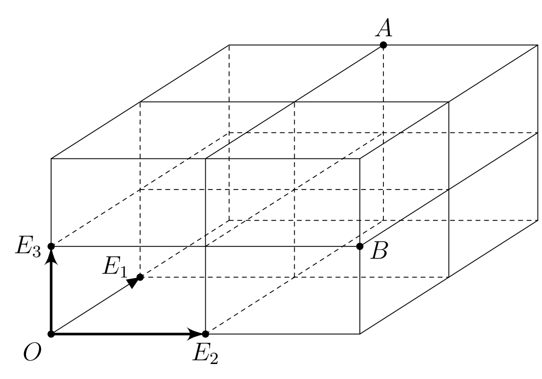
Les **coordonnées** a_1, a_2 et a_3 d'un point A de $\mathbb{R}^3$ relativement au repère sont par définition les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base associée au repère. Plus succinctement :

$$A(a_1\,;a_2\,;a_3) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

a_1 est l'**abscisse** du point A, a_2 est l'**ordonnée** du point A et a_3 est la **cote** du point A.

On donne relativement à un repère $\mathcal{R}$ d'origine O de l'espace les points $A(a_1\,;a_2\,;a_3)$ et $B(b_1\,;b_2\,;b_3)$, alors on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$



Exemple 3: Soit $A(2\,;1\,;-1)$ et $B(-1\,;-1\,;0)$.
Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2.10: On donne les points $A(5\,;2\,;-3)$, $B(8\,;0\,;5)$, $C(-2\,;-4\,;-1)$ et $D(4\,;-6\,;3)$. Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{CA}$

d) $\vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

e) $\vec{v} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

f) $\vec{w} = 4\overrightarrow{AC} - 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC})$

Exercice 2.11: On donne les sommets $A(3\,;-2\,;5)$ et $B(7\,;5\,;10)$ d'un parallélogramme $ABCD$, ainsi que le point d'intersection $P(5\,;4\,;6)$ de ses diagonales. Calculer les coordonnées des deux autres sommets C et D.

Exercice 2.12: Montrer que les points $A(13\,;-22\,;2)$, $B(-53\,;-10\,;26)$ et $C(-38\,;12\,;60)$ ne sont pas alignés.

Exercice 2.13: Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre k les points sont-ils alignés ?

$$A(k\,;-3\,;-4) \quad , \quad B(3\,;1\,;0) \quad \text{et} \quad C(0\,;k+2\,;k+1)$$

Exercice 2.14: Les points $A(0\,;2\,;4)$, $B(1\,;-1\,;3)$, $C(-8\,;2\,;1)$ et $D(-6\,;-4\,;-1)$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 2.15: On donne les trois points $M(0\,;8\,;-2)$, $P(-2\,;-1\,;7)$ et $H(3\,;-3\,;5)$.

a) Trouver les coordonnées de l'image M' de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{PH}$.

b) Trouver les coordonnées de l'image M'' de M par la symétrie centrale de centre P.

c) Trouver les coordonnées de l'image M''' de M par l'homothétie de centre H et de rapport -2.

2.1.3 Point milieu et centre de gravité

Dans ce paragraphe, nous allons établir des relations permettant de calculer aisément les coordonnées du point milieu d'un segment et celles du centre de gravité d'un triangle.

Théorème: M est le point milieu du segment $[AB] \iff \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

Preuve:

Règles de calcul: Si l'on introduit les coordonnées des points relativement à un repère donné, on obtient :

- dans le cas du plan, si $A(a_1\,;a_2)$ et $B(b_1\,;b_2)$, alors

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

- dans le cas de l'espace, si $A(a_1;a_2;a_3)$ et $B(b_1;b_2;b_3)$, alors

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2};\frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Exemple 4: Soit $A(1\,;2\,;3)$ et $B(4\,;5\,;6)$.
Déterminer les coordonnées du point M milieu du segment AB.

Théorème: G est le centre de gravité du triangle ABC $\iff$ $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

Preuve:

Règles de calcul: Si l'on introduit les coordonnées des points relativement à un repère donné, on obtient :

- dans le cas du plan, si $A(a_1\,;a_2)$, $B(b_1\,;b_2)$ et $C(c_1\,;c_2)$, alors :

$$G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

- dans le cas de l'espace, si $A(a_1\,;a_2\,;a_3)$, $B(b_1\,;b_2\,;b_3)$ et $C(c_1\,;c_2\,;c_3)$, alors

$$G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3};\frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$$

Remarque: Lorsque l'on calcule les coordonnées d'un point milieu ou d'un centre de gravité, on effectue des **moyennes arithmétiques**.

Exemple 5: On donne $A(-1\,;2)$, $B(2\,;3)$ et $G(4\,;5)$ le centre de gravité du triangle ABC. Quelles sont les coordonnées du sommet C ?

Exercice 2.16: Soit les points $A(-4\,;2)$, $B(1\,;3)$ et $C(2\,;5)$. Calculer les coordonnées des milieux des côtés du triangle ABC et celles du centre de gravité de ce triangle.

Exercice 2.17: Calculer les coordonnées de l'extrémité A du segment $[AB]$ connaissant $B(-2\,;2)$, ainsi que son point milieu $M(1\,;4)$.

Exercice 2.18: Trouver les coordonnées du troisième sommet C d'un triangle ABC dont on donne deux sommets $A(6\,;-1)$, $B(-2\,;6)$ et le centre de gravité $G(3\,;4)$.

Exercice 2.19: On connaît les sommets $A(2\,;-3)$ et $B(-5\,;1)$ du triangle ABC. On sait de plus que le centre de gravité du triangle ABC se trouve sur l'axe Ox et que le sommet C se trouve sur l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées du sommet C.

Exercice 2.20: On considère les points $A(2\,;-1)$ et $B(0\,;3)$.

a) Déterminer le point C tel que le centre de gravité du triangle ABC soit l'origine O du repère.

b) Trouver ensuite le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 2.21: Les points $M(2\,;-1)$, $N(-1\,;4)$ et $P(-2\,;2)$ sont les milieux des côtés d'un triangle dont on demande de calculer les sommets.

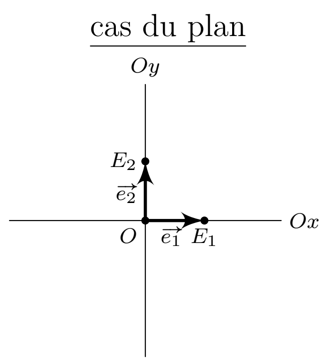
3

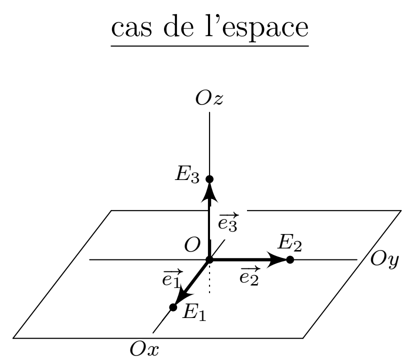
Norme et produit scalaire

3.1 Norme d'un vecteur

Définition: La **norme** du vecteur $\vec{a}$, notée $\|\vec{a}\|$, est la longueur de l'un des représentants du vecteur $\vec{a}$.

Définition: Considérons un repère $\mathcal{R}$ et sa base associée $\mathcal{B}$.
On dit que ce repère est **cartésien** ou **orthonormé direct** si les vecteurs de base sont tous unitaires et si ces vecteurs sont deux à deux perpendiculaires et orientés comme sur l'une ou l'autre des figures ci-dessous.





Convention: Sauf mention du contraire, les bases et les repères du plan ou de l'espace seront dorénavant supposés cartésiens.

Théorème: La norme d'un vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ du plan est donnée par :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

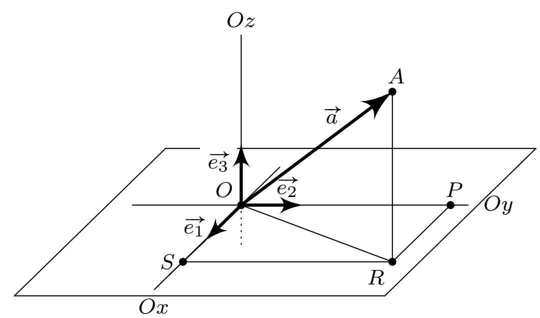
Preuve: Par le théorème de Pythagore, on conclut.

□

Théorème: La norme d'un vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ de l'espace est donnée par :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Preuve: En appliquant Pythagore sur la figure :



$\square$

Exemple 1: Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$.
Calculer la norme des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{v} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Exercice 3.1: Calculer les normes des vecteurs du plan ou de l'espace :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Définition: Un vecteur dont la norme est égale à 1 est dit **unitaire**.

Exercice 3.2: Montrer que les vecteurs suivants sont unitaires :

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5}/5 \\ 2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.3: **a)** On donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Calculer :}$$

$$\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\| \quad , \quad \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| \quad , \quad \|-2\vec{a}\| + \|2\vec{a}\|$$

$$\|\vec{a}\| \cdot \vec{c} \quad , \quad \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \quad , \quad \left\| \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \right\|$$

b) On donne $\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ k-1 \end{pmatrix}$. Calculer k sachant que la norme de $\vec{d}$ vaut 10.

c) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre m tel que $\|\vec{u} + m\vec{v}\| = \sqrt{82}$.

Propriétés: Soient les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et le nombre réel k, on a :

- $\|\vec{a}\| = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$
- $\|k\vec{a}\| = |k| \cdot \|\vec{a}\|$
- $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leqslant \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (*inégalité triangulaire*)

Exemple 2: Calculer la distance qui sépare les points $A(1\,;6\,;3)$ et $B(7\,;-2\,;3)$.

Le calcul de la norme nous permet de connaître une longueur sans avoir à faire une figure à l'échelle et devoir mesurer sur celle-ci.

Remarque: Par la suite, nous considérerons équivalents les 2 codages :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 2 \quad \text{et} \quad AB = 2$$

Exercice 3.4: Calculer le périmètre du triangle ABC si $A(2\,;1\,;3)$, $B(4\,;3\,;4)$ et $C(2\,;6\,;-9)$.

Exercice 3.5: Établir que le triangle ABC est isocèle, puis calculer son aire si $A(6\,;4)$, $B(12\,;-2)$ et $C(17\,;9)$.

Exercice 3.6: Soit $A(7\,;1)$, $B(5\,;5)$, $C(5\,;-3)$ et $I(2\,;1)$. Prouver que les points A, B et C sont situés sur le même cercle centré en I.

Exercice 3.7: On considère le triangle ABC dont on donne les coordonnées des sommets $A(3\,;1)$, $B(2\,;3)$ et $C(6\,;5)$. Montrer que ce triangle est rectangle et préciser en quel sommet se trouve l'angle droit.

Exercice 3.8: Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange, si $A(4\,;0\,;-3)$, $B(10\,;2\,;0)$, $C(8\,;-1\,;6)$ et $D(2\,;-3\,;3)$.

Exercice 3.9: Montrer que les points A, B, C et D sont les sommets d'un tétraèdre régulier, si $A(0\,;11\,;7)$, $B(20\,;10\,;0)$, $C(15\,;23\,;16)$ et $D(15\,;2\,;19)$.

Exemple 3: On considère les points $A(0\,;?)$, $B\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et $C(3\,;2)$.

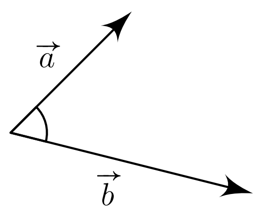
Sachant que le point A se trouve à égale distance des points B et C, retrouver sa deuxième coordonnée manquante.

Exercice 3.10: Déterminer le point d'abscisse 1 qui est équidistant de $A\left(\frac{1}{2}\,;3\right)$ et de $B\left(\frac{9}{2}\,;1\right)$.

3.2 Produit scalaire

3.2.1 Définition et propriétés

Définition: Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs du plan.



On appelle **produit scalaire** de $\vec{a}$ par $\vec{b}$, noté $\vec{a} \bullet \vec{b}$, **le nombre réel** définit par :

- $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{a}$ ou $\vec{b}$ est nul ;
- $\vec{a} \bullet \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ dans le cas contraire.

où $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ exprime le cosinus de l'angle compris entre les 2 vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

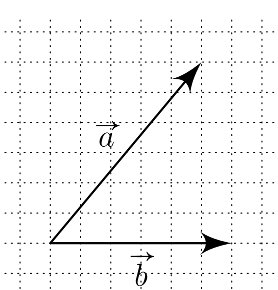
Remarques:

- Si $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ alors :
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \overrightarrow{CB} \bullet \overrightarrow{CA} = \|\overrightarrow{CB}\| \cdot \|\overrightarrow{CA}\| \cdot \cos(\angle ACB)$$

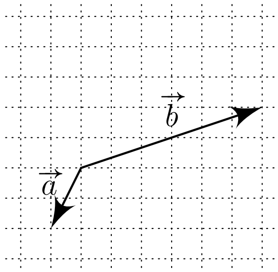
- Savez-vous ce que signifie le mot **scalaire** ?

Exemple fil rouge: Les quadrillages ci-contre sont formés de carreaux de côté 1 dans un repère orthonormé. Déterminer dans chaque cas :

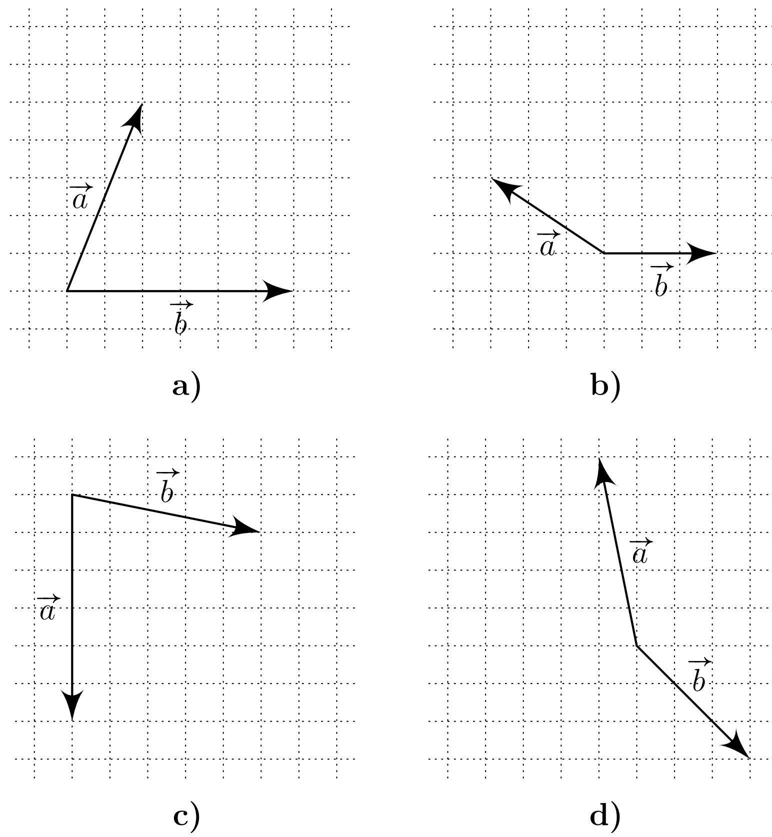
- l'angle entre les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$
- le résultat de $\vec{a} \bullet \vec{b}$.



Exemple fil rouge: (suite) Mêmes consignes



Exercice 3.11: Même consigne dans les cas suivants :



Exercice 3.12: Soit ABC un triangle tel que :

$$AB = 4,\ BC = 4\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = 24.$$

a) Calculer l'angle $\angle ABC$.

b) Calculer le côté AC du triangle.

c) Le triangle ABC est-il quelconque ?

Propriétés I: Soit $\vec{a}$, $\vec{b}$ deux vecteurs non nuls :

- $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$ (*perpendicularité*)
- $\vec{a} \bullet \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$ (*prod. scalaire ↔ norme*)
- $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ (*commutativité*)

Preuve:

Propriétés II: Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ des vecteurs non nuls du plan ou de l'espace.

- L'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est aigu $\iff \vec{a} \bullet \vec{b} > 0$
- L'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est droit $\iff \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$
- L'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est obtus $\iff \vec{a} \bullet \vec{b} < 0$

Justification:

Propriétés III: Soit $\vec{a}$, $\vec{b}$ des vecteurs et k un nombre réel :

- $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$ (*distributivité I*)
- $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$ (*distributivité II*)
- $(k\vec{a}) \bullet \vec{b} = k(\vec{a} \bullet \vec{b}) = \vec{a} \bullet (k\vec{b})$

Preuve: *Ces propriétés seront acceptées sans preuve.*

Exemple 4: On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\|\vec{u}\| = 3\ ,\ \|\vec{v}\| = 2 \ \text{ et } \ \vec{u} \bullet \vec{v} = -2$$

Calculer : $(\vec{u} + 2\vec{v}) \bullet (3\vec{u} - \vec{v})$

Exercice 3.13: On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\|\vec{u}\| = 2 \ , \ \|\vec{v}\| = 3 \ \text{ et } \ \vec{u} \bullet \vec{v} = 1$$

Calculer :

a) $(2\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v})$

b) $(\vec{u} + 2\vec{v})^2$

c) $(-3\vec{u} + \vec{v})^2$

d) $(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + \vec{v})^2$

Exercice 3.14: Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $AB = 1$.

a) Montrer que $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{2}$

b) Déterminer la valeur des produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} \ ; \ \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} \ ; \ \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{OA}$$

3.2.2 Le produit scalaire pour démontrer

Une des propriétés les plus spectaculaires du produit scalaire est l'équivalence déjà observée :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

Utilisons-la pour effectuer quelques démonstrations.

Exemple 5: $ABCD$ est un carré. On place les points K et L tels que :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

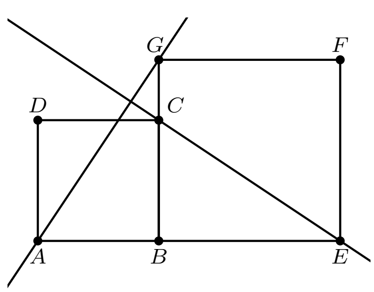
a) Démontrer que les droites DL et KC sont perpendiculaires.

b) On remplace $\frac{1}{2}$ par la valeur $\frac{3}{4}$.
Les droites DL et KC sont-elles toujours perpendiculaires ?

Exercice 3.15: $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 2$ et $AD = \sqrt{2}$. I est au milieu du côté AB.
Démontrer que les droites AC et ID sont perpendiculaires.

Exercice 3.16: $ABCD$ et $BEFG$ sont deux carrés (de côtés c et c' resp.) placés comme sur la figure ci-dessous.

Montrer que les droites AG et EC sont perpendiculaires.



3.2.3 Une nouvelle interprétation du produit scalaire

Théorème: Soit A, B et C trois points du plan ou de l'espace. On considère encore le point H **projeté orthogonal** de B sur la droite AC.

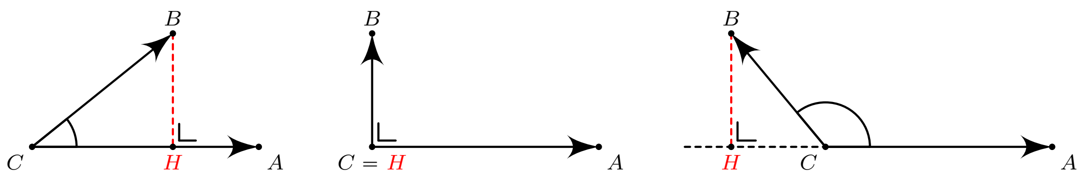
On a :

$$\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CH}.$$

De plus :

$$\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CH} = \begin{cases} CA \cdot CH & \text{si } \overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{CH} \text{ ont le même sens ;} \\ 0 & \text{si } \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{0} \text{ ;} \\ -(CA \cdot CH) & \text{si } \overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{CH} \text{ sont de sens opposé.} \end{cases}$$

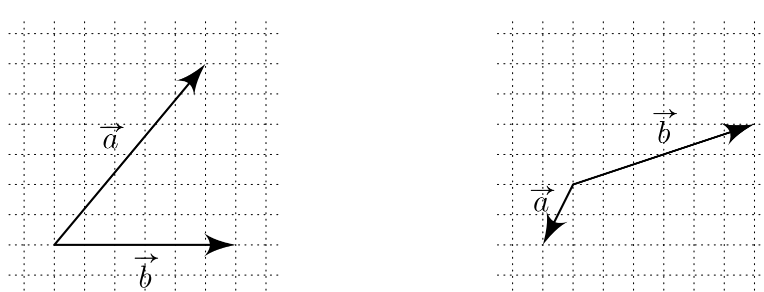
$\angle ACB$ aigu — $\angle ACB$ droit — $\angle ACB$ obtus



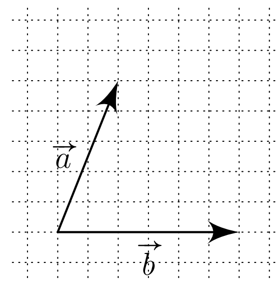
$\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = CA \cdot CH$ — $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = 0$ — $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = -CA \cdot CH$

Justification:

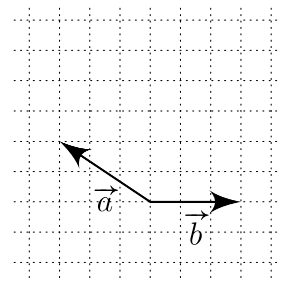
Exemple fil rouge: Les quadrillages ci-dessous sont formés de carreaux de côté 1 dans un repère orthonormé.
Dans chaque cas, calculer $\vec{a} \bullet \vec{b}$.



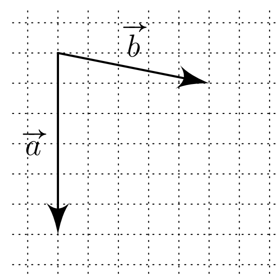
Exercice 3.17: Même consigne dans les cas suivants :



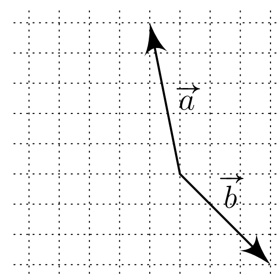
a)



b)



c)



d)

Exercice 3.18: On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 4$ et $AD = 3$ et le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

a) Calculer $\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AC}$.

b) Calculer $\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{AC}$.

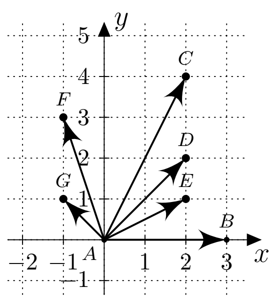
c) Calculer $\overrightarrow{EC} \bullet \overrightarrow{ED}$. En déduire la mesure de l'angle $\angle CED$.

Exercice 3.19: Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $AB = 2$cm.
Déterminer la valeur des produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OD}$

b) $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{OB}$

Exercice 3.20: On considère la figure ci-contre

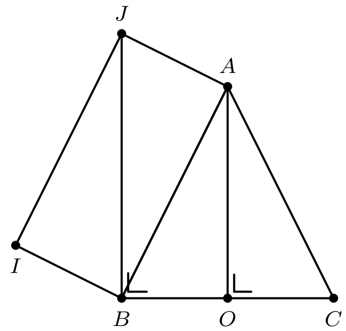


Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AG}$; $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AF}$

Exercice 3.21: Dans la figure ci-contre :



- ABC est un triangle isocèle en A,
- $ABIJ$ est un parallélogramme et $BC = 4$.

Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BA}$ **b)** $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{JC}$

c) $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{AJ}$ **d)** $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{IA}$

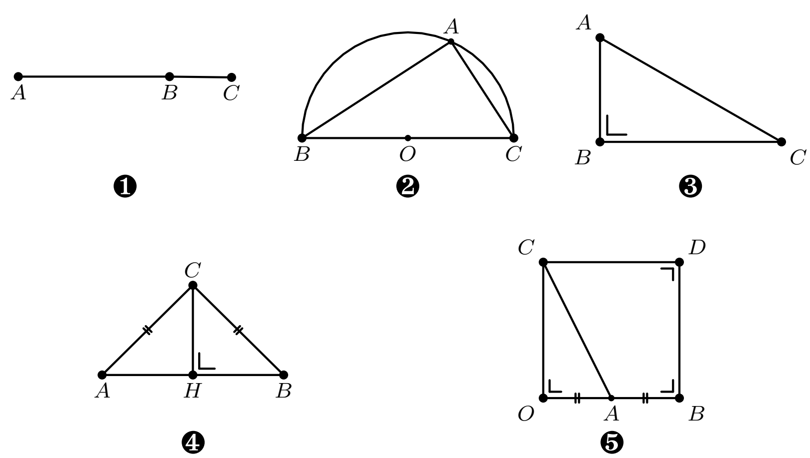
e) $\overrightarrow{BO} \bullet \overrightarrow{BI}$ **f)** $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{CI}$

Exercice 3.22: À chacune des figures ci-dessous, associer, parmi les égalités suivantes, celle qui donne le bon résultat du calcul de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

a) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC$ **b)** $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB^2$

c) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = -AB^2$ **d)** $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}AB^2$

e) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$



Exercice 3.23: $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 2$.

- Calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.
- En déduire la valeur approchée par défaut au dixième de degré près de la mesure de l'angle $\angle BAC$.

Exercice 3.24: $ABCD$ est un parallélogramme.
Calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas de figure :

a) $AB = 4, AC = 6$ et $\angle ACD = 20°$;

b) $AB = 6, BC = 4$ et $\angle ABC = 120°$;

c) $AB = 6, BC = 4$ et $AH = 1$ où H est le projeté orthogonal de D sur le côté AB.

3.2.4 Une dernière interprétation du produit scalaire

Théorème: Soit $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan définis par leurs composantes.

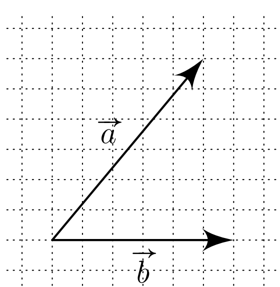
Le produit scalaire peut alors se calculer comme :

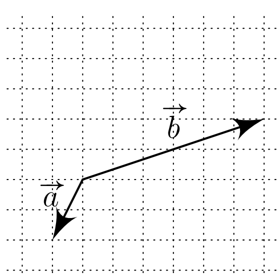
$$\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Preuve:

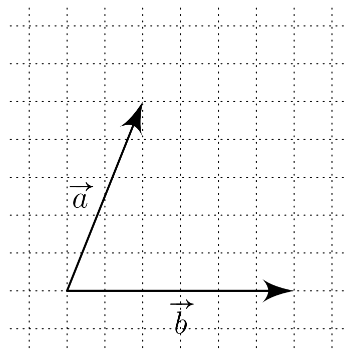
Exemple fil rouge: Les quadrillages ci-contre sont formés de carreaux de côté 1 dans un repère orthonormé. Dans chaque cas :

- calculer $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}$.
- en déduire l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$

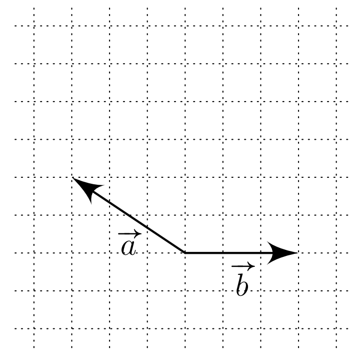




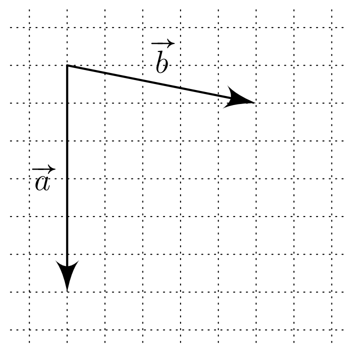
Exercice 3.25: Même consigne dans les cas suivants :



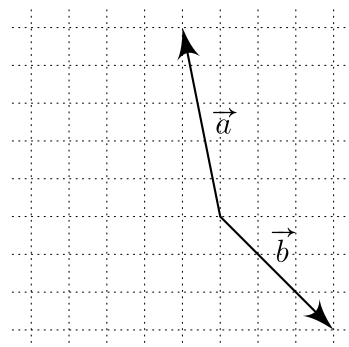
a)



b)



c)



d)

Une formule: On peut généraliser le calcul d'angle vu ci-dessus en une formule générale :

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right)$$

Exercice 3.26: On considère les points $A(2\,;-1)$, $B(4\,;2)$, $C(4\,;0)$ et $D(1\,;2)$

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD}$. Que peut-on en déduire ?

b) Démontrer que les droites DB et BC sont perpendiculaires.

c) Calculer $\overrightarrow{CB} \bullet \overrightarrow{CD}$. En déduire une valeur approchée de l'angle $\angle BCD$.

Exercice 3.27: On considère un cube $ABCD\,EFGH$. Notons M, N et P les milieux respectifs de $[AE]$, $[EH]$ et $[AB]$.
Calculer l'angle entre les vecteurs :

a) $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ **b)** $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$ **c)** $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$

3.2.5 Une application du produit scalaire

Au-delà de l'efficacité de cet outil en mathématique (démontrer des perpendicularités par exemple), le produit scalaire est également utilisé en physique. Citons par exemple :

- en **électromagnétisme** (description des ondes électromagnétiques), *cf. téléphones portables*
- en **mécanique quantique** (notion d'énergie à l'échelle microscopique), *cf. ...*
- en **hydrodynamique** (écoulement des fluides), *cf. économie de carburant*.
- en **mécanique** (la notion de travail d'une force). Observons ceci dans ce dernier paragraphe.

Rappels:

- Une **force** peut mettre en **mouvement** un objet, **modifier** son mouvement ou le déformer.
- Une force est caractérisée par **sa direction**, **son sens**, **son intensité** et **son point d'application**.
- **Le travail** permet d'évaluer l'effet d'une force sur **l'énergie** d'un objet en mouvement. **Le travail** est un **mode de transfert d'énergie**.

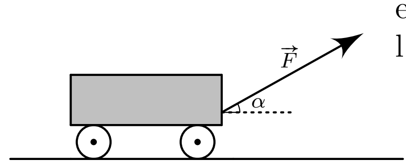
Définition: Considérant une force F qui s'applique à un objet en mouvement rectiligne d'un point A à un point B.

Le travail $W_{AB}(F)$ **d'une force** constante F dont le point d'application se déplace de A à B est égal au produit scalaire du vecteur force $\overrightarrow{F}$ par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

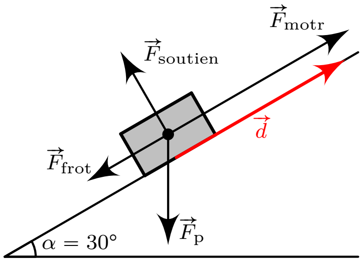
$$W_{AB}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cdot \cos(\alpha)$$

- $W_{AB}(\overrightarrow{F})$ s'exprime en *joule* (J)
- F la valeur de la force en *newton* (N),
- AB le déplacement en *mètre* (m).
- α représentent l'angle entre le vecteur force $\overrightarrow{F}$ et le vecteur déplacement $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 3.28: Un enfant tire un jouet au moyen d'une ficelle. La force de traction F qu'il exerce forme un angle de 35° avec le déplacement du jouet et son intensité est égale à 2,5 N. Quel est le travail effectué par l'enfant pour un déplacement $d = 300$ m du jouet ?



Exercice 3.29: Un corps de masse $m = 4\,\text{kg}$ est tracté le long d'une rampe inclinée de 30° sur une distance d de 15 m. Il subit les 4 forces habituelles. On précise :



- la force motrice est $F_{\text{motr}} = 30\,\text{N}$;
- la force de frottement est $F_{\text{frot}} = 10\,\text{N}$.

Calculez le travail

a) de chacune de ces forces.

b) de la force résultante.

$\mathcal{A}$

Quelques éléments de solutions

A.1 Vecteurs, composantes - points, coordonnées

Exercice 1.1:

a) Même direction, même sens, même longueur → représentent le même vecteur.

b) Même direction, sens opposé, même longueur → ne représentent pas le même vecteur.

c) Direction différente, sens non défini, même longueur → ne représentent pas le même vecteur.

d) Même direction, même sens, longueur différente → ne représentent pas le même vecteur.

Exercice 1.2:

a) Il y en a 15 différents :

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{AA}$$

b) Il y en a 17 différents :

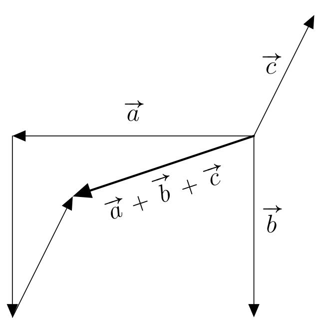
$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DD}$$

c) Il y en a 19.

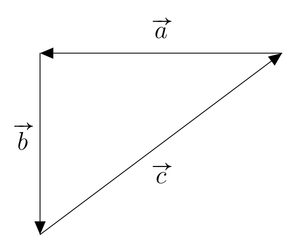
www.javmath.ch

Exercice 1.3:

a)



b) Par exemple :



www.javmath.ch

Exercice 1.4:

Un corrigé pourra être vu ensemble (à votre demande) www.javmath.ch

Exercice 1.5:

a) $\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$ **c)** $\overrightarrow{DA}$ **d)** $\vec{0}$

Exercice 1.6:

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ b) $\vec{b} = \overrightarrow{AH}$ c) $\vec{c} = \overrightarrow{HA}$

d) $\vec{d} = \overrightarrow{EA}$ e) $\vec{e} = \overrightarrow{AC}$ f) $\vec{f} = \overrightarrow{AE}$

www.javmath.ch

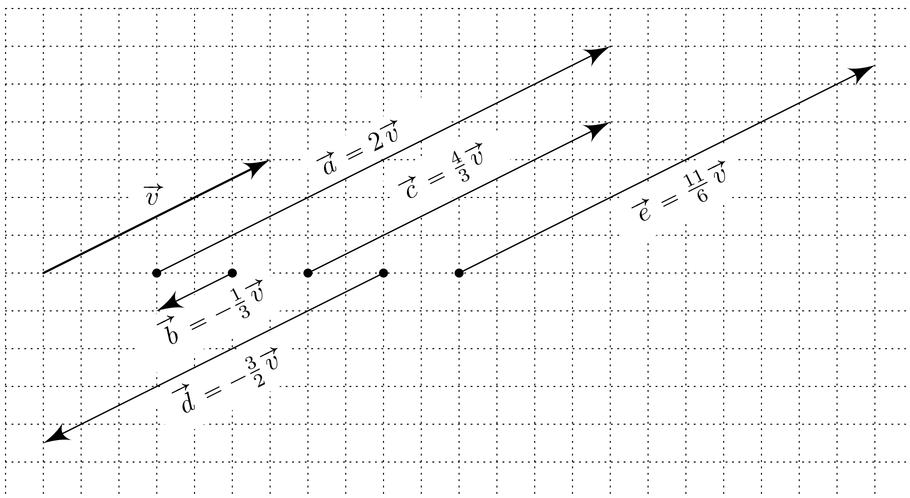
Exercice 1.7:

1. ↔ C. **2. ↔ B.** **3. ↔ D.** **4. ↔ A.**

www.javmath.ch

Exercice 1.8:

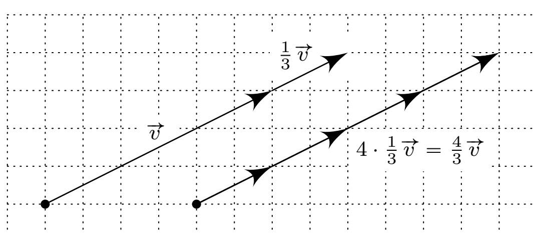
Seul un représentant de chaque vecteur est proposé :



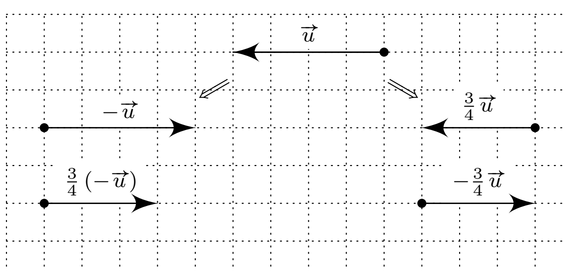
www.javmath.ch

Exercice 1.9:

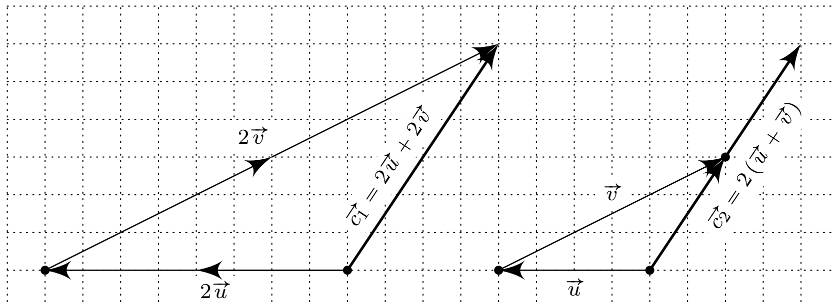
a) On constate que $\vec{a_1} = \vec{v} + \dfrac{1}{3}\vec{v} = \left(1 + \dfrac{1}{3}\right) \cdot \vec{v} = \dfrac{4}{3}\vec{v} = \vec{a_2}$.



b) On constate que $\vec{b_1} = \dfrac{3}{4}(-\vec{u}) = \dfrac{3}{4}(-1) \cdot \vec{u} = -\dfrac{3}{4}\vec{u} = \vec{b_2}$.

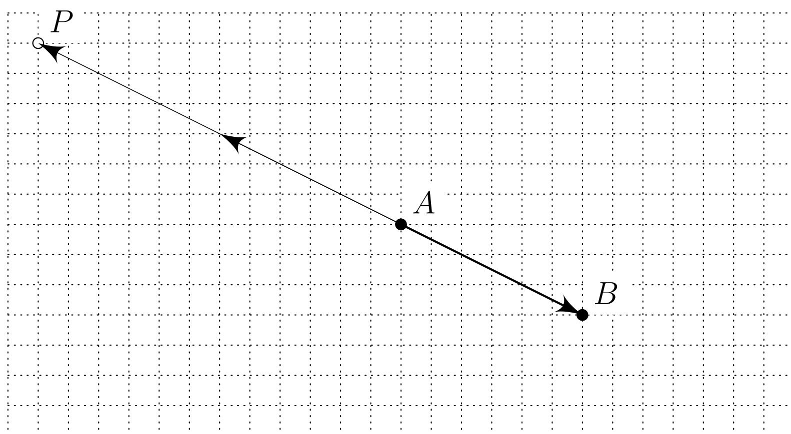


c) On constate que $\vec{c_1} = 2\vec{u} + 2\vec{v} = 2(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{c_2}$

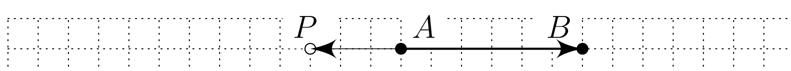


Exercice 1.10:

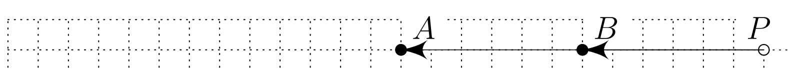
a) $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{AB}$



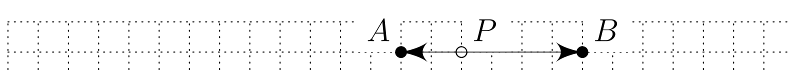
b) $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



c) $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{PB} \iff \overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$



d) $\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$



Exercice 1.11:

On obtient :

- la lettre qui convient :	- le nombre qui convient :
1) $\overrightarrow{E\boldsymbol{C}} = -2\overrightarrow{EF}$	**4)** $\overrightarrow{CE} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\overrightarrow{AB}$
2) $\overrightarrow{\boldsymbol{D}A} + \overrightarrow{\boldsymbol{D}F} = \overrightarrow{0}$	**5)** $\overrightarrow{AD} = -\mathbf{1}\overrightarrow{BF}$
3) $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\boldsymbol{F}}$	**6)** $\overrightarrow{DE} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{BF}$

Exercice 1.12:

Un corrigé pourra être vu ensemble (à votre demande) www.javmath.ch

Exercice 1.13:

a) $\overrightarrow{c} = 6\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{d} = -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$

b) $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{a} + 6\overrightarrow{b}$

c) $\overrightarrow{a} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{c} - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{b} = -\dfrac{1}{8}\overrightarrow{c} - \dfrac{3}{4}\overrightarrow{d}$

www.javmath.ch

Exercice 1.14:

$\overrightarrow{EP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{a} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$; $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{a} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{EN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{NM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{a} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{b}$

$\overrightarrow{PN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$; $\overrightarrow{NP} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$; $\overrightarrow{PM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$

www.javmath.ch

Exercice 1.15:

$\overrightarrow{PB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{a} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{PM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{a} - \dfrac{1}{6}\overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{a} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{b}$

www.javmath.ch

Exercice 1.16:

Un corrigé pourra être vu ensemble (à votre demande) www.javmath.ch

Exercice 1.17:

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$.

Exercice 1.18:

Par une chaîne d'égalités :

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

www.javmath.ch

Exercice 1.19:

a) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Même raisonnement pour $\overrightarrow{SR} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b) Comme $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.

www.javmath.ch

Exercice 1.20:

Montrons, par exemple, que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} \\ \bullet\ \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$$

www.javmath.ch

Exercice 1.21:

Montrons que si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IB}$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Par une chaîne d'égalités : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{DC}$

www.javmath.ch

Exercice 1.22:

Manipulons l'équation de départ comme une équation afin d'obtenir $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\begin{array}{rcll} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} &=& \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} & \quad | + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DO} \\ \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} &=& \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} & \quad | \text{ Chasle} \\ \overrightarrow{DC} &=& \overrightarrow{AB} & \end{array}$$

www.javmath.ch

Exercice 1.23:

Il y en a 11 : $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Quelques justifications :

$$\begin{array}{llll} \overrightarrow{HG} = \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{HG} & \overrightarrow{GH} = -\mathbf{1} \cdot \overrightarrow{HG} & \overrightarrow{HF} = \mathbf{2} \cdot \overrightarrow{HG} & \overrightarrow{EH} = -\mathbf{3} \cdot \overrightarrow{HG} \\ \overrightarrow{AM} = \mathbf{3/2} \cdot \overrightarrow{HG} & \overrightarrow{MB} = -\mathbf{1/2} \cdot \overrightarrow{HG} & \overrightarrow{AA} = \mathbf{0} \cdot \overrightarrow{HG} & \end{array}$$

Exercice 1.24:

Après simplification, on obtient $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$ et $\vec{v} = 3\overrightarrow{BC}$.
On observe donc que $\vec{u} = -1/3\vec{v}$. Il s'en suit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 1.25:

Les représentations graphiques seront vues ensemble.

a) **Oui**, ils peuvent être représentés dans le plan $GHDC$, $\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{AE}$.

b) **Oui**, ils peuvent être représentés dans le plan $ABCD$, $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EG}$.

c) **Non**, on ne peut pas représenter les 3 vecteurs dans un même plan.

d) **Oui**, ils peuvent être représentés dans le plan $CDEF$, $\overrightarrow{DF} = -2\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{EC}$

www.javmath.ch

Exercice 1.26:

Les représentations graphiques seront vues ensemble.

a) **Oui**, ils peuvent être représentés dans le plan $ADJG$, $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EK}$.

b) **Oui**, ils peuvent être représentés dans le plan $KHBE$, $\overrightarrow{LG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$.

www.javmath.ch

Exercice 1.27:

Les représentations graphiques seront vues ensemble.

a) **Non**, on ne peut pas représenter les 3 vecteurs dans un même plan.

b) **Oui**, ils peuvent être représentés dans le plan $ADJG$, $\overrightarrow{KF} = -3\overrightarrow{CH} - 2\overrightarrow{GD}$.

www.javmath.ch

Exercice 1.28:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.29:

a) $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 0\vec{j}$ $\qquad$ **b)** $\overrightarrow{AC} = 6\vec{i} + \frac{7}{2}\vec{j}$ $\qquad$ **c)** $\overrightarrow{BC} = 3\vec{i} + \frac{7}{2}\vec{j}$ $\left(= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

d) $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -6 \\ -7/2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ **e)** $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ **f)** $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\left(= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}\right)$

Exercice 1.30:

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 7 \end{pmatrix}$ **b)** $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c} = \begin{pmatrix} -41 \\ 27 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = \begin{pmatrix} -11/4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 1.31:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 27 \end{pmatrix}$

Exercice 1.32:

En résolvant le système $\begin{cases} 2x - 3y = -16 \\ 5x + 6y = -13 \end{cases}$, on obtient $\begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$ et ainsi $\vec{u} = -5\vec{a} + 2\vec{b}$

Exercice 1.33:

a) Quelle que soit la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ choisie, on obtient $\vec{c} \approx -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

Donc $\vec{c} \approx \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) En résolvant le système $\begin{cases} 5x + 7y = 4 \\ -4x + 3y = 5 \end{cases}$, on obtient $\vec{c} = -\frac{23}{43}\vec{a} + \frac{41}{43}\vec{b}$

Donc $\vec{c} = \begin{pmatrix} -23/43 \\ 41/43 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.34:

a) La représentation graphique sera vue ensemble.

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.35:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.36:

a) $\vec{v} = -2\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{w} = 2\vec{a} - \dfrac{2}{3}\vec{b} - 2\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{t} = \vec{a} + 3\vec{c} + \dfrac{2}{3}\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 1.37:

$\vec{a}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{h}$; $\vec{b}, \vec{e}, \vec{i}$; $\vec{c}, \vec{e}, \vec{g}$; $\vec{e}, \vec{f}$.

Exercice 1.38:

a) $m = -14$ **b)** $m = -2$ ou $m = 6$

Exercice 1.39:

$\vec{a}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{g}$; $\vec{b}, \vec{d}, \vec{f}$; $\vec{c}, \vec{d}$.

Exercice 1.40:

a) les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires, car $\det\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\right) = 0$

b) les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ne sont pas coplanaires, car $\det\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\right) \neq 0$

c) les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires, car $\det\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\right) = 0$

A.2 Points, repère et coordonnées

Exercice 2.1:

a) La représentation graphique sera vue ensemble

b) $M(1\,;3)$ $N(-3\,;0)$ $P(0\,;-4)$ $Q(-1/2\,;5/2)$ $R(2\,;-1)$ $S(3/2\,;-3/2)$ $T(5/2\,;5/2)$ $U(3/2\,;-5/2)$ $V(-5/2\,;1/2)$

Exercice 2.2:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ **c)** $B(5\,;-3)$

d) $A(7\,;-6)$ **e)** $A(3\,;-2)$

Exercice 2.3:

$C(-27\,;-1)$; $D(-5\,;8/3)$; $L(-12\,;3/2)$; $R(3/7\,;25/7)$.

Exercice 2.4:

$L(1\,;3)$; $M(-3\,;0)$.

Exercice 2.5:

a) $D(-5\,;8)$ **b)** $D(13\,;16)$

Exercice 2.6:

Oui car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. En effet : $\overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ ou $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$

Exercice 2.7:

a) $k = 5$ **b)** $k = 1$ ou $k = 32/7$

Exercice 2.8:

$C(-9\,;0)$

Exercice 2.9:

a) $M(-13\,;-20)$ **b)** $F(-1;-2)$

Exercice 2.10:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ **b)** $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ **c)** $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{u} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$

e) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ **f)** $\vec{w} = \begin{pmatrix} -19 \\ -30 \\ 32 \end{pmatrix}$

Exercice 2.11:

$C(7\,;10\,;7)$, $D(3\,;3\,;2)$.

Exercice 2.12:

En effet, $\overrightarrow{AB}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AC}$

Exercice 2.13:

$k = -3$ ou $k = 5$

Exercice 2.14:

Oui car $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (par exple.)

Exercice 2.15:

a) $M'(5\,;6\,;-4)$ **b)** $M''(-4\,;-10\,;16)$ **c)** $M'''(9\,;-25\,;19)$

Exercice 2.16:

$M_{AB}(-3/2\,;5/2)$; $M_{BC}(3/2\,;4)$; $M_{AC}(-1\,;7/2)$; $G(-1/3\,;10/3)$

Exercice 2.17:

$A(4\,;6)$

Exercice 2.18:

$C(5\,;7)$

Exercice 2.19:

$C(0\,;2)$

Exercice 2.20:

a) $C(-2\,;-2)$ **b)** $D(0\,;-6)$

Exercice 2.21:

$A(1\,;-3)$; $B(3\,;1)$; $C(-5\,;7)$

A.3 Norme et produit scalaire

Exercice 3.1:

$\|\vec{a}\| = 5 \qquad \left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{73} \qquad \|\vec{c}\| = \sqrt{\frac{13}{2}}$ ou mieux $\|\vec{c}\| = \frac{\sqrt{26}}{2} \qquad \left\|\vec{d}\right\| = 3 \qquad \|\vec{e}\| = \sqrt{2}$

Exercice 3.2:

Il suffit donc de montrer que leur norme vaut bien 1.

Exercice 3.3:

a) $\|\vec{a}\| + \left\|\vec{b}\right\| + \|\vec{c}\| = 5 + 13 + 6 = 24 \qquad \left\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 3+12-6 \\ 4-5+0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{82}$

$\|-2\vec{a}\| + \|2\vec{a}\| = \left\|\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right\| = 20 \qquad \|\vec{a}\| \cdot \vec{c} = 5 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \qquad \left\|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}\right\| = 1$

b) $k = -5 \quad$ ou $\quad k = 7$

c) $m = -23/10 \quad$ ou $\quad m = 3/2$

Exercice 3.4:

périmètre $= 16 + \sqrt{182}$

Exercice 3.5:

On a bien $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ et l'aire vaut 48

Exercice 3.6:

On a bien $\left\|\overrightarrow{IA}\right\| = \left\|\overrightarrow{IB}\right\| = \left\|\overrightarrow{IC}\right\| = 5$ (rayon du cercle)

Exercice 3.7:

On a bien $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2$. Il s'agit du sommet B.

Exercice 3.8:

On a bien que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ainsi que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 7$

(on rappelle qu'un losange est défini comme un parallélogramme admettant 4 côtés isométriques)

Exercice 3.9:

On a bien $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BD}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\| = 15\sqrt{2}$

Exercice 3.10:

$P(1\,;-1)$

Exercice 3.11:

a) $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 68{,}20°$ $\quad \vec{a} \bullet \vec{b} = 12$ $\quad$ **b)** $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 146{,}31°$ $\quad \vec{a} \bullet \vec{b} = -9$

c) $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 78{,}69°$ $\quad \vec{a} \bullet \vec{b} = 6$ $\quad$ **d)** $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 146{,}31°$ $\quad \vec{a} \bullet \vec{b} = -18$

Exercice 3.12:

a) $\angle ABC = 30°$

b) $AC = 4$ (par le théorème du cosinus)

c) Le triangle ABC est isocèle (non rectangle) en A

Exercice 3.13:

On développe (produits remarquables) et on utilise que $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 4$, $\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = 9$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

a) $(2\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = -2$

b) $(\vec{u} + 2\vec{v})^2 = (\vec{u} + 2\vec{v}) \bullet (\vec{u} + 2\vec{v}) = 44$

c) $(-3\vec{u} + \vec{v})^2 = (-3\vec{u} + \vec{v}) \bullet (-3\vec{u} + \vec{v}) = 39$

d) $(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + \vec{v})^2 = -4$

Exercice 3.14:

a) Par la définition de la norme (ou Pythagore)

b) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 1$; $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = 0$; $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{OA} = -1/2$

Ces valeurs sont “étrangement” sympathiques... non ?

Exercice 3.15:

Il s'agit de montrer que $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{ID} = 0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{ID} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \bullet (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{AD} \\ &= -2 \cdot 1 + 0 + 0 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -2 + 2 = 0\end{aligned}$$

Exercice 3.16:

Il s'agit de montrer que $\overrightarrow{AG} \bullet \overrightarrow{EC} = 0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \bullet \overrightarrow{EC} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) \bullet (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BG} \bullet \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BG} \bullet \overrightarrow{BC} \\ &= -c \cdot c' + 0 + 0 + c \cdot c' = 0\end{aligned}$$

Exercice 3.17:

a) $\vec{a} \bullet \vec{b} = 12$ $\quad$ **b)** $\vec{a} \bullet \vec{b} = -9$ $\quad$ **c)** $\vec{a} \bullet \vec{b} = 6$ $\quad$ **d)** $\vec{a} \bullet \vec{b} = -18$

Exercice 3.18:

a) $\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AC} = 9$ **b)** $\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{AC} = 24$

c) $\overrightarrow{EC} \bullet \overrightarrow{ED} = 21$ puis $\angle CED \approx 29{,}74°$

Exercice 3.19:

a) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 4\,;\ \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = 0\,;\ \overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OD} = 0$

b) $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AO} = 4\,;\ \overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OA} = -2\,;\ \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{OB} = -2$

Exercice 3.20:

a) Les 3 produits scalaires sont égaux et valent 6

b) Les 2 produits scalaires sont égaux et valent -3

Exercice 3.21:

a) $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BO} = 4 \cdot 2 = 8$

b) $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BC} = 4^2 = 16$

c) $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{OB} = -4 \cdot 2 = -8$

d) $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BC} \bullet (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{JA} + 4 \cdot 2 = 4 \cdot 2 + 8 = 16$

e) $\overrightarrow{BO} \bullet \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BO} \bullet \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BO} \bullet \overrightarrow{OB} = -2^2 = -4$

f) $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BC} \bullet (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}) = \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BI} = -4^2 + \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{AJ} = -16 - 4 \cdot 2 = -24$

Exercice 3.22:

a) ↔ ❶ **b)** ↔ ❸ **c)** ↔ ❺ **d)** ↔ ❹ **e)** ↔ ❷

Exercice 3.23:

a) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 25$ **b)** $\angle BAC \approx 21{,}80°$

Exercice 3.24:

- $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} \approx 22{,}55$
- $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 48$
- $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 42$

Exercice 3.25:

a) $\vec{a} \bullet \vec{b} = 12$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 68{,}20°$ **b)** $\vec{a} \bullet \vec{b} = -9$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 146{,}31°$

c) $\vec{a} \bullet \vec{b} = 6$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 78{,}69°$ **d)** $\vec{a} \bullet \vec{b} = -18$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 146{,}31°$

Exercice 3.26:

a) Les droites AB et CD sont perpendiculaires

b) Vous avez obtenu que $\overrightarrow{DB} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$

c) $\overrightarrow{CB} \bullet \overrightarrow{CD} = 4$ puis $\angle BCD \approx 56{,}31°$

Exercice 3.27:

a) angle $= 60°$ **b)** angle $\approx 70{,}53°$ **c)** angle $= 120°$

Exercice 3.28:

$W = \vec{F} \bullet \vec{d} = F \cdot d \cdot \cos(\alpha) = 2{,}5 \cdot 300 \cdot \cos(35) = 614{,}4$ J.

Exercice 3.29:

a)
- Le travail de la **force de la pesanteur** est :

$$W_d\left(\vec{F}_\mathrm{p}\right) = \vec{F}_\mathrm{p} \bullet \vec{d} = F_\mathrm{p} \cdot d \cdot \cos(90° + \alpha)$$
$$= m \cdot g \cdot d \cdot \cos(90° + \alpha) = 4 \cdot 9{,}81 \cdot 15 \cdot \cos(120°) = -\mathbf{294{,}30}\,\mathrm{J}$$

- Le travail de la **force de soutien** est **nul** car perpendiculaire au déplacement :
- Le travail de la force motrice est :

$$W_d\left(\vec{F}_\mathrm{motr}\right) = \vec{F}_\mathrm{motr} \bullet \vec{d} = F_\mathrm{motr} \cdot d \cdot \cos(0°) = 30 \cdot 15 \cdot 1 = \mathbf{450}\,\mathrm{J}$$

- Le travail de la force de frottement est :

$$W_d\left(\vec{F}_\mathrm{frot}\right) = \vec{F}_\mathrm{frot} \bullet \vec{d} = F_\mathrm{frot} \cdot d \cdot \cos(180°) = 10 \cdot 15 \cdot (-1) = -\mathbf{150}\,\mathrm{J}$$

b) Appelons $\vec{F}_\mathrm{res}$ la force résultante. Son travail sur le déplacement $\vec{d}$ est donc

$$\begin{aligned}
W_d\left(\vec{F}_\mathrm{res}\right) &= \vec{F}_\mathrm{res} \bullet \vec{d} = \left(\vec{F}_\mathrm{p} + \vec{F}_\mathrm{soutien} + \vec{F}_\mathrm{motr} + \vec{F}_\mathrm{frot}\right) \bullet \vec{d} \\
&= \vec{F}_\mathrm{p} \bullet \vec{d} + \vec{F}_\mathrm{soutien} \bullet \vec{d} + \vec{F}_\mathrm{motr} \bullet \vec{d} + \vec{F}_\mathrm{frot} \bullet \vec{d} \\
&= W_d\left(\vec{F}_\mathrm{p}\right) + W_d\left(\vec{F}_\mathrm{soutien}\right) + W_d\left(\vec{F}_\mathrm{motr}\right) + W_d\left(\vec{F}_\mathrm{frot}\right) \\
&= -294{,}3 + 0 + 450 - 150 = \mathbf{5{,}7}\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$