2C

Mathématiques

Partie 1

Sarah Delmonico
Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2023-2024

Table des matières

Exercices

Solutions

1 Programmation linéaire

1.1 Inéquations linéaires à deux inconnues

Une **inéquation linéaire à deux inconnues** est une inéquation qui peut s'écrire sous l'une des formes suivantes, où a, b, c sont des nombres réels et x, y sont les inconnues :

$$ax+by<c \qquad ax+by>c \qquad ax+by\geq c \qquad ax+by\leq c$$

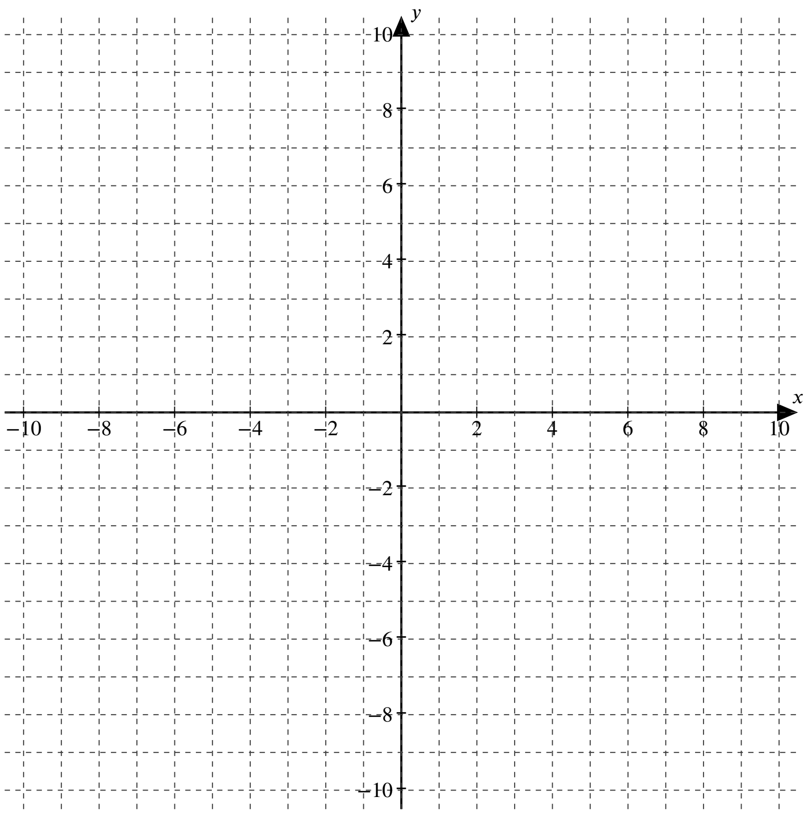
Une **solution** d'une inéquation linéaire à deux inconnues est un couple de la forme $(x\,;y)$, qui vérifie l'inéquation.

Exemple :

a) Parmi les couples ci-dessous, lesquels sont solutions de l'inéquation $3x-5y>15$?

$$(0\,;0) \qquad (4\,;-1) \qquad (2\,;3) \qquad (0\,;-4) \qquad (-6\,;-9)$$
$$(5\,;0) \qquad (-3\,;6) \qquad (9\,;1) \qquad (4\,;-8) \qquad (-7\,;-2)$$

b) Représenter graphiquement la droite $3x-5y=15$.



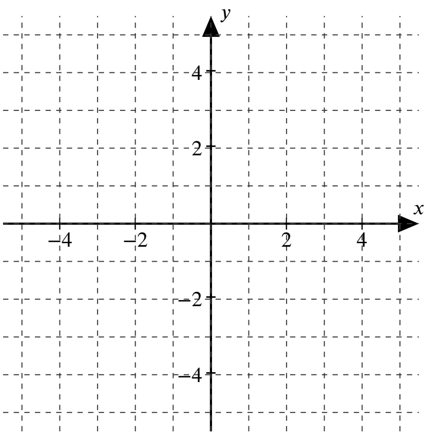
c) Placer les points dont les coordonnées sont les couples proposés au a) et colorier en rouge ceux qui sont solutions de l'inéquation $3x-5y>15$. Que constate-t-on ?

Pour **résoudre graphiquement** une équation linéaire à deux inconnues, il faut représenter la droite donnée par l'équation $ax+bx=c$. La solution de l'inéquation est l'un des deux demi-plans délimités par cette droite.

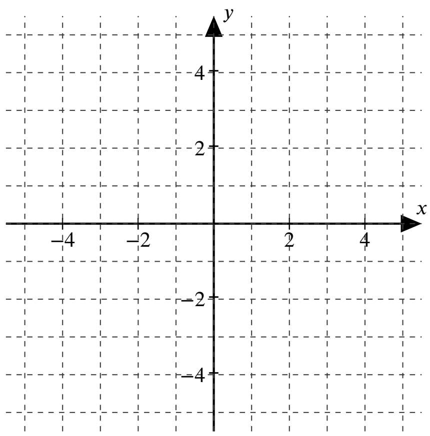
Pour déterminer lequel, il suffit de tester un point. Il faut aussi indiquer si la droite elle-même fait partie des solutions ou pas.

Exemples : Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des inéquations ci-dessous :

$x+y\le 2$



$-2x+3y>8$



1.2 Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues

Un **système d'inéquations** est un ensemble d'inéquations considérées simultanément.

Une accolade (ouune barre verticale) indique que les inéquations forment un système.

Une **solution** du système d'inéquations est un couple de la forme $(x\,;y)$, qui vérifie toutes les inéquations simultanément.

Exemple : Parmi les couples ci-dessous, lesquels sont solutions du système ?

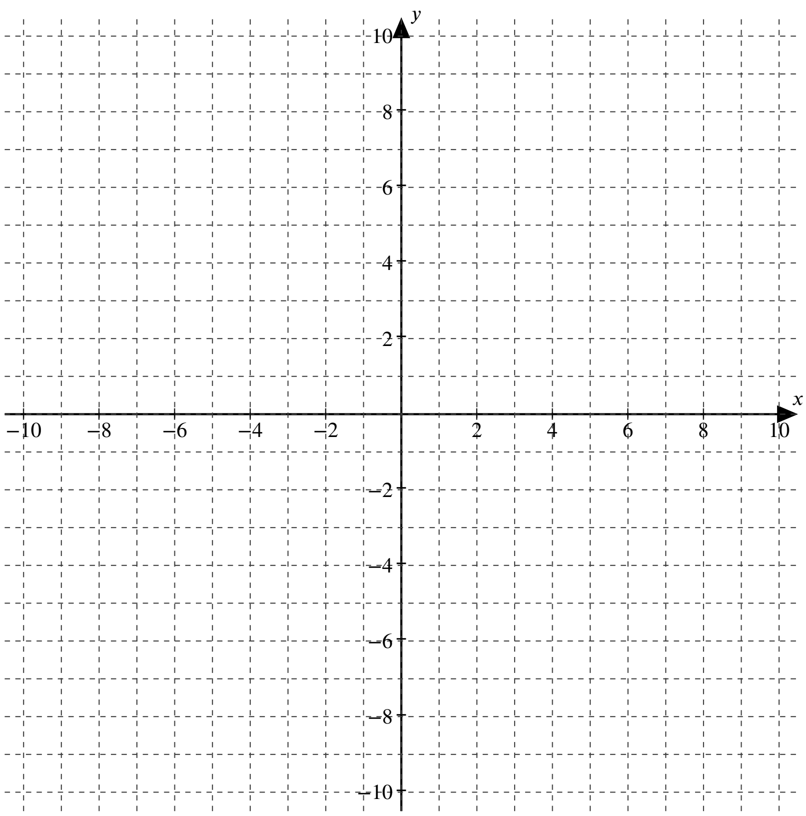
$$\begin{cases} x-2y \geq -10 \\ 2x+y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$(0\,;0)$ $(4\,;-1)$ $(2\,;3)$ $(1\,;6)$

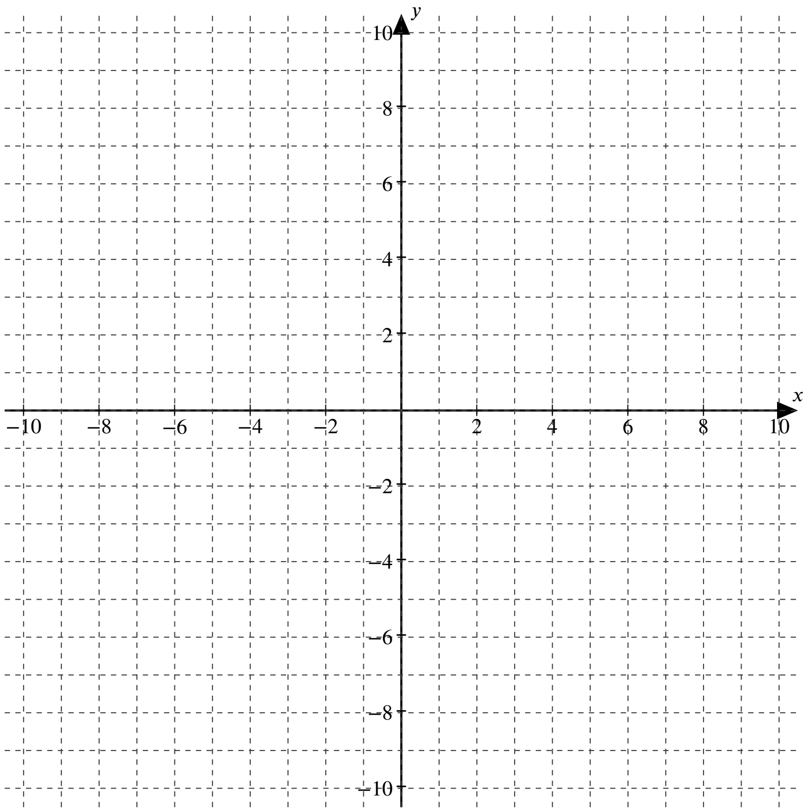
$(5\,;0)$ $(-3\,;0)$ $(6\,;0)$ $(4\,;1)$

Exemples : Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} -x+2y \leq 4 \\ 2x+3y < 6 \end{cases}$



b) $\begin{cases} -x+y>-5 \\ 5x+2y\leq 10 \\ x>-2 \\ y\geq -4 \end{cases}$

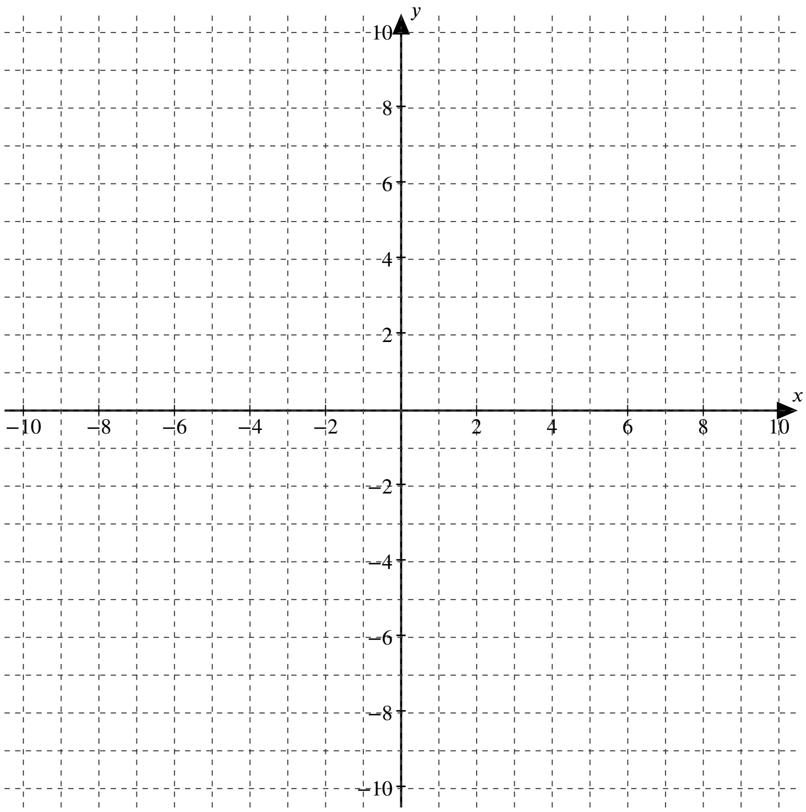


L'ensemble des solutions d'un système d'inéquations est un **polygone** convexe ou une surface polygonale ouverte convexe. Pour simplifier, nous utiliserons le terme polygone dans toutes les situations. Pour l'obtenir, on fait l'intersection des surfaces des solutions de chacune des équations du système.

Pour **trouver algébriquement les coordonnées de ses sommets**, il faut résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues, obtenues à partir des inéquations de départ.

Exemple : Résoudre graphiquement et déterminer les coordonnées des sommets du polygone des solutions.

$$\begin{cases} x-2y \geq -10 \\ 2x+y \leq 10 \\ x \geq -1 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$$



Application : La cafeteria prépare des pique-niques pour les étudiants. Il y en a deux sortes :

A) 3 sandwichs, 2 boissons, 1 dessert

B) 2 sandwichs. 1 boisson, 3 desserts.

On appelle x le nombre de pique-niques A et y le nombre pique-niques B .

a) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 32 sandwichs à disposition.

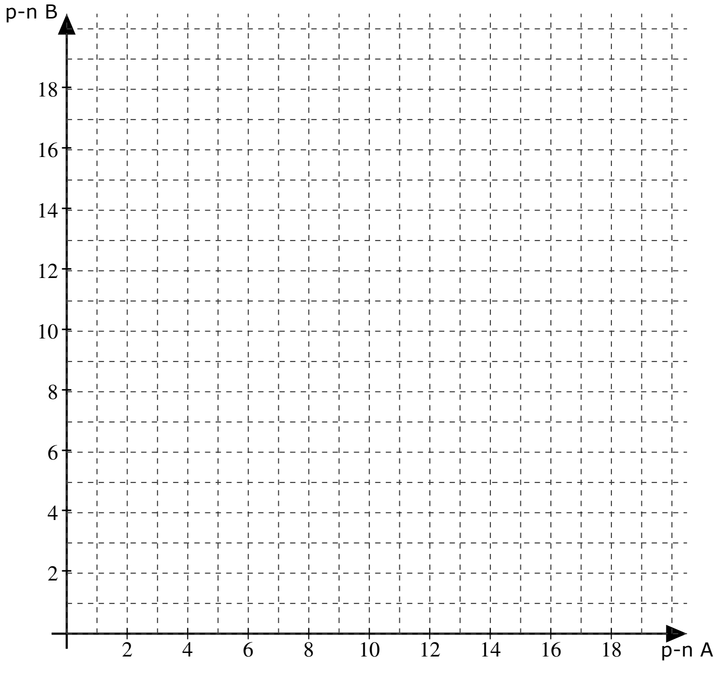
b) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 20 boissons à disposition.

c) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 30 desserts à disposition.

d) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 10 sandwichs que l'on doit absolument utiliser.

e) Écrire des inéquations qui expriment le fait que x et y sont des nombres positifs.

f) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de ce système d'inéquations.



g) Vérifier graphiquement et algébriquement que $(4;8)$ est une solution de ce système et expliquer ce que cela veut dire par rapport au problème.

1.3 Introduction à la programmation linéaire à deux variables

La programmation linéaire à deux variables peut se définir comme un outil mathématique permettant de résoudre certains problèmes d'optimisation liés à des contraintes. Dans de tels problèmes, on cherche deux quantités respectant des contraintes et qui rendent maximum ou minimum une valeur qui leur est liée, que l'on appelle **objectif**.

Exemple : Un potier fabrique deux types de vases. La fabrication d'un vase de type A demande 1 heure de travail et $1{,}5$ kg de terre. Ceux de type B demandent 2 heures de travail et 750 g de terre.

Le potier travaille entre 4 et 8 heures et a 6 kg de terre à sa disposition. Il fera un bénéfice est de CHF $30.–$ pour chaque vase de type A et de CHF $40.–$ pour ceux de type B.

Combien de vases de chaque sorte doit-il fabriquer pour avoir un bénéfice maximum ? Et pour un bénéfice minimum ?

Pour résoudre de tels problèmes, nous allons traiter un système d'inéquations linéaires à deux inconnues conjointement avec une **fonction objectif** à deux variables de la forme :

$$P(x\,;y) = ax + by + c$$

où a, b, c sont des nombres réels et x, y sont les variables.

La fonction P est appelée la **fonction objectif**.

Les inéquations du système expriment les **contraintes**.

Les solutions du système sont les **solutions possibles du problème**.

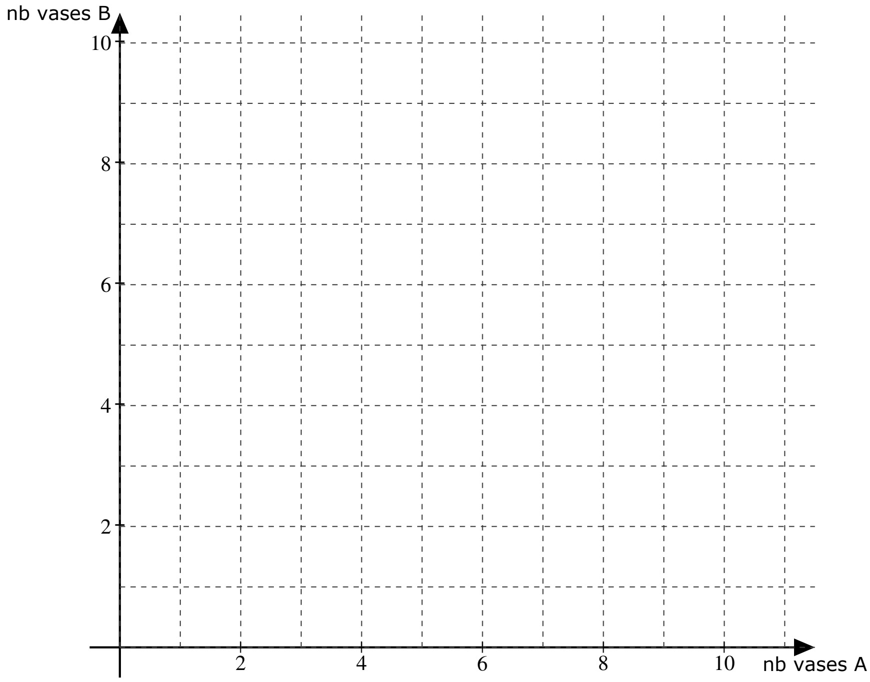
Les **solutions du problème** sont les solutions possibles, qui rendent maximum ou minimum la fonction objectif.

Exemple :

a) Que sont les variables et la fonction objectif de l'exemple précédent ? Quelle est l'expression de $P(x\,;y)$?

b) Écrire toutes les contraintes sous forme d'inéquations.

c) Résoudre graphiquement le système d'inéquations et déterminer algébriquement les coordonnées des sommets du polygone des solutions possibles.



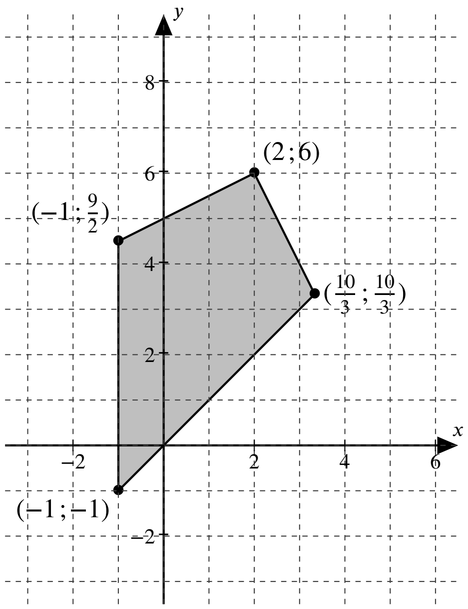
d) Quelles sont concrètement toutes les solutions possibles du problème ?

e) Calculer le bénéfice pour chacune d'entre elles. Laquelle donne le bénéfice le plus élevé ? Et le moins élevé ?

Exemple : Soit la fonction objectif $P(x\,;y) = 3x + y$ avec les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x - 2y \geq -10 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq -1 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$$

Nous avons vu précédemment que le polygone des solutions possibles est :



Soit P une valeur choisie pour $P(x\,;y)$. Comme $P = 3x + y$, on peut écrire $y = -3x + P$. Donc tous les points se trouvant sur la droite $y = -3x + P$ donnent la valeur choisie.

Choisissons par exemple $P = 6$. Dessiner la droite $y = -3x + 6$ sur le graphique, puis choisir 3 points de cette droite et calculer $P(x\,;y)$ pour ces points.

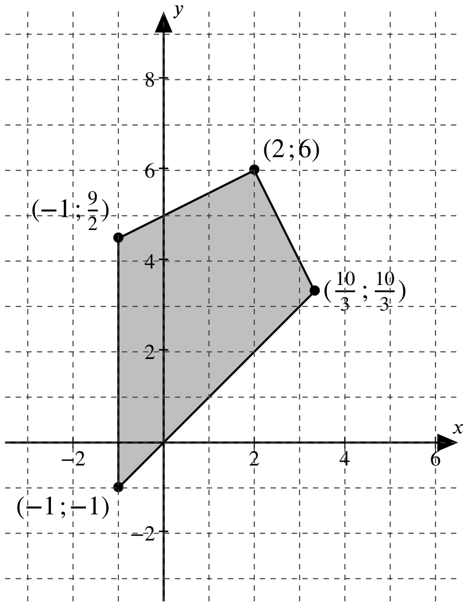
Ici, pour que P soit maximum, il faut que l'ordonnée à l'origine de $y = -3x + P$ soit maximum.

Cela revient à chercher un point $(x\,;y)$ qui est sur une droite $y = -3x + P$ avec la plus grande ordonnée à l'origine P possible et qui respecte les contraintes. Quel est ce point et quelle est la valeur maximale de P?

Et si x et y doivent être des nombres entiers ?

Exemple : Le raisonnement est-il le même pour la fonction objectif $P(x\,;y)=3x-y$?

Trouver le maximum de $P(x\,;y)=3x-y$ avec les contraintes précédentes.



Nous procédons de la manière suivante :

- Représenter graphiquement le polygone des solutions possibles, déterminé par le système d'inéquations.

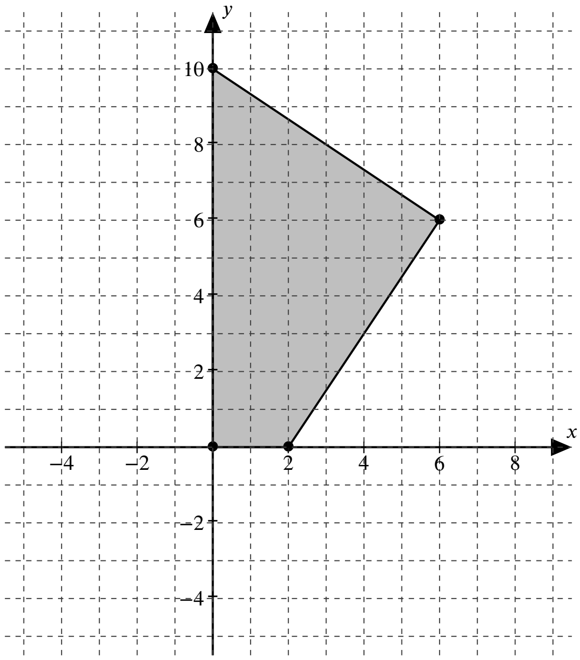
- Calculer algébriquement les coordonnées des sommets de ce polygone et vérifier la précision du graphique.

- Écrire y en fonction de x et de P pour trouver sa pente, puis dessiner une droite de même pente.

- Translater cette droite pour avoir l'ordonnée à l'origine la plus grande possible, tout en passant par une des solutions possibles, puis faire de même, avec l'ordonnée à l'origine la plus petite possible possible. Une de ces deux droites donne le maximum de P et l'autre le minimum.

- Calculer la valeur de P pour ces deux droites de manière à différencier le maximum du minimum.

Exemple : On donne les contraintes représentées ci-dessous :



a) Pour quels points $(x\,;y)$, à coordonnées entières et respectant les contraintes ci-dessus, la fonction $P_1(x\,;y) = x + 2y$ vaut-elle 16 ?

b) Chercher la valeur maximale de la fonction $P_1(x\,;y) = x + 2y$.

c) Chercher la valeur maximale de la fonction $P_2(x\,;y) = 3x + y$.

d) Chercher la valeur maximale de la fonction $P_3(x\,;y) = x - y$.

e) Chercher la valeur maximale de la fonction $P_4(x\,;y) = 2x + 3y$.

1.4 Applications

La programmation linéaire peut s'appliquer dans de nombreux problèmes de gestion : problèmes d'organisation de transports, de production, d'investissement... dans le but de maximiser les bénéfices, minimiser les coûts, le temps de trajet...

Pour résoudre de tels problèmes, il faut :

- définir les variables x et y,
- trouver l'expression de la fonction objectif $P(x\,;y)$,
- écrire les contraintes sous forme de système d'inéquations,

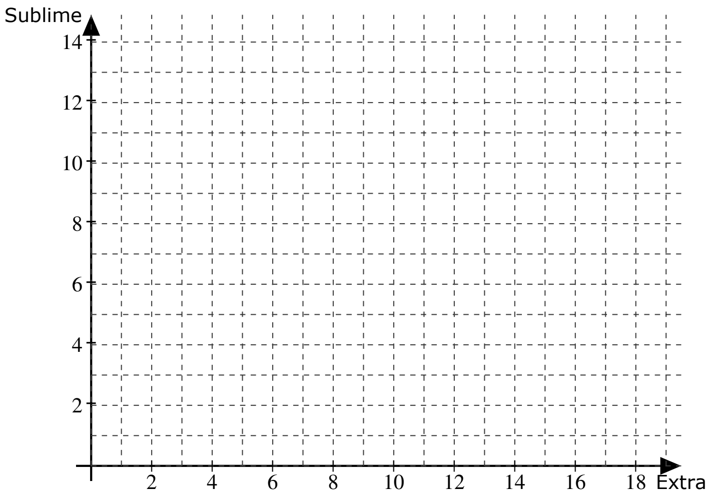
puis procéder comme vu précédemment, sans oublier de répondre concrètement à la question posée.

Exemple : À l'approche des fêtes de Pâques, un artisan chocolatier décide de confectionner des oeufs en chocolat. En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste 18 kg de cacao, 8 kg de noisettes et 14 kg de lait.

Il a deux spécialités : l'oeuf Extra et l'oeuf Sublime. Un oeuf Extra nécessite 1 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 2 kg de lait. Un oeuf Sublime nécessite 3 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 1 kg de lait.

Il fera un profit de CHF $20.–$ en vendant un oeuf Extra, et de CHF $30.–$ en vendant un oeuf Sublime.

Combien d'oeufs Extra et Sublime doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible et quel sera ce bénéfice maximum ?



2 Fonctions quadratiques

2.1 Définition

Une **fonction quadratique** est une fonction polynomiale du 2e degré.

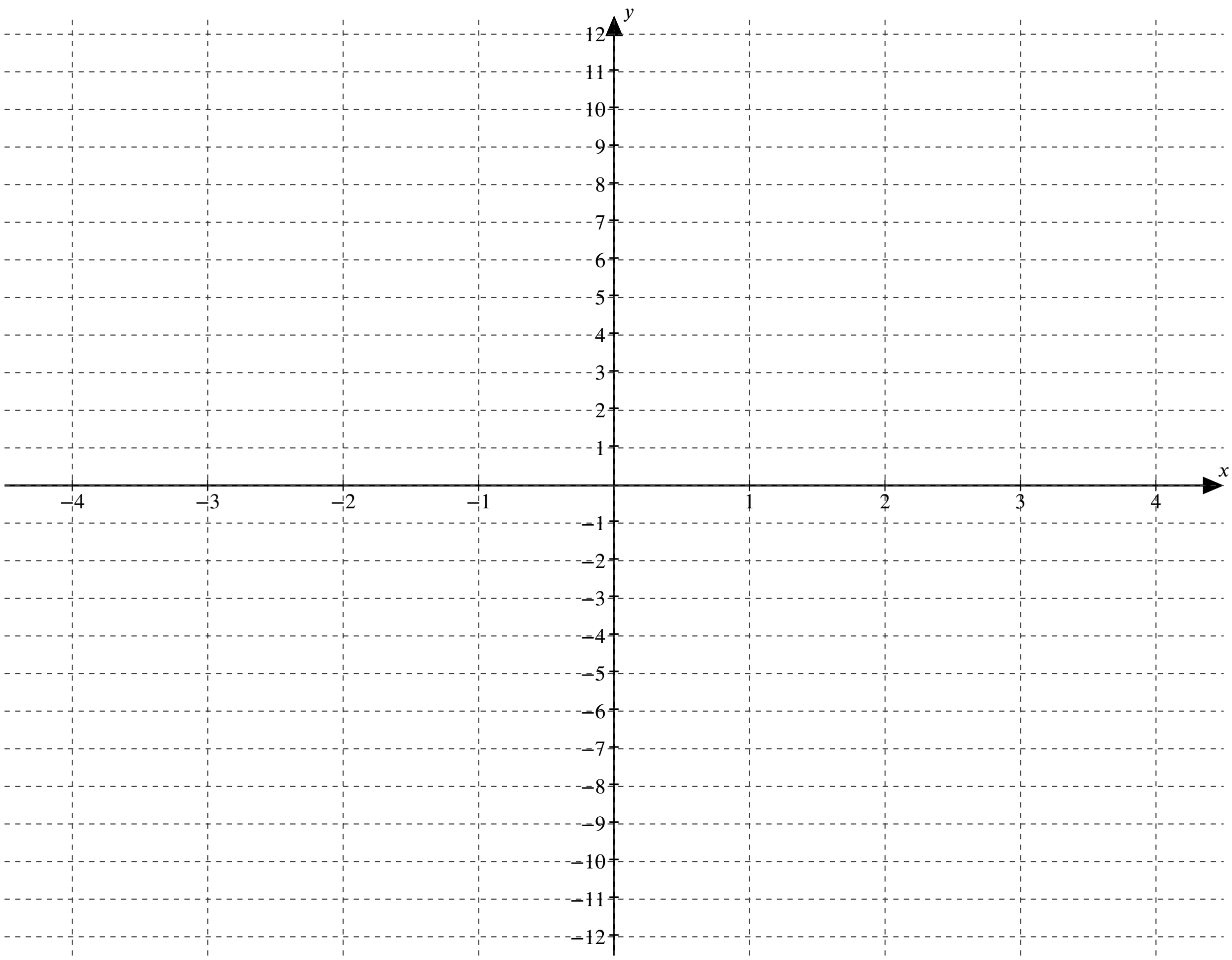
Son expression peut se ramener à une expression du type :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{où } a,\ b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels avec } a \neq 0.$$

Exemples :

Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions f et g.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2 + 3x$									
$g(x) = -0{,}5x^2 + 2x - 2$									



2.2 Graphe et points caractéristiques

Le graphe de la fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une **parabole**.

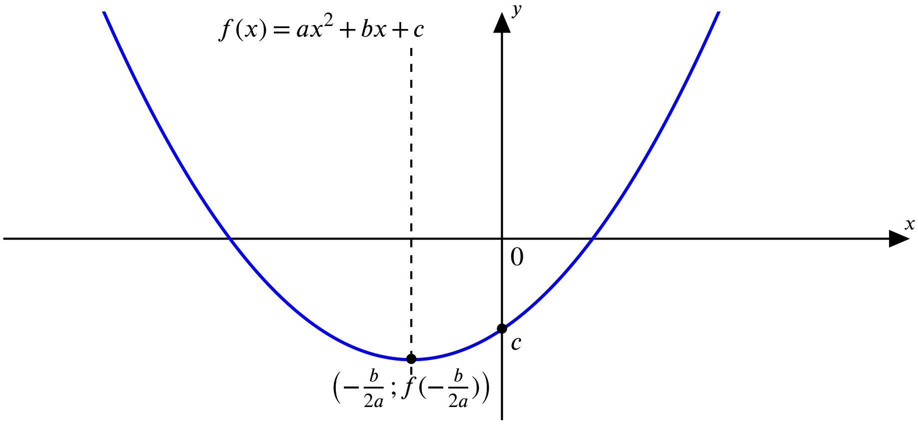
Son **ordonnée à l'origine** est le coefficient c.

La parabole a un **sommet**, noté S, et un **axe de symétrie vertical** qui passe par ce sommet.

La première coordonnée du sommet peut se calculer grâce aux coefficients de l'expression de la fonction :

$$\boxed{x_S = -\frac{b}{2a}}$$

Pour trouver la deuxième coordonnée, il suffit de remplacer x par la valeur de x_S dans l'expression de la fonction.

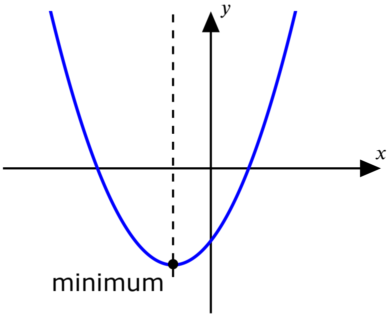


Exemple : Déterminer l'ordonnée à l'origine et calculer les coordonnées du sommet S de la parabole d'équation $y = x^2 + 3x$, puis vérifier sur le graphe du paragraphe 2.1.

Si $\boxed{a > 0}$:

La parabole « sourit », elle est **convexe**.

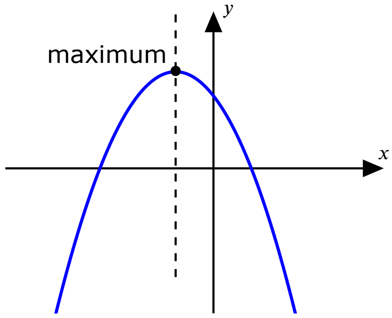
Le sommet est alors un **minimum**.



Si $\boxed{a < 0}$:

la parabole « est triste », elle est **concave**.

Le sommet est alors un **maximum**.



Exemple : Soit $g(x) = -0{,}5x^2 + 2x - 2$.

a) Calculer les coordonnées de son sommet. Indiquer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

b) Déterminer son ordonnée à l'origine.

c) Vérifier sur le graphe du paragraphe 2.1.

Une parabole peut couper l'axe Ox en 0, 1 ou 2 points, qui correspondent aux **zéros** de la fonction.

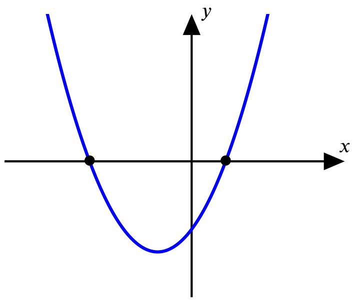
On peut les trouver en résolvant l'équation $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$.

Si $\Delta > 0$:

L'équation a 2 solutions.

La fonction a 2 zéros.

La parabole coupe l'axe Ox en 2 points.

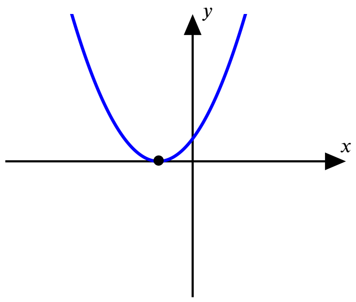


Si $\Delta = 0$:

L'équation a 1 solution.

La fonction a 1 zéro.

La parabole est tangente à l'axe Ox.

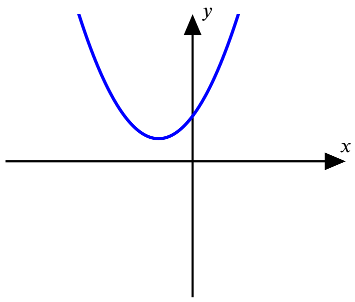


Si $\Delta < 0$:

L'équation n'a pas de solution.

La fonction n'a pas de zéro.

La parabole ne coupe pas l'axe Ox.



Exemple : Soit les fonctions $f(x) = -4x^2 + 4x + 15$ et $g(x) = x^2 - 2x + 5$.

a) Calculer les coordonnées du sommet du graphe de chaque fonction. Indiquer s'il s'agit de maximum ou de minimum.

b) Déterminer l'ordonnée à l'origine de chacune de ces fonctions.

c) Calculer les éventuels zéros de f et de g.

d) Esquisser le graphe de chaque fonction en indiquant tous les points particuliers.

Résumé

Dans chaque case, esquisser le graphe.

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

2.3 Intersections

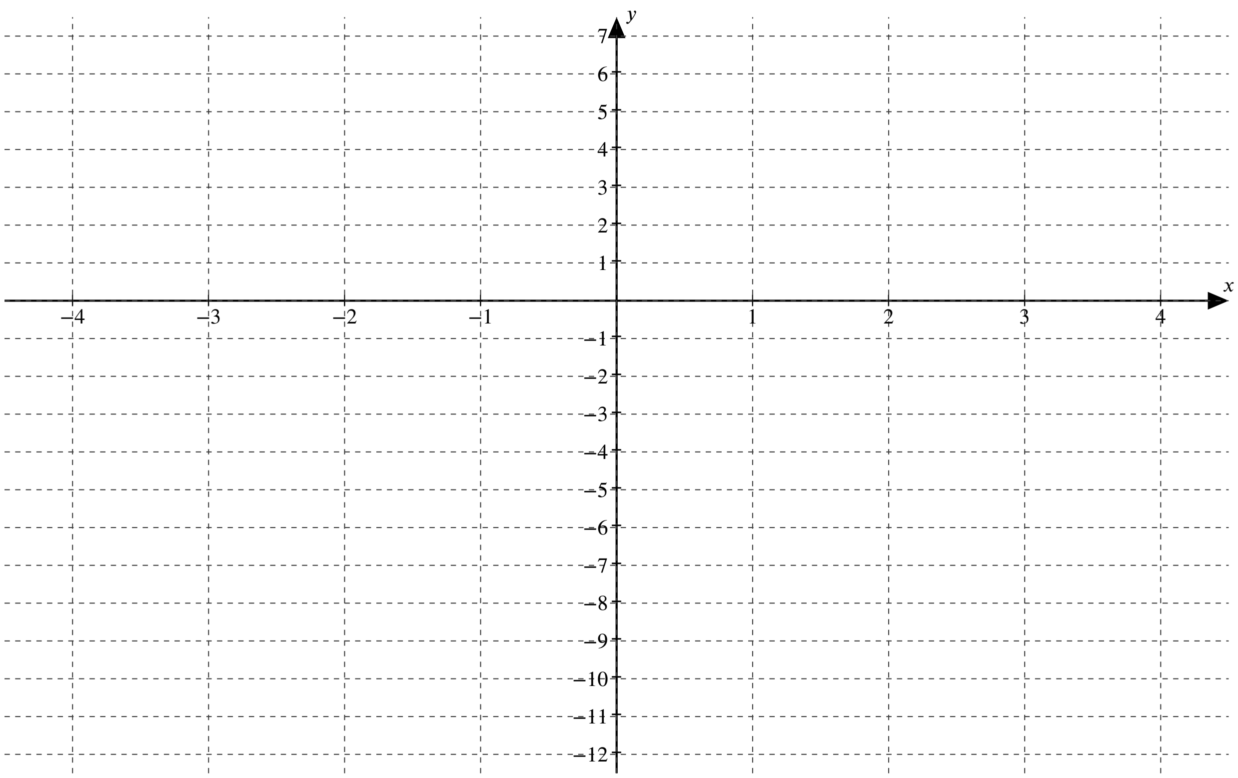
Pour trouver la première coordonnée des éventuels points d'intersection du graphe de f et du graphe de g, il faut résoudre l'équation :

$$\boxed{f(x) = g(x)}$$

Pour trouver la deuxième, on calcule l'image des valeurs obtenues.

Exemple : Soit $f(x) = -x^2 + 5$ et $g(x) = -\frac{3}{2}x - 5$.

Calculer les coordonnées exactes des points d'intersection du graphe de f et du graphe de g, puis représenter graphiquement ces fonctions.



2.4 Optimisation quadratique

Les problèmes d'**optimisation** sont des problèmes où l'on cherche à déterminer quand une mesure sera maximum ou minimum.

On procédera de la manière suivante :

- lire soigneusement tout le problème et effectuer éventuellement un croquis de la situation,
- déterminer les variables avec leur unité ;
- écrire les équations liant les différentes variables (autant d'équations qu'il y a de variables) ;
- définir la quantité à optimiser avec son unité et l'exprimer en fonction des variables choisies ;
- substituer pour n'avoir plus qu'une seule variable dans la fonction ;
- déterminer les valeurs qui maximisent ou minimisent la fonction (sommet $\Longrightarrow -\dfrac{b}{2a}$ ou valeurs extrêmes) ;
- vérifier que les solutions obtenues sont cohérentes avec l'ensemble du problème ;
- donner la réponse au problème à l'aide d'une phrase, sans oublier les unités.

Exemple : Je désire construire un enclos rectangulaire pour mon lapin. Un des côtés de l'enclos sera le mur de ma maison et les trois autres seront faits grâce à une clôture de 6 mètres de longueur. Quelles dimensions vais-je choisir pour que mon lapin ait le plus de place possible ?

Exemple : De 2000 à 2010, les dépenses en communication d'une grande société ont évoluées selon la fonction suivante :

$$d(x) = -0{,}6x^2 + 5x + 130$$

où x est le nombre d'années depuis l'an 2000.

Durant cette période, en quelle année les dépenses ont été :

a) les plus élevées ?

b) les moins élevées ?

3 Polynômes et fonctions polynomiales

3.1 Rappel - Factorisation du degré 2

Factoriser un polynôme, c'est le transformer en un produit de deux ou plusieurs polynômes appelés **facteurs** :

$$10x^2+70x+100 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 10(x+2)(x+5)$$

Lorsque l'on veut factoriser un polynôme, on commence par essayer la **mise en évidence** :

$$-88x^5-33x^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -11x^3(8x^2+3)$$

La parenthèse obtenue doit, lorsque c'est possible, être encore factorisée.

Pour les **polynômes de degré 2**, les différentes méthodes sont :

- Repérer un **produit remarquable** :

$$\boxed{\begin{array}{c} A^2+2AB+B^2=(A+B)^2 \\[1em] A^2-2AB+B^2=(A-B)^2 \\[1em] A^2-B^2=(A+B)(A-B) \end{array}}$$

- Décomposer un **trinôme unitaire de degré 2 (somme-produit)** :

$$\boxed{x^2+(a+b)x+a\cdot b=(x+a)(x+b)}$$

- Utiliser la **formule du discriminant** :
  Si $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ alors $\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$

  où $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

  Si $\Delta<0$, le polynôme n'est pas factorisable.

Exemples : Factoriser par les méthodes les plus efficaces.

a) $x^3 - 7x^2 + 10x$

b) $100x^2 - 130x - 30$

c) $6x^4 - 6$

d) $-28x^6 + 63x^4$

e) $3x^2 - 10x + \frac{25}{3}$

f) $\frac{1}{10}x^4 + \frac{4}{5}x^3 + 2x^2$

g) $3x^2 - x - 2$

3.2 Factorisation pour les degrés supérieurs à 2

Dans ce chapitre, nous allons étudier plusieurs méthodes de factorisation pour des polynômes de degrés supérieurs à 2.

3.2.1 Changement de variable

Effectuer, réduire et comparer :

a) $(x^2+5)(x^2+2)$

b) $(y+5)(y+2)$

Dans certains cas, le polynôme à factoriser ressemble à un polynôme que l'on sait factoriser, mais ses puissances ont été doublées.

Exemple : x^4-7x^2+12

Pour le factoriser, on effectue un **changement de variable** : On pose que $y=x^2$ et donc que $y^2=x^4$.

Exemple : Factoriser x^4-18x^2+81.

Effectuer, réduire et comparer :

a) $(2x^3+1)(x^3-5)$

b) $(2y+1)(y-5)$

Un changement de variable peut donc aussi s'utiliser si les puissances ont été multipliées par un autre entier que 2.

Exemples :

a) x^6-9x^3+8

b) $8x^6-63x^3-8$

Mais comment factoriser les polynômes obtenus ? C'est ce que nous verrons dans le prochain paragraphe...

3.2.2 Produits remarquables du 3e degré

Tout comme pour le 2e degré, il existe des **produits remarquables** pour le 3e degré :

$$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3$$

$$A^3-3A^2B+3AB^2-B^3=(A-B)^3$$

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$$

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$

On peut les utiliser pour factoriser ou effectuer certains polynômes :

Exemples :

a) Effectuer $(2x+1)^3$

b) Effectuer $(3x-2)^3$

c) Factoriser x^3-64

d) Factoriser $1000x^3+27$

e) Factoriser $8x^3-35x^2+54x-27$

3.2.3 Méthode du groupement

La **méthode du groupement** est une mise en évidence un peu plus complexe que celles effectuées jusque-là. Nous l'utiliserons avec des polynômes à 4 termes.

Effectuer les multiplications ci-dessous et observer les résultats obtenus :

a) $(3x^2+7)(2x+11)=$

b) $(x^2-5)(2x+11)=$

c) $(9x^3+1)(2x+11)=$

Exemples : Factoriser les polynômes ci-dessous :

a) $11x^3-3x^2-44x+12$

b) $x^4+7x^3+8x+56$

3.3 Division euclidienne

Pour factoriser, il faut parfois diviser.

Exemple : Écrire 5999 sous forme d'une multiplication, sachant qu'il est divisible par 7.

Pour les polynômes, nous allons procéder de la même manière et pour cela il nous faut apprendre à diviser des polynômes. La méthode est très similaire à la division en colonne pour les nombres.

Effectuer $92'737 : 5$ en colonne, avec reste et expliquer les étapes de la méthode. Écrire l'égalité fondamentale.

Nous allons maintenant diviser $14x^3 - 29x^2 - 5$ par $2x^2 - 3x + 1$.

Égalité fondamentale :

Exemples : Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

a) $F(x)=6x^2+x-5$ et $G(x)=3x+2$

b) $F(x)=4x^3-28x+24$ et $G(x)=x^2+2x-3$

Critère de divisibilité par $x - a$:

En observant le dernier exemple de la page précédente, on peut remarquer que l'écriture de l'égalité fondamentale est une manière de factoriser lorsque le reste est nul.

Exemple : $F(x) = 4x^3 - 28x + 24 =$

Lorsque le résultat de la division de $F(x)$ par $G(x)$ est égal à zéro, on dit que $F(x)$ est **divisible** par $G(x)$. $G(x)$ est alors un **diviseur** de $F(x)$.

Exemple : $F(x) = 4x^3 - 28x + 24$ est divisible par $G(x) = x^2 + 2x - 3$.
$G(x) = x^2 + 2x - 3$ est un diviseur de $F(x) = 4x^3 - 28x + 24$.

Mais comment peut-on trouver un diviseur pour un polynôme $F(x)$ donné ?

Observons un exemple de polynôme factorisé :

Exemple : $F(x) = (x - 10)(2x + 1)(x + 3)$

a) Réduire $F(x)$.

b) Comparer le terme de degré zéro avec la forme factorisée de $F(x)$. Que pouvez-vous en dire ? Pouvez-vous l'expliquer ?

c) Calculer $F(10)$ à l'aide du polynôme réduit, puis du polynôme factorisé. Que pouvez-vous en dire ? Pouvez-vous l'expliquer ?

Soit un polynôme $F(x)$ et un nombre réel a.

$$\boxed{F(x) \text{ est divisible par } x-a \text{ si et seulement si } F(a)=0}$$

Exemple :

a) Sans effectuer de division, trouver, parmi les propositions ci-dessous, les polynômes divisibles par $x-10$.

$A(x)=x^3+7x^2+6x-8$

$C(x)=2x^3-7x^2-200x+700$

$B(x)=x^{300}-5x^{23}+3x+1$

$D(x)=x^3-9x^2-16x+60$

b) Pour ceux qui sont divisibles par $x-10$, effectuer la division, écrire l'égalité fondamentale et finir la factorisation.

Factorisation grâce à la division euclidienne

1) Tester les diviseurs positifs et négatifs du terme de degré 0 de $F(x)$ jusqu'à avoir trouvé un nombre a tel que $F(a)=0$.

2) Effectuer la division de $F(x)$ par $x-a$. Son reste doit être nul.

3) Écrire l'égalité fondamentale de cette division. La première étape de factorisation est faite.

4) Si cela est possible, continuer la factorisation à l'aide de la même méthode ou d'une autre méthode connue.

Exemples : Factoriser.

a) $x^3+3x^2-10x-24$

b) $2x^3+7x^2-14x+5$

c) $6x^4 - 19x^3 + 13x^2 + 4x - 4$

Exemples : Résoudre par factorisation.

a) $6x^4 + 43x^3 + 6x^2 - 7x = 0$

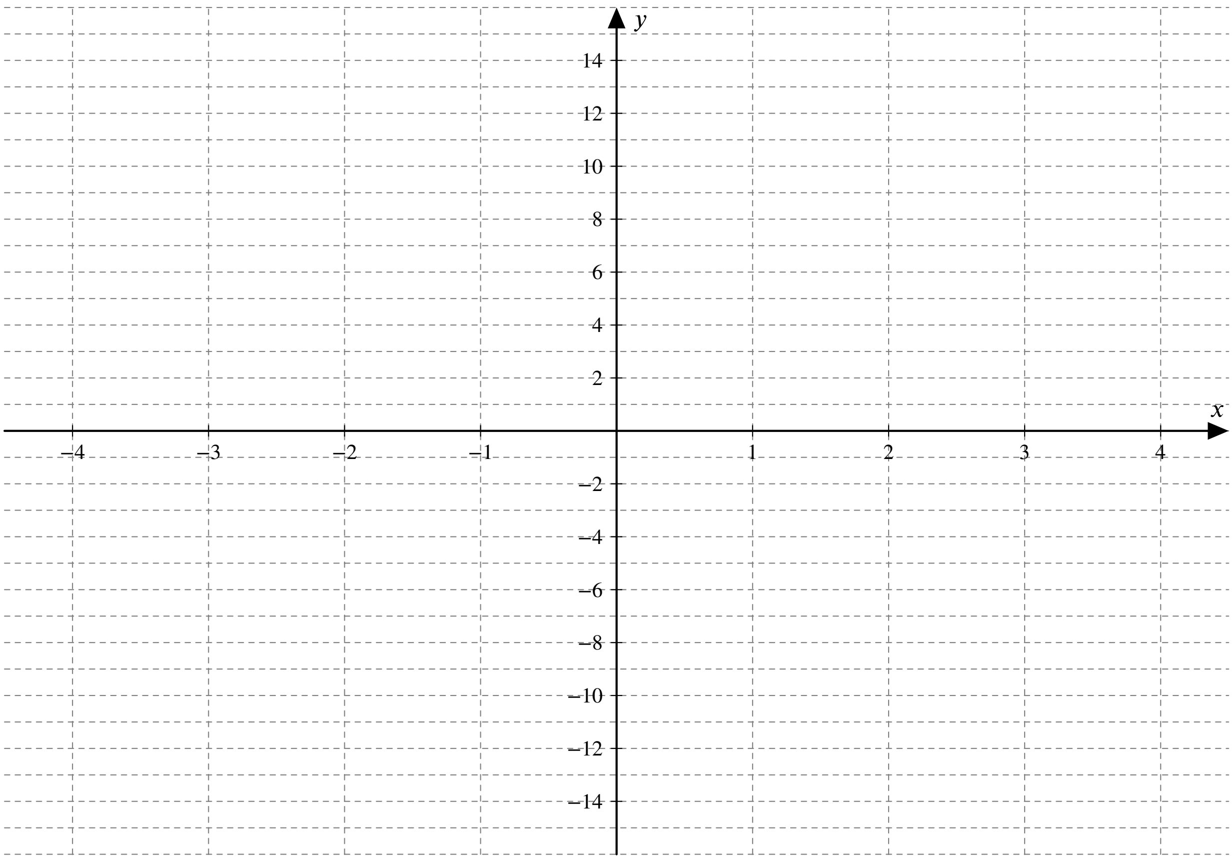
b) $x^3 + 7x^2 + 11x = -5$

3.4 Fonctions polynomiales

3.4.1 Généralités

Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement la fonction f.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=(x+2)(x+\frac{1}{2})(x-3)$							



On peut remarquer que le tableau de valeurs n'est pas forcément l'outil idéal pour représenter une fonction polynomiale. Les valeurs intéressantes, par exemple les zéros de la fonction, n'apparaissent pas systématiquement dedans. De plus, il y a beaucoup de calculs à effectuer pour le remplir.

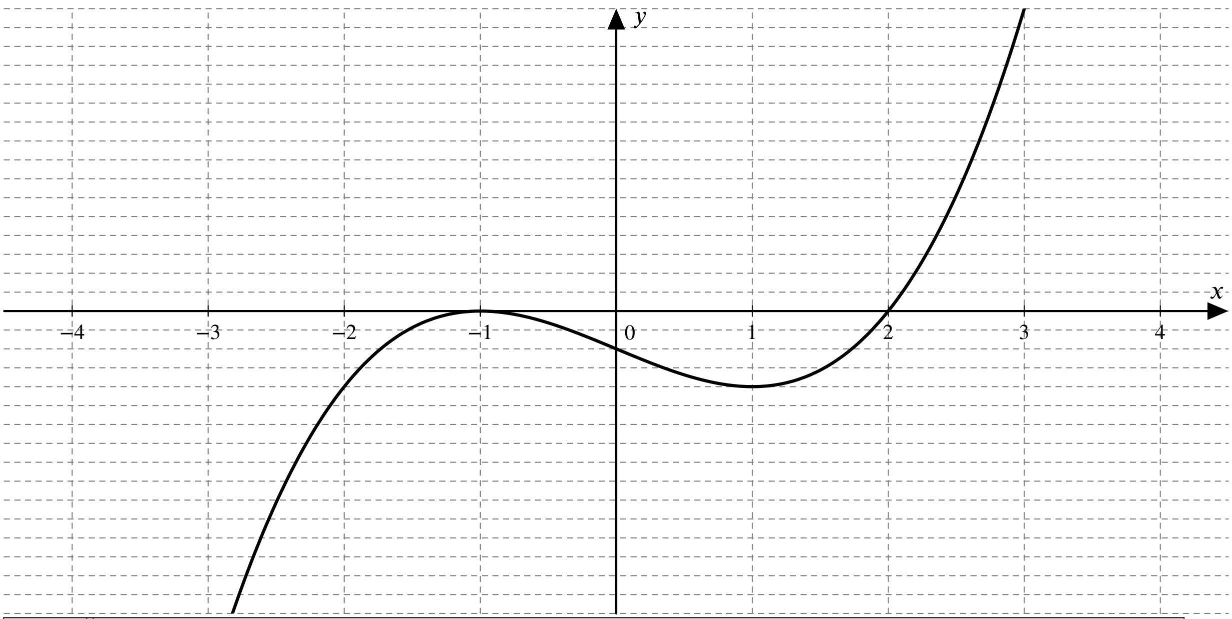
Il est souvent plus simple et approprié d'utiliser le **tableau des signes de la fonction**. C'est un tableau dans lequel la première ligne contient les zéros et les valeurs interdites de la fonction, tandis que la deuxième indique le signe des images obtenues :

x		-2		$-0{,}5$		3	
$f(x)=(x+2)(x+0{,}5)(x-3)$	−	0	+	0	−	0	+

On dit alors qu'on **étudie le signe de la fonction**.

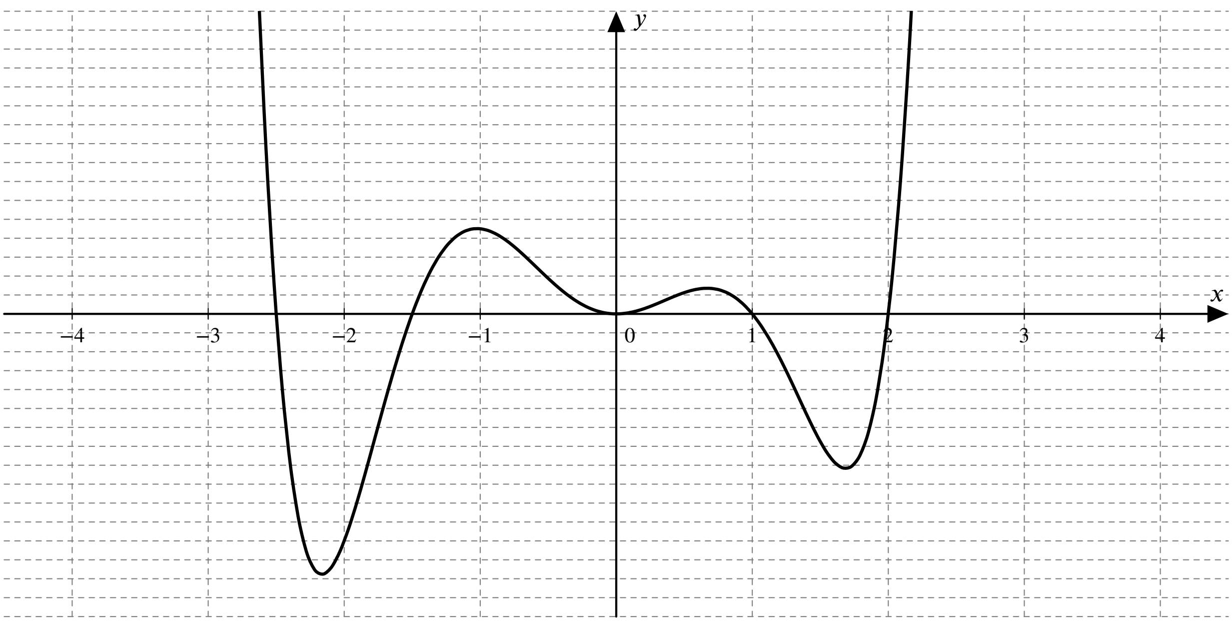
Exemples : Compléter le tableau des signes des fonctions représentées ci-dessous.

a)



x	
$f(x)$	

b)

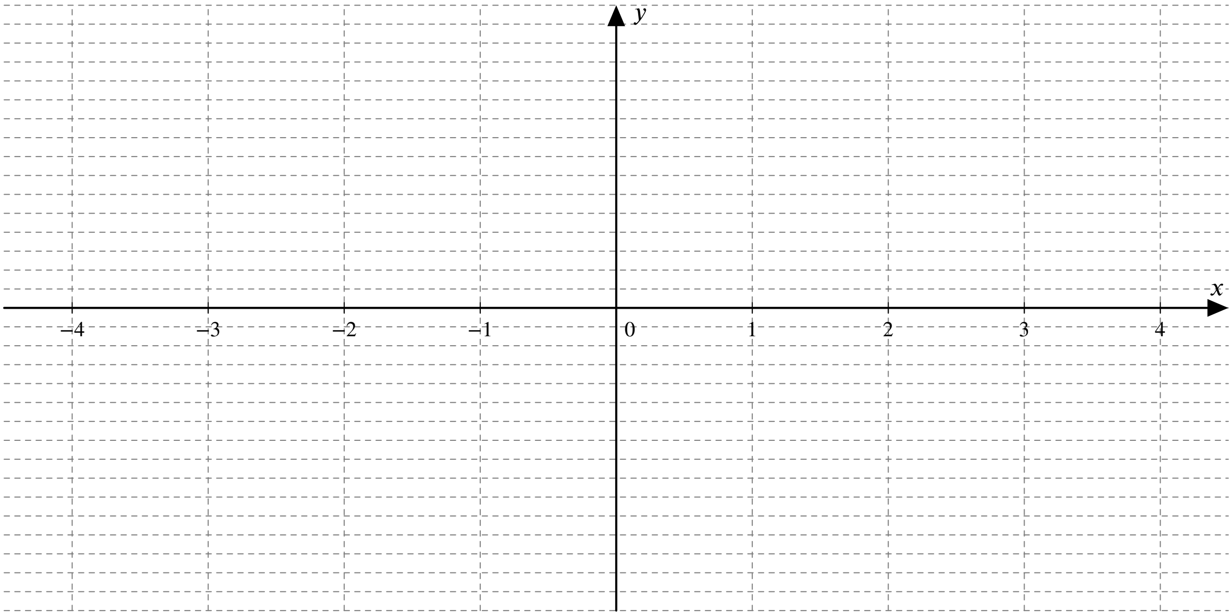


x	
$f(x)$	

Exemples : Faire une esquisse du graphe d'une fonction correspondant au tableau des signes.

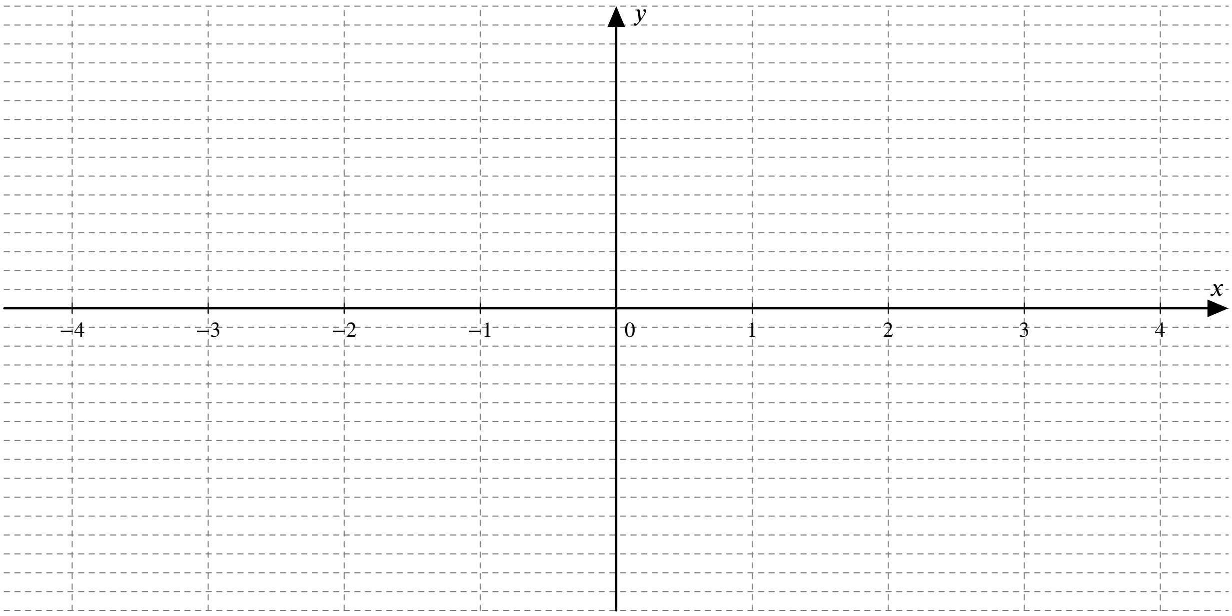
a)

x		-3		-1		$\frac{7}{2}$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$



b)

x		-2		0		$\frac{3}{2}$		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$



Exemples : Compléter ce tableau de valeurs, puis le tableau des signes correspondant.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$4x$									
$x+3$									
$2-x$									
$4x(x+3)(2-x)$									

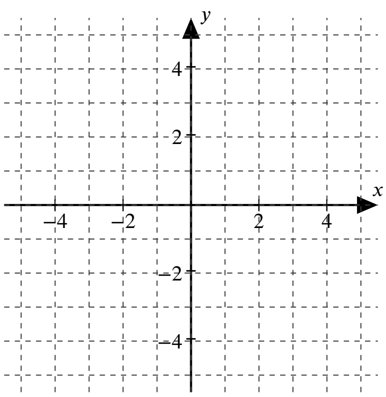
x	
$4x$	
$x+3$	
$2-x$	
$4x(x+3)(2-x)$	

On peut observer que le signe du produit est déterminé par les signes des facteurs et la règle des signes. Or, tout polynôme est décomposable en produit de facteurs du 1er et du 2e degrés. Nous allons donc étudier le signe des fonctions affines et quadratiques et nous en servir pour trouver le signe des autres fonctions polynomiales.

3.4.2 Signe d'une fonction affine

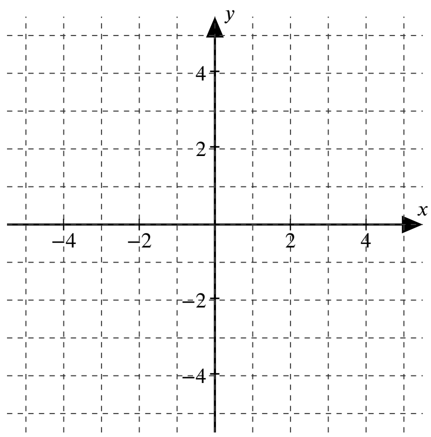
Exemples : Représenter le graphe de la fonction puis remplir son tableau des signes.

a) $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$



x	
$f(x)$	

b) $g(x)=-\dfrac{1}{2}x+1$



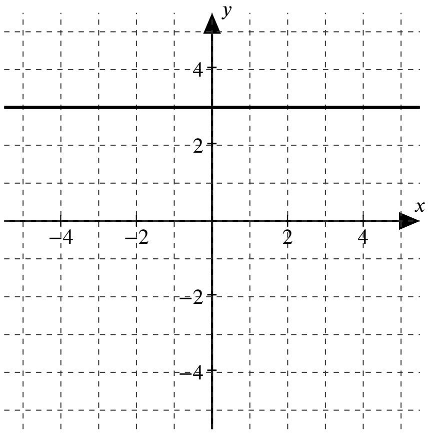
x	
$g(x)$	

Le graphe d'une fonction affine $f(x)=mx+h$ est une droite. On a donc les cas de figure suivants :

– Si $m=0$, la fonction est constante et son signe est celui de h.

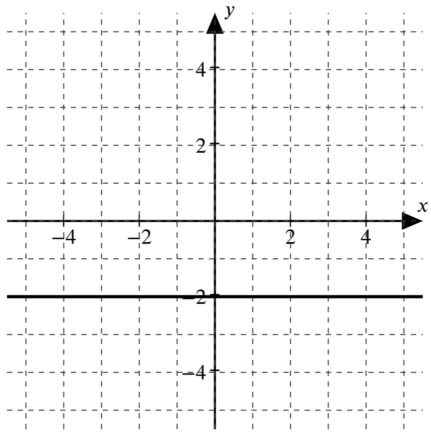
Exemples :

a) $f(x)=3$



x	
$f(x)$	+

b) $g(x)=-2$

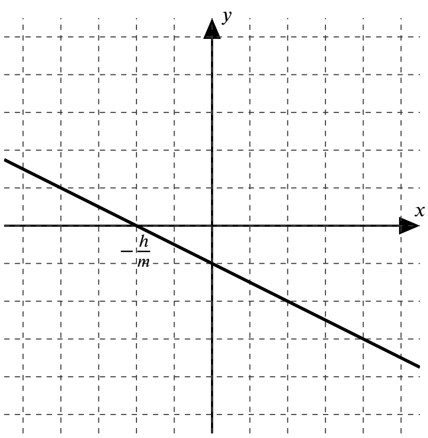


x	
$g(x)$	–

– Si $m\neq 0$, la fonction a un unique zéro, que l'on trouve en résolvant l'équation $mx+h=0$.

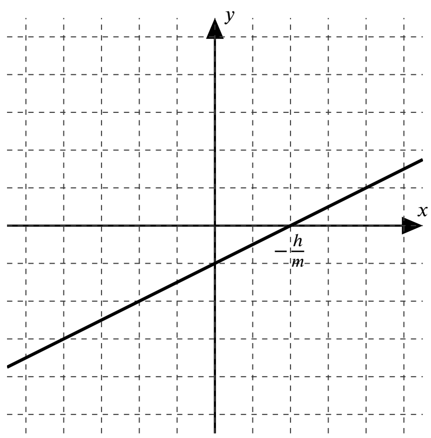
Le signe de la fonction dépend du signe de la pente m.

- si la pente est négative



x		$-\frac{h}{m}$	
$f(x)$	+	0	–

- si la pente est positive



x		$-\frac{h}{m}$	
$f(x)$	–	0	+

Remarque : $-\dfrac{h}{m}$ n'est pas toujours négatif. Cela dépend des signes de h et de m.

Exemple : Pour $f(x)=-2x+3$ $\qquad -\dfrac{h}{m}=-\dfrac{3}{-2}=+\dfrac{3}{2}$.

Exemples : Remplir les tableaux des signes ci-dessous.

a)

x	
$5x+10$	

b)

x	
$5x-10$	

c)

x	
$-5x+10$	

d)

x	
$-5x-10$	

e)

x	
$-5x$	

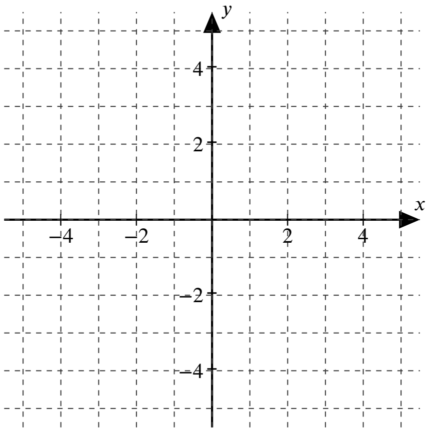
f)

x	
-10	

3.4.3 Signe d'une fonction quadratique

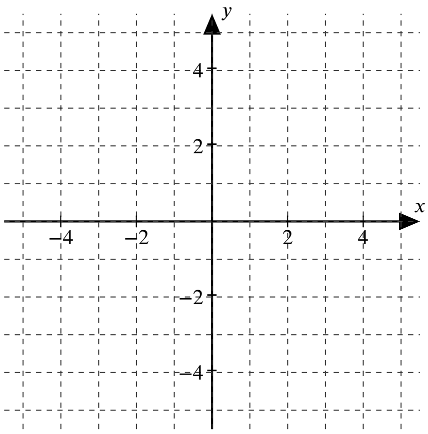
Exemples : Représenter le graphe de la fonction puis remplir son tableau des signes.

a) $f(x)=x^2-9$



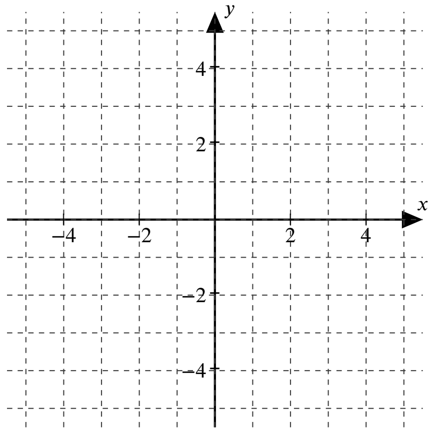
x	
$f(x)$	

b) $g(x)=x^2+3x$



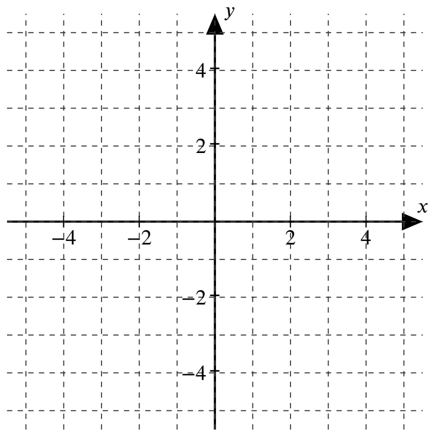
x	
$g(x)$	

c) $h(x)=-x^2+9$



x	
$h(x)$	

d) $i(x)=-0{,}5x^2$



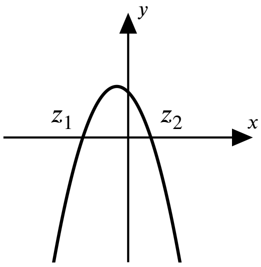
x	
$i(x)$	

Le graphe d'une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole. On a donc les cas de figure suivants :

– Si $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif, la fonction a deux zéros, que l'on peut calculer grâce à :

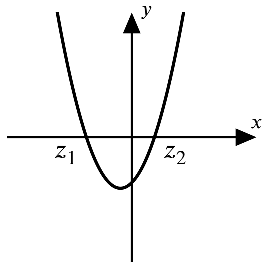
$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $a < 0$



x		z_1		z_2	
$f(x)$	–	0	+	0	–

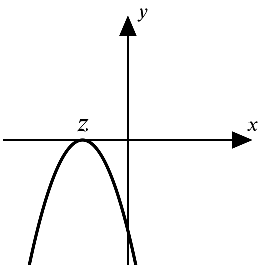
- si $a > 0$



x		z_1		z_2	
$f(x)$	+	0	–	0	+

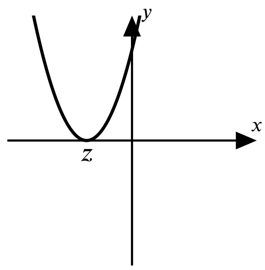
– Si $\Delta = 0$, la fonction a un seul zéro, que l'on peut calculer grâce à $z = \frac{-b}{2a}$.

- si $a < 0$



x		z	
$f(x)$	–	0	–

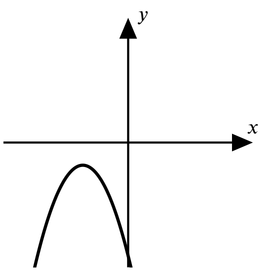
- si $a > 0$



x		z	
$f(x)$	+	0	+

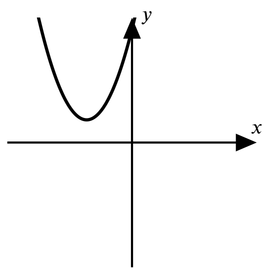
– Si Δ est négatif, la fonction n'a pas de zéro.

- si $a < 0$



x	
$f(x)$	–

- si $a > 0$



x	
$f(x)$	+

Exemples : Remplir les tableaux des signes ci-dessous.

a)

x	
$x^2+7x+10$	

d)

x	
$-x^2-16$	

b)

x	
$-9x^2+6x-1$	

e)

x	
x^2-6x+9	

c)

x	
$2x^2+x+1$	

f)

x	
$-2x^2+x+1$	

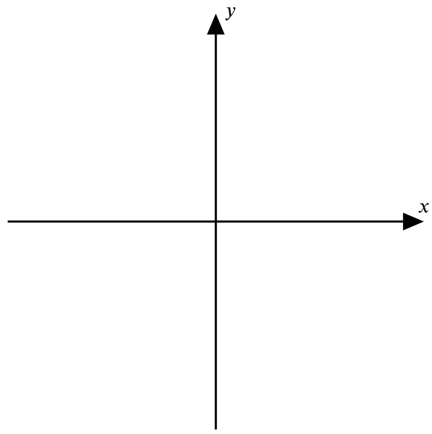
3.4.4 Signe d'une fonction polynomiale

La première étape est de factoriser le polynôme à l'aide des différentes méthodes que nous avons étudiées :

- mise en évidence,
- identités remarquables,
- changement de variable,
- méthode du groupement,
- division polynomiale.

Ensuite, il faut faire un tableau des signes avec une ligne par facteur, puis remplir la ligne finale à l'aide de la règle des signes.

Exemple : Étudier le signe de la fonction $f(x)=-2x^6+20x^4-18x^2$ et faire une esquisse du graphe de la fonction.



3.4.5 Signe de $(g(x))^n$

Exemples :

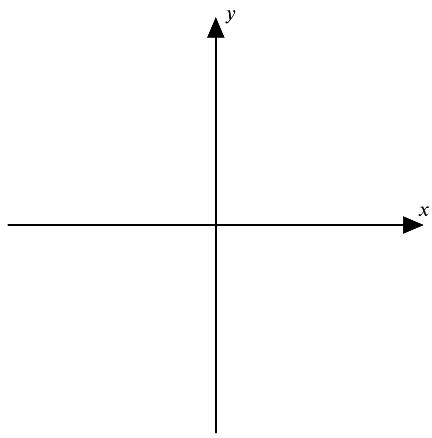
a) Étudier le signe de la fonction $f(x)=(x+2)^4$.

b) Étudier le signe de la fonction $f(x)=(x+2)^5$.

Lorsque n est pair, le signe de $(g(x))^n$ est :

Lorsque n est impair, le signe de $(g(x))^n$ est :

Exemple : Étudier le signe de la fonction $f(x) = -5x^6(2-x)^5(7x+4)^4$ et faire une esquisse du graphe de la fonction.



Quels sont les zéros de la fonction qui occasionnent un changement de signe ?

Exercices

1 Programmation linéaire

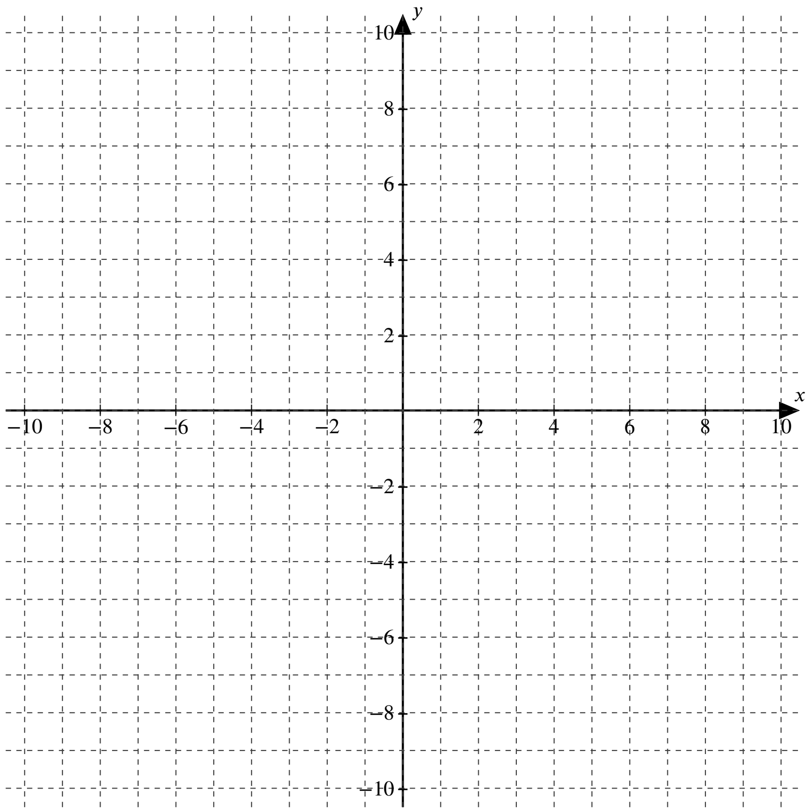
Inéquations linéaires à deux inconnues

Exercice 1.1

a) Parmi les couples ci-dessous, lesquels sont solutions de l'inéquation $x+3y>6$?

$$(0;0) \quad (5;5) \quad (-6;6) \quad (4;-4) \quad (-10;1)$$
$$(0;5) \quad (6;0) \quad (-7;0) \quad (0;-8) \quad (10;-1)$$

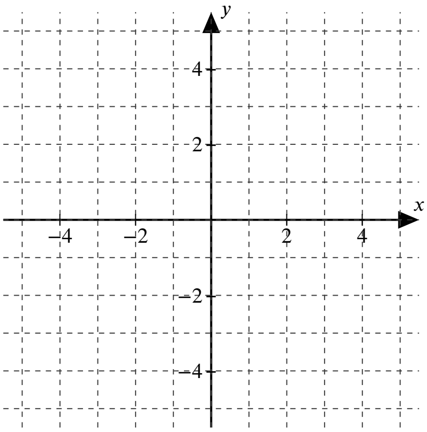
b) Représenter graphiquement la droite $x+3y=6$.



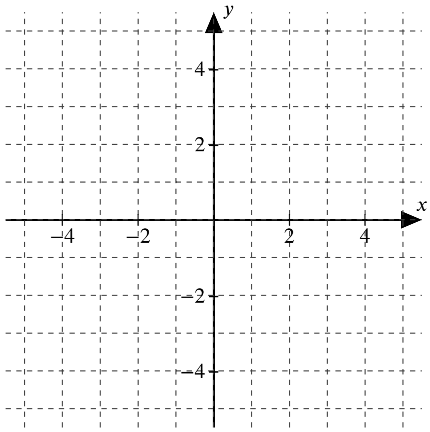
c) Placer les points dont les coordonnées sont les couples proposés au a) et colorier en rouge ceux qui sont solutions de l'inéquation $x+3y>6$. Que constate-t-on ?

Exercice 1.2 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des inéquations ci-dessous :

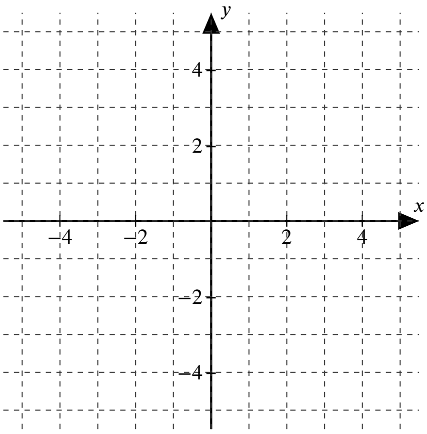
a) $x - y < 4$



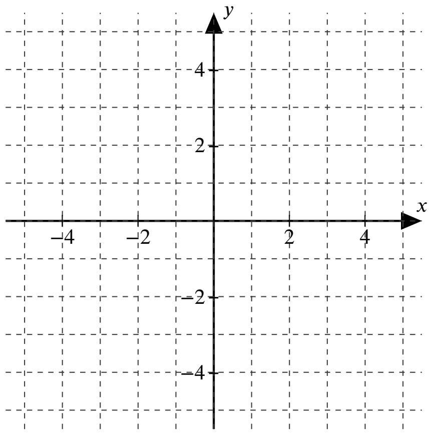
d) $y > 2$



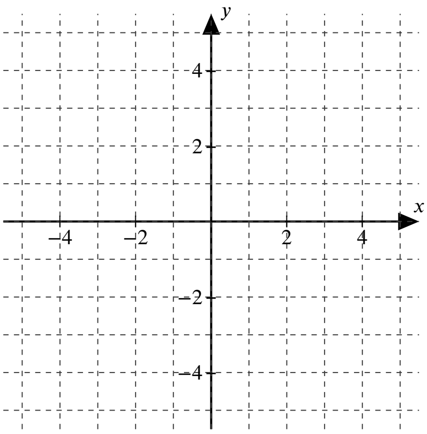
b) $2x + 5y \geq 10$



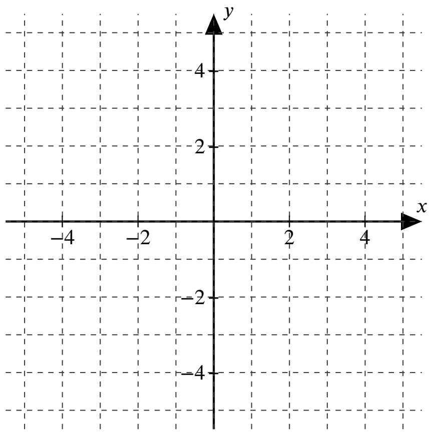
e) $5x + 2y \leq 5$



c) $x \leq -3$



f) $x - y > 0$



Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues

Exercice 1.3 Parmi les couples ci-dessous, lesquels sont solutions du système ?

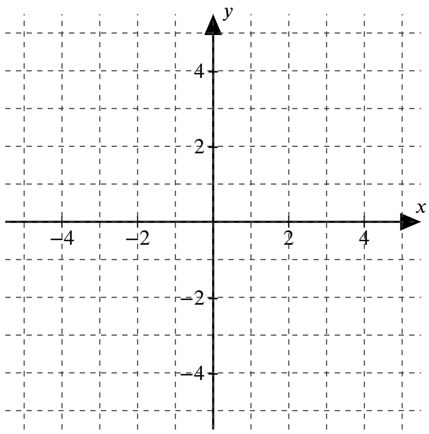
$$\begin{cases} x+y<4 \\ x-y<2 \\ x\geq -2 \\ y\leq 5 \end{cases}$$

$(-2\,;5)$ $\quad(2\,;-1)$ $\quad(2\,;1)$

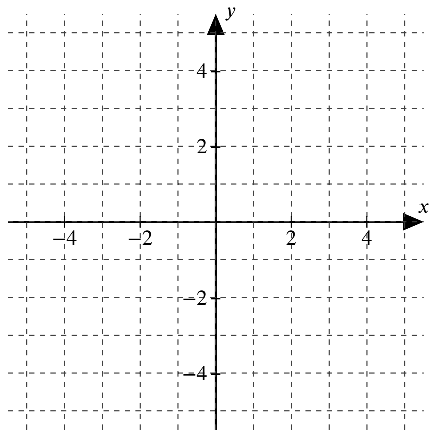
$(0\,;-1)$ $\quad(-1\,;7)$ $\quad(1\,;1)$

Exercice 1.4 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes d'inéquations suivants :

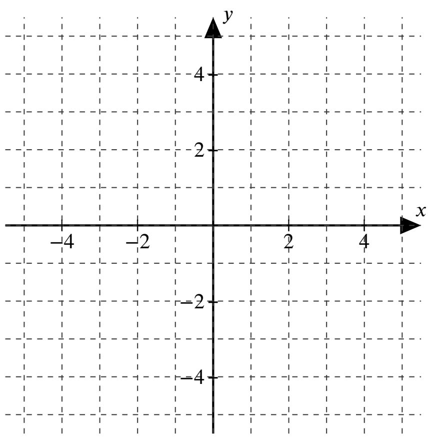
a) $\begin{cases} 3x+y>3 \\ 2x-y<4 \end{cases}$



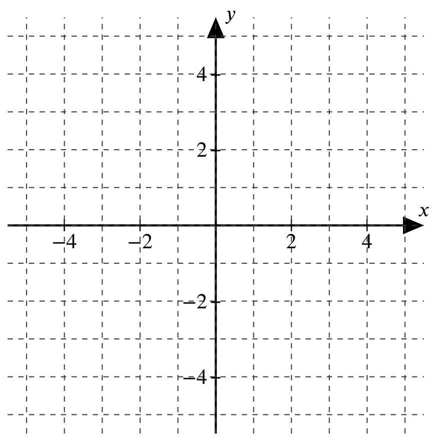
c) $\begin{cases} -2x+y>3 \\ -x+y\leq 4 \end{cases}$



b) $\begin{cases} x+2y<4 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

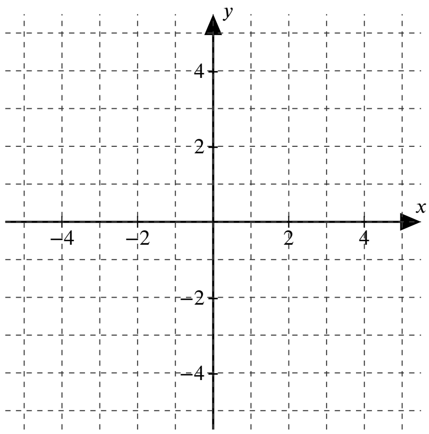


d) $\begin{cases} x-y\geq 0 \\ x+y\leq 0 \\ y>-3 \end{cases}$

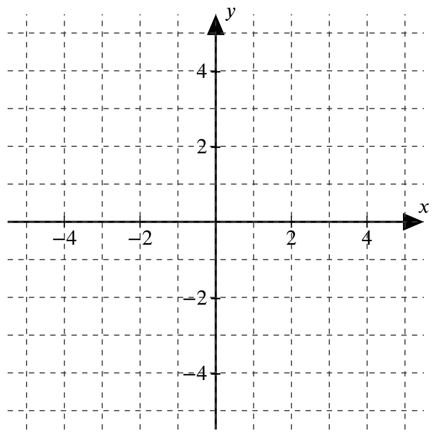


Exercice 1.5 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} 2x+3y \leq 6 \\ 2x-y \leq 3 \\ y \leq 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$



b) $\begin{cases} 3x+4y \leq 12 \\ x+y \geq 2 \\ x \leq 3 \\ y \leq 4 \end{cases}$



Exercice 1.6 Déterminer les coordonnées des sommets des polygones des solutions des systèmes d'inéquations de l'exercice 1.4

Exercice 1.7 Déterminer les coordonnées des sommets des polygones des solutions des systèmes d'inéquations de l'exercice 1.5

Exercice 1.8 Un confiseur prépare des emballages de pralinés et de truffes. Dans les sachets, il y a 15 pralinés et 5 truffes. Dans les boîtes, il y a 10 pralinés et 10 truffes.

On note x le nombre de sachets et y le nombre de boîtes.

a) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 70 pralinés à disposition pour préparer ces emballages.

b) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 30 truffes à disposition pour préparer ces emballages.

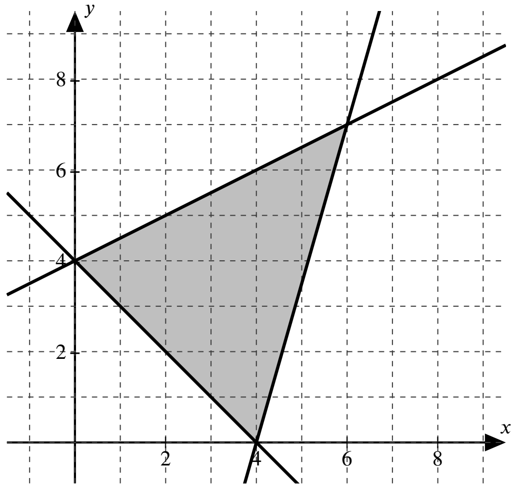
c) Écrire des inéquations qui expriment le fait que x et y sont des nombres positifs.

d) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de ce système d'inéquations.

e) Énumérer toutes les solutions possibles.

Introduction à la programmation linéaire à deux variables

Exercice 1.9 Les contraintes sont représentées par le polygone ci-dessous :



a) Chercher la valeur maximale et la valeur minimale de la fonction $P_1(x\,;y) = 4x - 2y$.

b) Pour quels points $(x\,;y)$ à coordonnées entières la fonction $P_1(x\,;y) = 4x - 2y$ vaut-elle 2 ?

c) Chercher la valeur maximale de la fonction $P_2(x\,;y) = x + y$.

d) Chercher la valeur minimale de la fonction $P_2(x\,;y) = x + y$.

e) Écrire le système d'inéquations correspondant à ce polygone des solutions.

Exercice 1.10 Trouver les valeurs maximum et minimum de la fonction objectif $P(x\,;y) = x - y$ avec les contraintes :

$$\begin{cases} 3x + 4y < 12 \\ 4x + 3y \geq 0 \\ x \leq 4 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

a) si x et y peuvent être réels.

b) si x et y doivent être entiers.

Applications

Exercice 1.11 Une entreprise fabrique deux types de boîtes en métal. La fabrication d'une boîte de type A demande 1 heure de travail et 3 kg de métal, alors que le type B , demande 2 heures de travail et 2 kg de métal. L'entreprise dispose de 80 heures de temps de travail et de 120 kg de métal.

Pour une boîte, le profit est de CHF $50.–$ pour le type A et de CHF $20.–$ pour le type B.

a) En posant x pour le nombre de boîtes de type A et y pour le nombre de boîtes de type B, déterminer la fonction objectif, puis exprimer les contraintes.

b) Représenter graphiquement le polygone des solutions.

c) Comment organiser la production afin de maximiser le profit ? Quel est ce profit ?

d) Même question si le profit est de CHF $20.–$ pour une boîte de type A et de CHF $30.–$ pour une de type B.

Exercice 1.12 On désire préparer des rations alimentaires contenant au moins 65 g de protéines, 120 g de carbone et $2'400$ calories à partir de deux produits A et B. Ces deux produits sont fournis par dose non partageable.

Une dose du produit A coûte CHF $1.–$ et contient 15 g de protéines, 20 g d'hydrate de carbone et 300 calories.
Une dose du produit B coûte CHF $1.–$ et contient 10 g de protéines, 30 g d'hydrate de carbone et 400 calories.

Quelle est la composition de la ration alimentaire la plus économique ?

Exercice 1.13 Un sculpteur décide de créer deux styles de statues ; le modèleA et le modèle B.

Le modèle A nécessite 1 heure de sculpture, 2 heures de ponçage et 1 heure de finition.

Le modèle B nécessite 2 heures de sculpture, 1 heure de ponçage et 1 heure de finition.

Il dispose quotidiennement de 20 heures à l'atelier de sculpture, de 22 heures à l'atelier de ponçage et de 12 heures à l'atelier de finition.

Les profits qu'il peut réaliser pour chacun des modèles sont de CHF $200.–$ pour le modèle A et de CHF $300.–$ pour le modèle B.

Quel nombre de statues de chaque modèle doit-il fabriquer par jour, afin obtenir un profit maximal ?

Exercice 1.14 Une société importatrice de café achète des lots de grains de café en vrac, puis les sépare en grains de premier choix, ordinaires et inutilisables. La société a besoin d'au moins 280 t de grains de premier choix et 200 t de grains ordinaires.

Elle peut acheter des grains non triés à volonté chez deux fournisseurs. Des échantillons provenant des deux fournisseurs contiennent les pourcentages suivants de grains de premier choix, ordinaires et inutilisables :

Fournisseur	Premier choix	Ordinaires	Inutilisables
A	20%	50%	30%
B	40%	20%	40%

Si le fournisseur A facture CHF $125.–$ la tonne et le fournisseur B CHF $200.–$ la tonne, quelle quantité la société devrait-elle acheter chez chacun des fournisseurs pour satisfaire à ses besoins pour un coût minimum ?

Exercice 1.15 Un ébéniste fabrique des tables et des armoires avec trois sortes de bois : chêne, pin et noyer. Dans le tableau ci-dessous, on donne le nombre de mètres carrés de bois nécessaire à la fabrication de chaque type de meubles et le nombre de mètres carrés de bois disponible.

	Armoire	Table	Disponible
Chêne	$4\ \text{m}^2$	$5\ \text{m}^2$	$210\ \text{m}^2$
Pin	$5\ \text{m}^2$	$2{,}5\ \text{m}^2$	$180\ \text{m}^2$
Noyer	$6\ \text{m}^2$	$5\ \text{m}^2$	$240\ \text{m}^2$

Combien d'armoires et de tables cet artisan doit-il fabriquer pour rendre son gain maximum si :

a) il gagne CHF $1'000.–$ par armoire et CHF $900.–$ par table ?

b) il gagne CHF $1'200.–$ par armoire et CHF $1'000.–$ par table ?

Exercice 1.16 Sophie projette un voyage d'une longueur de $8'000$ km aux USA, qu'elle parcourra en train, en car et en bateau. Les prix et les vitesses de déplacement sont donnés ci-dessous :

	Bateau	Car	Train
Prix en CHF au km	0,15	0,2	0,25
Vitesse en km/h	30	40	80

Elle souhaite parcourir au moins $3'000$ km en bateau, et ne désire pas effectuer plus de kilomètres en train qu'en autobus.

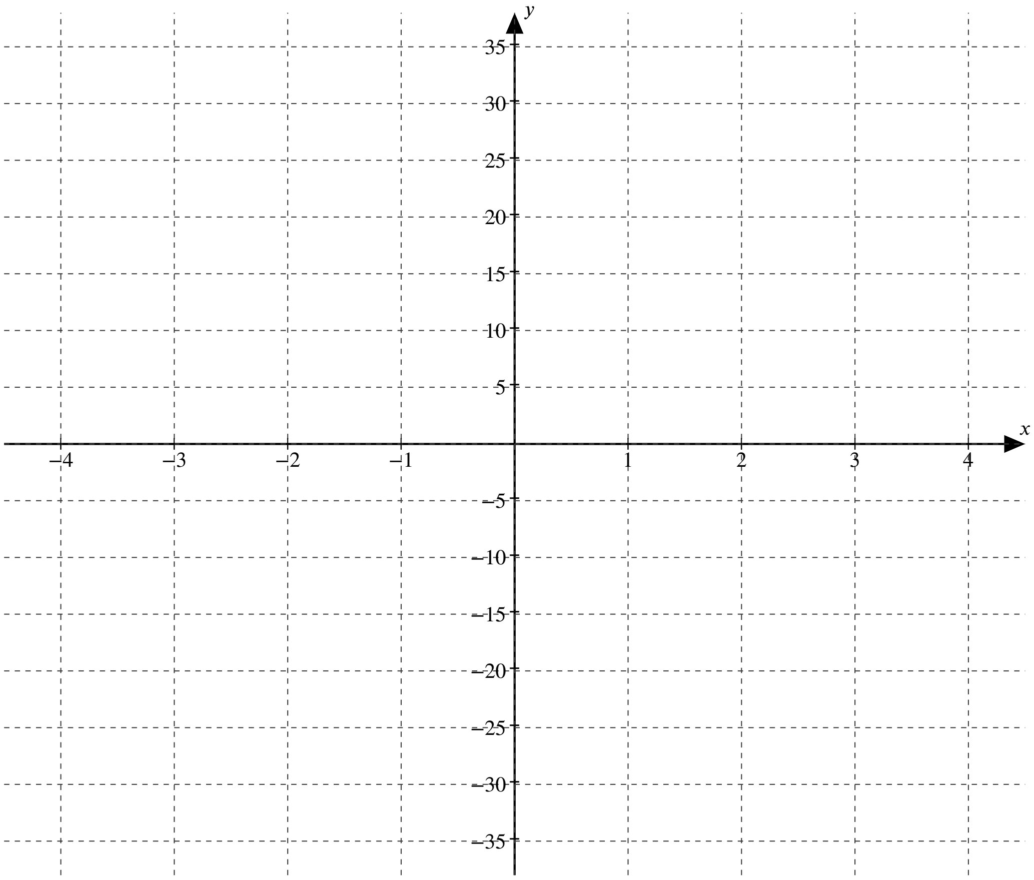
Quelles distances doit-elle parcourir avec chaque moyen de transport si elle veut que le prix total de son voyage ne dépasse pas CHF $1'500.–$ et que sa durée soit minimum ?

2 Fonctions quadratiques

Définition

Exercice 2.1 Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

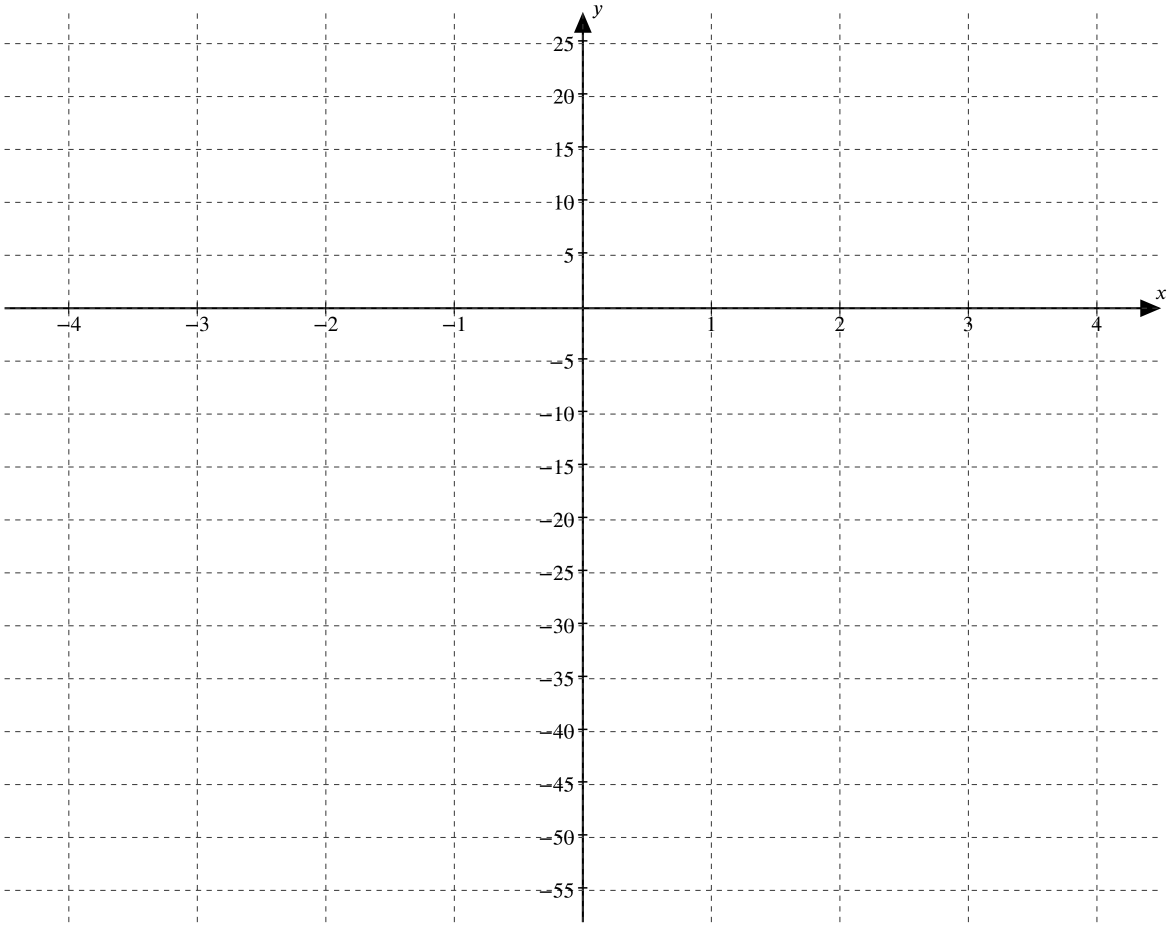
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2$									
$g(x) = 2x^2$									
$h(x) = -x^2$									
$i(x) = -\frac{1}{2}x^2$									



Que peut-on observer de particulier ?

Exercice 2.2 Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = -2x^2$									
$g(x) = -2x^2 - 10$									
$h(x) = -2x^2 + 20$									



Que peut-on observer de particulier ?

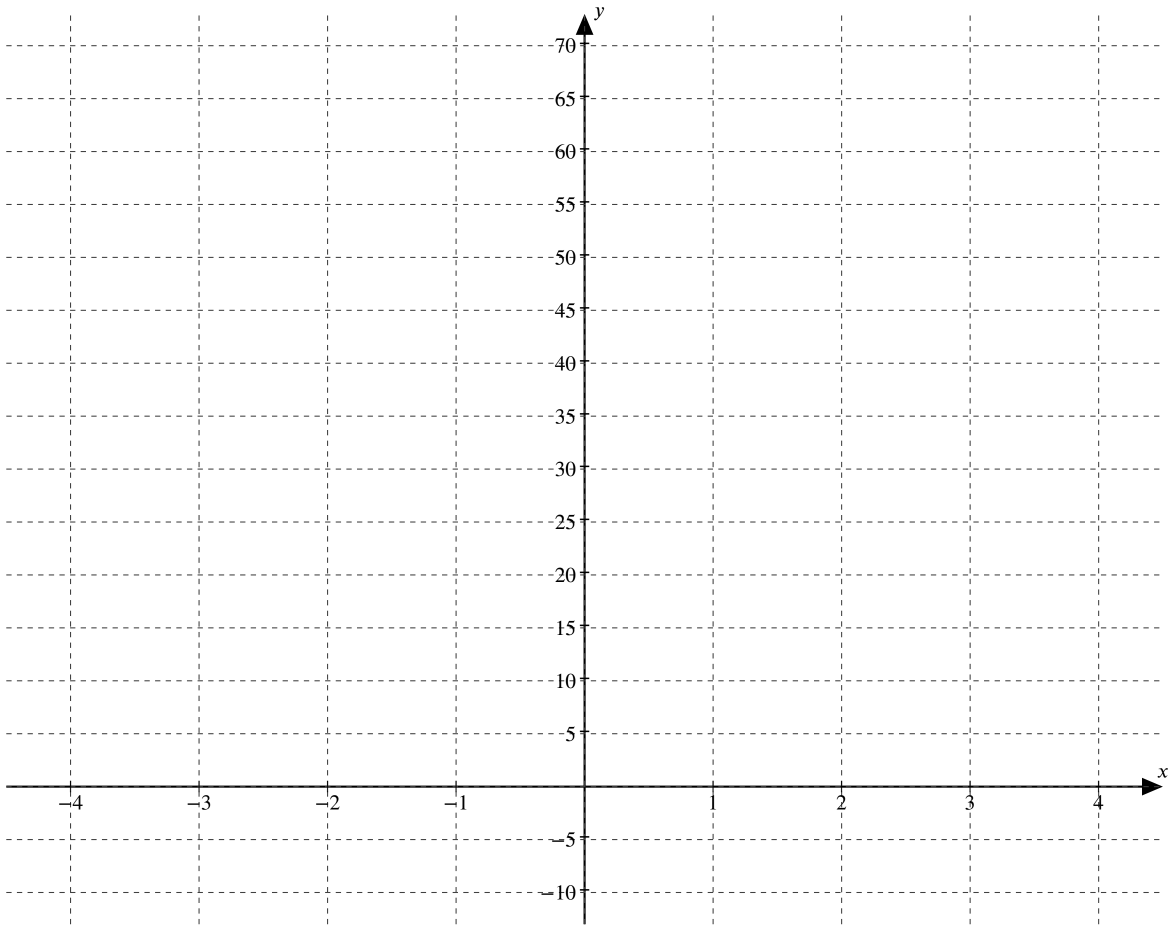
Exercice 2.3 Soit $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = 3x^2 - 6x$ et $h(x) = 2x^2 + 8x$.

a) Déterminer algébriquement les zéros de ces fonctions.

b) Quels sont les zéros d'une fonction du type $ax^2 + bx$.

c) Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2 + 3x$									
$g(x) = 3x^2 - 6x$									
$h(x) = 2x^2 + 8x$									



d) Quelles sont les coordonnées des sommets de ces paraboles ?

e) Comparer la première coordonnée du sommet de chaque parabole avec les zéros de cette même parabole.

f) En déduire la première coordonnée du sommet de la parabole $y = ax^2 + bx$.

g) En déduire la première coordonnée du sommet de la parabole $y = ax^2 + bx + c$.

Graphe et points caractéristiques

Exercice 2.4 Pour les fonctions quadratiques ci-dessous, calculer les coordonnées des points caractéristiques (intersections avec les axes, sommet), déterminer l'orientation de son graphe, puis tracer son esquisse.

a) $f(x)=x^2+8x+12$

b) $f(x)=x^2-4x$

c) $f(x)=2x^2+8x+9$

d) $f(x)=-2x^2+8x-13$

e) $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+3$

f) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{2}$

Intersections

Exercice 2.5 Déterminer les points d'intersection des graphes de f et g.

a) $f(x)=x^2-5x+4$ et $g(x)=-4x+10$.

b) $f(x)=3x^2-2x+7$ et $g(x)=3x+5$.

c) $f(x)=2x^2+3x-1$ et $g(x)=x-4$.

Exercice 2.6 Déterminer les points d'intersection des graphes de f et g.

a) $f(x)=2x^2-4x+3$ et $g(x)=3x^2-12x+18$.

b) $f(x)=-x^2+13x-48$ et $g(x)=x^2-11x+24$.

c) $f(x)=-x^2+x$ et $g(x)=2x^2+6$.

Exercice 2.7 Vérifier que la parabole d'équation $y=(x-3)^2$ est tangente à la droite $y=2x-7$ et déterminer les coordonnées du point de contact.

Optimisation quadratique

Exercice 2.8 Sur son terrain, un fermier veut clôturer un enclos rectangulaire et le diviser en 2 rangées de 3 rectangles identiques, à l'aide à 1000 m de barrière. Quel est le plus grand enclos qu'il pourra obtenir ?

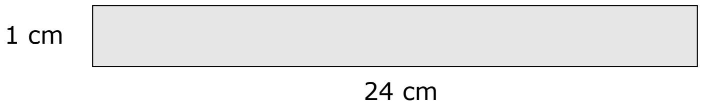
Exercice 2.9 Une compagnie désire fabriquer des gouttières à partir de feuilles d'aluminium de 27 cm de largeur en repliant les deux extrémités perpendiculairement à la base. Quelle largeur doit-on replier de chaque côté pour que la gouttière puisse contenir un maximum d'eau ?

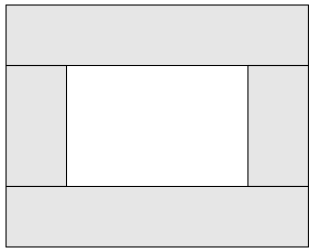
Exercice 2.10 Déterminer les deux nombres dont la somme est 36 et qui ont un produit maximal.

Exercice 2.11 Quelle est la valeur minimale du produit de deux nombres si leur différence est égale à 12 ?

Exercice 2.12 La somme de deux nombres est 36.
On étudie la somme des carrés de ces deux nombres. A-t-elle un maximum ou un minimum ? Justifier puis calculer ce maximum ou ce minimum.

Exercice 2.13 Un photographe désire fabriquer un cadre pour une photo rectangulaire en coupant une planche de 24 cm de long et 1 cm de large en quatre morceaux.





Comment devra-t-il couper cette planche pour que l'aire intérieure du cadre soit maximale ?

Exercice 2.14 On considère le carré $ABCD$ de 6 cm de côté.Le point I est le milieu du côté $[CD]$. M est un point quelconque du côté $[AB]$ et N est le point du côté $[CB]$ tel que $CN = BM$.

Quelle doit être la position de M sur $[AB]$ pour que l'aire du triangle MNI soit minimale ?

Exercice 2.15 On considère le carré $ABCD$ de 8 cm de côté et le carré $AB'C'D'$ de x cm de côté où B' est un point du côté $[AB]$ et D' un point du côté $[AD]$.

a) On considère le domaine formé du triangle $B'BC'$ et du trapèze $DD'C'C$. Pour quelle valeur de x, l'aire de ce domaine est-il maximal ?

b) Que vaut alors cette aire optimale ?

Exercice 2.16 On considère le carré $ABCD$ de 8 cm de côté et le triangle AEF où E est un point du côté $[BC]$ et F un point du côté $[CD]$ sachant que $CE = 2 \cdot DF$.

a) Déterminer la position du point F sur $[DC]$ pour laquelle l'aire du triangle AEF est minimum.

b) Déterminer alors la proportion de l'aire du triangle par rapport à celle du carré.

Exercice 2.17 La distance d en kilomètres que peut parcourir une voiture avec 4 litres d'essence à la vitesse v en km/h est donnée par la fonction

$$d(v) = -\frac{1}{48}v^2 + \frac{5}{2}v$$

pour $0 < v < 120$.

a) Déterminer la vitesse la plus économique pour un trajet durant lequel on aura consommé 4 litre d'essence.

b) Déterminer la valeur maximale de la distance que l'on peut parcourir durant un tel trajet.

Exercice 2.18 Un objet est lancé verticalement vers le haut depuis le toit d'un bâtiment avec une vitesse initiale de 20 m/s. Sa distance d en mètres au-dessus du sol après t secondes est donnée par la fonction

$$d(t) = -5t^2 + 20t + 105$$

pour $0 < v < 120$.

a) Déterminer la distance maximale atteinte par l'objet au-dessus du sol.

b) Déterminer la hauteur du bâtiment.

c) Après combien de temps l'objet retombe-t-il au sol ?

Exercice 2.19 Le propriétaire d'un champ estime que s'il plante 60 poiriers, le rendement moyen sera de 480 poires par arbre. Ce rendement diminuera de 5 poires par arbre pour chaque poirier additionnel planté dans le champ.

Combien le propriétaire devrait-il planter de poiriers pour que le rendement du verger soit maximal ?

Exercice 2.20 Si un ostréiculteur récolte des huîtres cette semaine, il pourrait en obtenir 120 paniers qu'il pourrait vendre CHF 240.– pièce. Pour chaque semaine d'attente, sa récolte augmenterait de 30 paniers, mais le prix de chaque panier diminuerait de CHF 40.

a) Dans combien de semaines, la récolte sera-t-elle la plus favorable financièrement ?

b) À ce moment-là, quel sera le montant que lui rapportera la récolte ?

Exercice 2.21 Une agence de voyages offre des voyages organisés au prix de CHF 60.– par personne pour les 30 premiers participants.

Pour les plus grands groupes, jusqu'à 90, chaque personne bénéficie d'un rabais de CHF $0{,}50$ pour tout participant en plus des 30 premiers. Par exemple, si 31 personnes participent, le prix par personne est de CHF $59{,}50$ et donc le voyage coûte CHF $1844{,}50$.

Pour quel nombre de participants l'agence gagnera-t-elle le plus ?

3 Polynômes et fonctions polynomiales

Factorisation

Exercice 3.1 Effectuer et réduire.

a) $(x-5)^2$

b) $(3x+7y)^2$

c) $a(5a+4)(5a-4)$

d) $3(x-10)(x+5)$

e) $4y^2(y-10)(y-5)$

f) $(10x+3)(10x-3)-(11x-4)^2$

g) $(x+6)(x+1)-3(x-4)(x+4)$

h) $t(t+10)(t-3)+\frac{1}{3}(t+3)^2$

Exercice 3.2 Factoriser.

a) x^7-49x^5

b) $5y^2+80-50y$

c) $\frac{1}{8}x^4-x^3+2x^2$

d) $196x^2+28x+1$

e) $-6m^2+7m-m^3$

f) $x^9y^2-3x^7y^2$

g) $\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{4}x-2$

h) $-3c^2-45$

Exercice 3.3 Factoriser.

a) $20x^2+10x-210$

b) $25y^2+16-50y$

c) $6x^3-17x^2+5x$

d) $10x^5-23x^4+12x^3$

e) $9x^2+30x+25$

f) $100a^2+9a+1$

Exercice 3.4 Factoriser.

a) $11x^4+11x^3-66x^2$

b) $36x^2-21x+3$

c) $35x^2y+25xy+10y$

d) $2x^7-288x^5$

e) $-49c^2-42c-9$

f) $3x^4y^4-x^3y^4-10x^2y^4$

Exercice 3.5 Factoriser.

a) $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-5x$

b) $\frac{1}{2}x^2-5x+12$

c) $7x^2-225$

d) $2x^2-23x-12$

e) $36x^6+81x^7+4x^5$

f) $\frac{1}{6}x^2-\frac{3}{2}x+3$

Changement de variable

Exercice 3.6 Effectuer et réduire.

a) $(5x+4)^2$

b) $(5x^2+4)^2$

c) $(5x^3+4)^2$

d) $(z-15)(z+15)$

e) $(z^2-15)(z^2+15)$

f) $(z^{10}-15)(z^{10}+15)$

g) $(x-3)(x+22)$

h) $(x^2-3)(x^2+22)$

i) $(3x+4)(x-11)$

j) $(3x^2y+4)(x^2y-11)$

Exercice 3.7 Factoriser.

a) x^4-625

b) x^4-11x^2+28

c) $2x^4+23x^2+11$

d) $81x^4-72x^2+16$

e) z^4-8z^2-9

f) x^4+8x^2-9

Exercice 3.8 Factoriser.

a) $a^6-21a^4-100a^2$

b) $5x^4-55x^2+90$

c) $-7x^7+x^5+6x^3$

d) $\frac{1}{3}x^4-27$

e) $32x^5y+400x^3y+1250xy$

f) $\frac{1}{7}x^8+\frac{10}{7}x^6+3x^4$

Produits remarquables du 3ᵉ degré

Exercice 3.9 Effectuer et réduire.

a) $(x+4)^3$

b) $(2x-5)^3$

c) $(10c-1)^3$

d) $(3x+\frac{1}{3})^3$

e) $(x-2)^3$

f) $(x^2-2)^3$

g) $(x^3+1)^3$

h) $(x^{10}y^4+1)^3$

Exercice 3.10 Factoriser.

a) x^3+125

b) x^3-125

c) $8V^3+T^3$

d) $27x^3-8$

e) x^3+3x^2+3x+1

f) $q^3-30q^2+300q-1000$

Exercice 3.11 Factoriser.

a) x^6-1

b) x^4+8x

c) x^6+2x^3+1

d) $8n^3+24n^2+24n+8$

e) $8x^6+7x^3-1$

f) $x^6+9x^5+27x^4+27x^3$

Méthode du groupement

Exercice 3.12 Factoriser.

a) $x^3+5x^2+3x+15$

b) $x^3+6x^2-4x-24$

c) $5z^3-8z^2-5z+8$

d) x^4+8x^3+x+8

e) x^4+x^3+8x+8

f) $2w^4+3w^3-250w-375$

Exercice 3.13 Factoriser.

a) $6x^4-10x^3+66x^2-110x$

b) $-8x^7-64x^6-27x^4-216x^3$

c) $\frac{1}{11}x^3+\frac{2}{11}x^2-11x-22$

d) $120y^5-80y^4-30y^3+20y^2$

e) $10x^4-65x^3+10x-65$

f) $10x^4+65x^3-10x-65$

Exercice 3.14 Résoudre.

a) $x^3+15x^2+75x+125=0$

b) $a^4-a^2-12=0$

c) $x^3-2x^2+5x-10=0$

d) $1000x^3+x^2-27=x^2$

e) $x^4+5x^3=x+5$

f) $6x^4-23x^3=4x^2$

Division Euclidienne

Exercice 3.15 Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

a) $F(x)=3x^4-8x^3+10x+5$ $\quad G(x)=x-2$

b) $F(x)=x^3-8x^2+16x-5$ $\quad G(x)=x-5$

c) $F(x)=3x^3+4x^2-2x+8$ $\quad G(x)=x+2$

d) $F(x)=x^4-8x^2-7$ $\quad G(x)=x-3$

Exercice 3.16 Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

a) $F(x)=-2x^3+7x^2-8x-1$ $\quad G(x)=2x-3$

b) $F(x)=-16x^3-32x2-7x+10$ $\quad G(x)=4x+5$

c) $F(x)=9x^3-34x-26$ $\quad G(x)=3x-7$

d) $F(x)=x^3-5x^2+4x$ $\quad G(x)=2x-4$

Exercice 3.17 Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

a) $F(x)=x^5-x^4-4x^3+2x^2+3x-1$ $\quad G(x)=x^2+2x-1$

b) $F(x)=5x^4+3x^3-1$ $\quad G(x)=x^2-1$

c) $F(x)=6x^5+5x^4-25x^3+31x^2-12x+5$ $\quad G(x)=2x^2-3x+2$

d) $F(x)=3x^4-7x^3-18x^2+28x+24$ $\quad G(x)=3x^2+8x+4$

Exercice 3.18 Déterminer un polynôme $F(x)$ qui donne un quotient de $Q(x)=x^2+7$ et un reste de $R(x)=x+1$ lorsqu'on le divise par $D(x)=x^2-3$. Y a-t-il plusieurs possibilités ?

Utilisation de la division euclidienne pour factoriser

Exercice 3.19 Trouver un polynôme $F(x)$ du 3e degré, qui soit divisible par $x-3$ et par x^2+3x-2. Y a-t-il plusieurs possibilités ?

Exercice 3.20

a) Sans effectuer de division, trouver, parmi les propositions ci-dessous, les polynômes divisibles par $x+2$.

i) $A(x)=x^3+7x^2+6x-8$

ii) $B(x)=x^3-5x^2+3x+7$

iii) $C(x)=x^4-2x^2+3x+6$

iv) $D(x)=3x^3+5x^2+x+6$

v) $E(x)=10x^3+x^2+x+4$

vi) $F(x)=10x^4+23x^3+6x^2-3x-6$

vii) $G(x)=x^{2000}-3x^{1999}+40x^{1997}+347$

viii) $H(x)=x^6+4x^5-2x^4+8x^3+11$

b) Pour ceux qui sont divisibles par $x+2$, effectuer la division et écrire l'égalité fondamentale.

Exercice 3.21

a) Sans effectuer de division, trouver, parmi les propositions ci-dessous, les polynômes divisibles par $x+1$.

i) $A(x)=x^2-1$

ii) $B(x)=x^3-1$

iii) $C(x)=x^4-1$

iv) $D(x)=x^5-1$

v) $E(x)=x^6-1$

vi) $F(x)=x^7-1$

b) Sans effectuer de division, trouver, parmi les propositions ci-dessus, les polynômes divisibles par $x-1$.

Exercice 3.22 Donner la liste de tous les zéros entiers des polynômes suivants :

a) $2x^3-x^2-8x+4$

b) $3x^3+10x^2+x-6$

Exercice 3.23 Factoriser.

a) $x^3+4x^2-11x-30$

b) $x^3+10x^2+17x-28$

c) $2x^3+3x^2-11x-6$

d) $x^4+7x^3+16x^2+28x+48$

Exercice 3.24 Résoudre.

a) $x^4-6x^3-22x^2-30x-135=0$

b) $x^4+10x^3+35x^2+50x+24=0$

c) $3x^3-17x-6=-4x^2$

d) $x^4+16x^3+54x^2=16x+55$

Exercice 3.25 Factoriser.

a) $x^3+3x^2-16x-48$

b) $x^3-9x^2+23x-15$

c) $x^3+5x^2-8x-48$

d) $x^3-9x^2+26x-24$

e) $x^4+2x^3-4x^2-5x-6$

f) $35x^3+47x^2+13x+1$

Exercice 3.26 Factoriser.

a) x^3-64x

b) x^3-64

c) x^4-64

d) $x^3+8x^2+8x+64$

e) x^4+16x^2+64

f) $x^3+14x^2+56x+64$

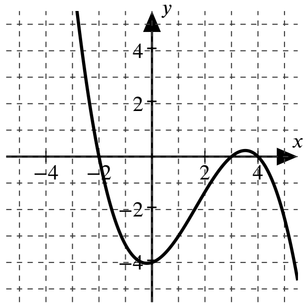
g) $3x^3+16x^2-64x$

h) $x^3+16x^2-4x-64$

Signe d'une fonction polynomiale

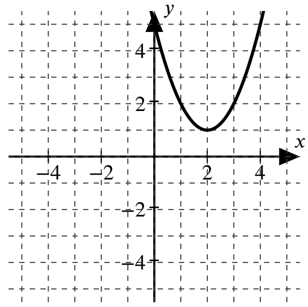
Exercice 3.27 Compléter le tableau des signes des fonctions représentées ci-dessous.

a)



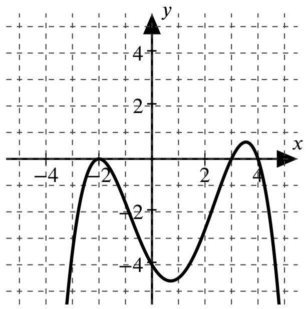
x	
$f(x)$	

c)



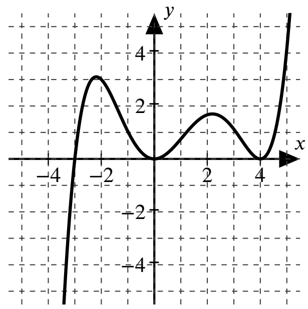
x	
$h(x)$	

b)



x	
$g(x)$	

d)

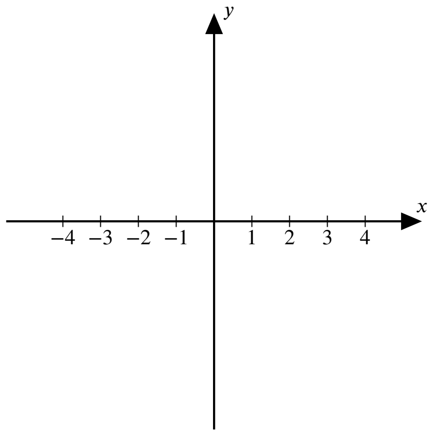


x	
$i(x)$	

Exercice 3.28 Faire une esquisse du graphe d'une fonction correspondant au tableau des signes.

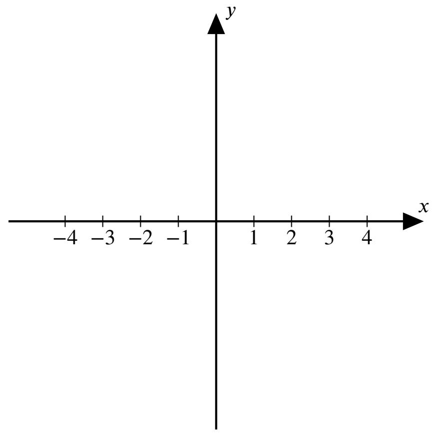
a)

x		-3		0		2	
$f(x)$	−	0	−	0	+	0	+



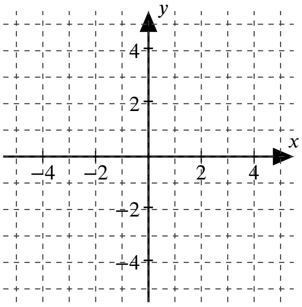
b)

x		-3		2	
$g(x)$	−	0	+	0	−



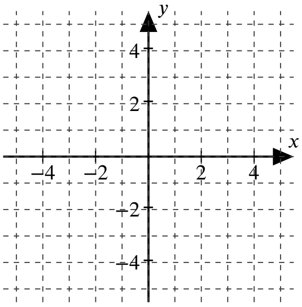
Exercice 3.29 Représenter le graphe de la fonction puis remplir son tableau des signes.

a) $f(x) = -\frac{3}{4}x + 1$



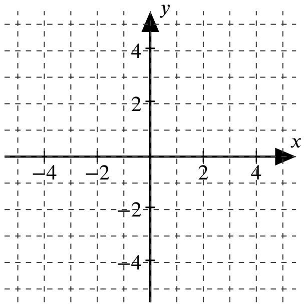
x	
$f(x)$	

b) $g(x) = x$



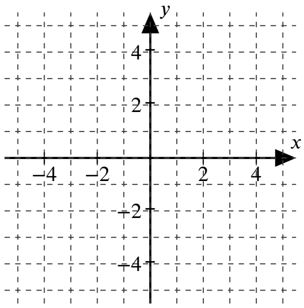
x	
$g(x)$	

c) $h(x) = -1$



x	
$h(x)$	

d) $i(x) = 3x - 2$



x	
$i(x)$	

Exercice 3.30 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$7 - x$	

b)

x	
$4x - 7$	

c)

x	
$-\frac{1}{3}x + 2$	

d)

x	
$\frac{4}{5}x$	

e)

x	
13	

f)

x	
$-6 + x$	

Exercice 3.31 Trouver l'expression de deux fonctions affines différentes correspondant à ce tableau des signes :

x		4	
$f(x)$	+	0	−

Exercice 3.32 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
3	
$5-x$	
$2x+3$	
$3(5-x)(2x+3)$	

b)

x	
$3x$	
$-5+4x$	
$3x(-5+4x)$	

c)

x	
-4	
$x+4$	
$x-6$	
$-4(x+4)(x-6)$	

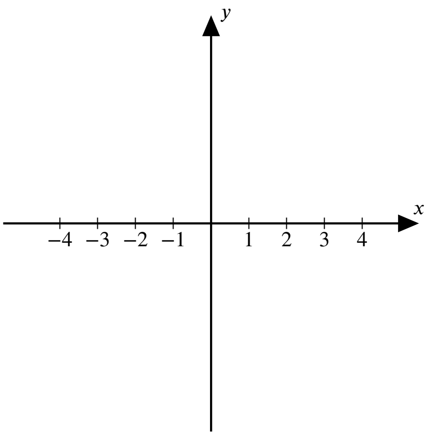
d)

x	
$-4x$	
$7x+1$	
$-4x(7x+1)$	

Exercice 3.33 Remplir le tableau des signes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

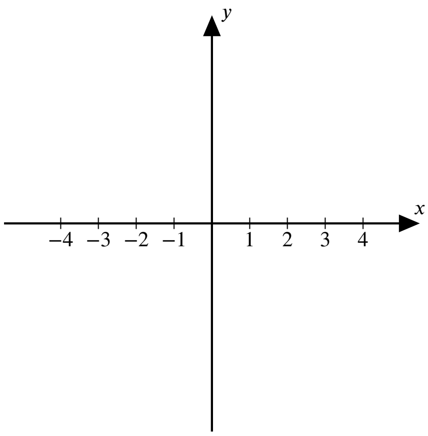
a)

x	
$(x+2)^2$	



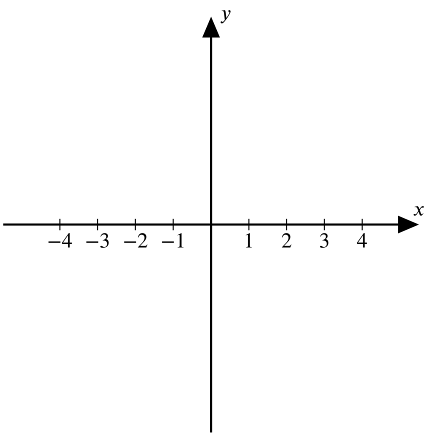
c)

x	
$-2x^2+7x$	



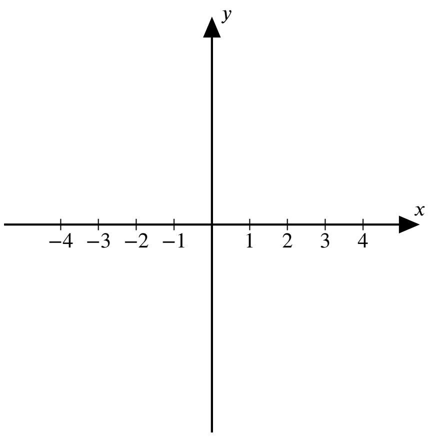
b)

x	
x^2+2	



d)

x	
x^2-x-6	



Exercice 3.34 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$-x^2-16x-55$	

b)

x	
$13x^2+12x-1$	

c)

x	
$4x^2+12x+9$	

d)

x	
$-5+x^2$	

e)

x	
x^2+x+9	

f)

x	
$-9x^2+2x$	

g)

x	
$-x^2-9$	

h)

x	
$-5x^2$	

Exercice 3.35 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$5-x^2$	
$2x^2+3$	
$(5-x^2)(2x^2+3)$	

b)

x	
$x+3$	
x^2+x-6	
$(x+3)(x^2+x-6)$	

Exercice 3.36 Étudier le signe des fonctions suivantes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

a) $5x(3x+2)(7-x)$

b) $-4(x-8)(5x+1)(x^2+2)$

c) $(x+7)^3$

d) $x^2(-2x+5)$

Exercice 3.37 Étudier le signe des fonctions suivantes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

a) $9x^3-18x^2-x+2$

b) $16-x^4$

c) x^3+x^2-2

d) $-25x^3+30x^2-9x$

Exercice 3.38 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$(5-x)^3$	

b)

x	
$(3x+7)^4$	

c)

x	
$x^3(x-2)^2$	

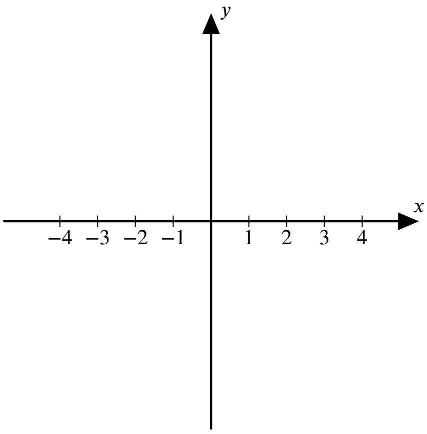
d)

x	
$-3x(x+4)^4(6-x)^2$	

Exercice 3.39 Remplir le tableau des signes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

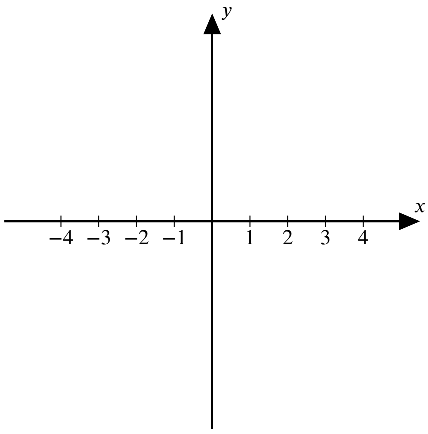
a)

x	
$(x-1)^2(x+2)^2$	



b)

x	
$(x-1)^2(x+2)^5$	

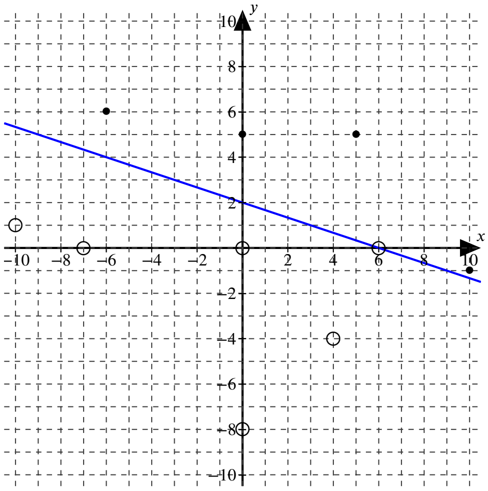


Solutions

1 Solutions - Programmation linéaire

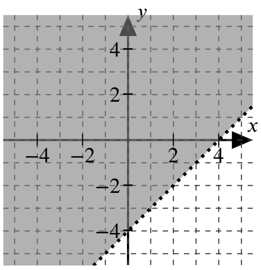
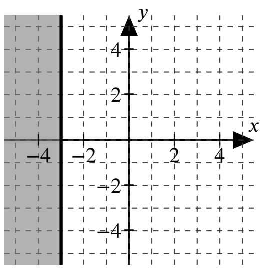
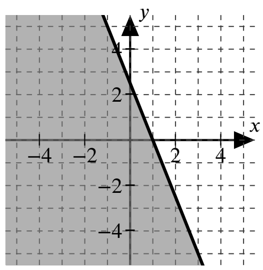
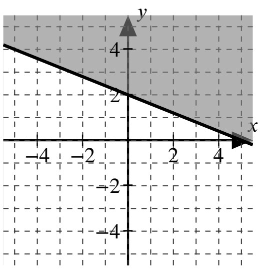
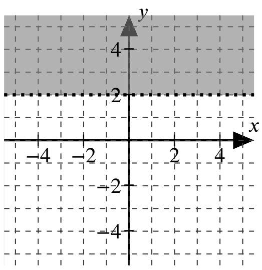
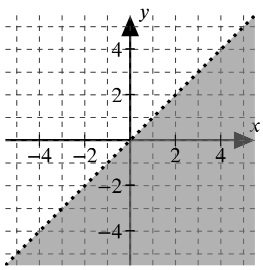
1.1

a) $0<6$ non $12>6$ oui $-7<6$ non $6=6$ non $-24<6$ non
$20>6$ oui $-8<6$ non $15>6$ oui $-7<6$ non $7>6$ oui

b) 

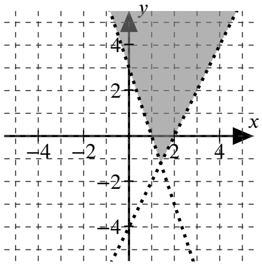
c) Les solutions sont au dessus de la droite.

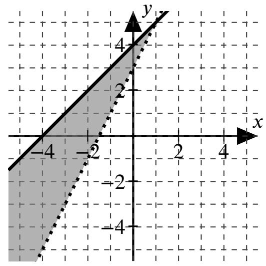
1.2

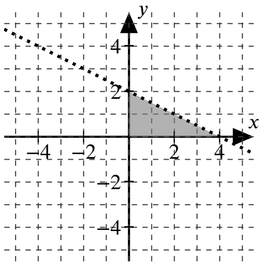
a) 
c) 
e) 
b) 
d) 
f) 

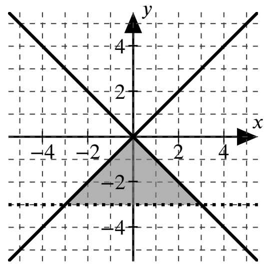
1.3 $(-2;5)$ oui $(2;-1)$ non $(2;1)$ oui $(0;-1)$ oui $(-1;7)$ non $(1;1)$ non

1.4

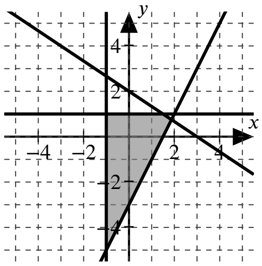
a) 

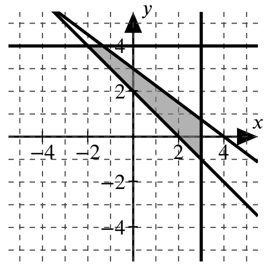
c) 

b) 

d) 

1.5

a) 

b) 

1.6

a) $(\frac{7}{5};-\frac{6}{5})$

b) $(0;0)$ $(0;2)$ $(4;0)$

c) $(1;5)$

d) $(0;0)$ $(-3;-3)$ $(3;-3)$

1.7

a) $(-1;1)$ $(-1;-5)$ $(\frac{15}{8};\frac{3}{4})$ $(\frac{3}{2};1)$

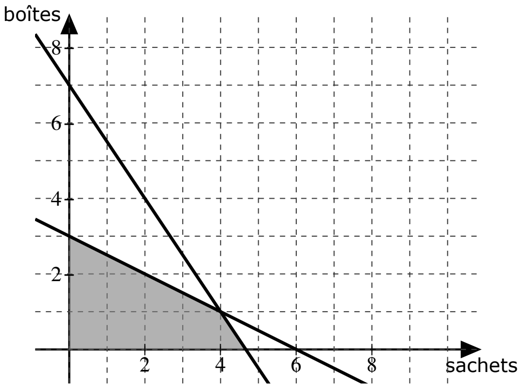
b) $(3;-1)$ $(3;\frac{3}{4})$ $(-\frac{4}{3};4)$ $(-2;4)$

1.8

a) $15x+10y\leq 70$

b) $5x+10y\leq 30$

c) $x\geq 0$ et $y\geq 0$

d) 

e) 0 sachet et 0, 1, 2 ou 3 boîtes
1 sachet et 0, 1 ou 2 boîtes
2 sachets et 0, 1 ou 2 boîtes
3 sachets et 0 ou 1 boîte
4 sachets et 0 ou 1 boîte

1.9

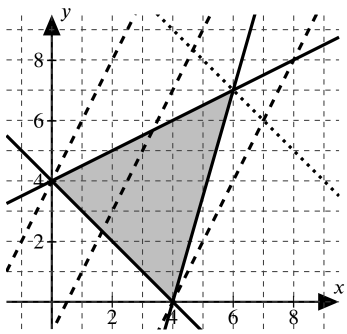
a) Max : $P_1(4;0)=16$ et Min $P_1(0;4)=-8$

b) $y=2x-1$, $(2;3)$ et $(3;5)$

c) $P_2(6;7)=13$

d) $P_2(4;0)=P_2(3;1)=P_2(2,5;1,5)=\cdots=4$

$$\begin{cases} x-2y\geq -8 \\ 7x-2y\leq 28 \\ x+y\geq 4 \end{cases}$$



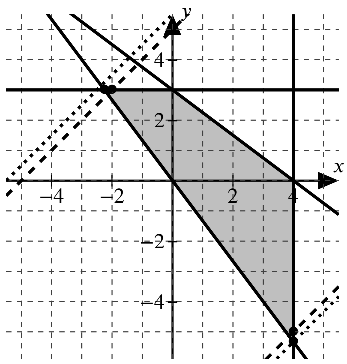
1.10

a) $P_{max}=P(4;-\frac{16}{3})=\dfrac{28}{3}$

$P_{min}=P(-\frac{9}{4};3)=-\dfrac{21}{4}$

b) $P_{max}=P(4;-5)=9$

$P_{min}=P(-2;3)=-5$



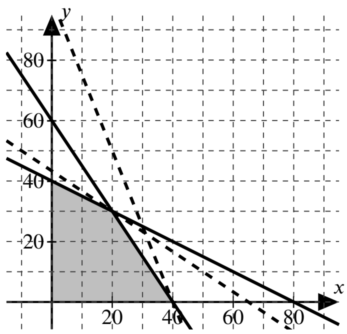
1.11

a) $P(x;y)=50x+20y$

$$\begin{cases} x+2y\leq 80 \\ 3x+2y\leq 120 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

c) Il faut produire 40 boîtes de type A et aucune de type B. Le profit sera de CHF $2000.-$.

d) Il faut produire 20 boîtes de type A et 30 de type B. Le profit sera de CHF $1300.-$.

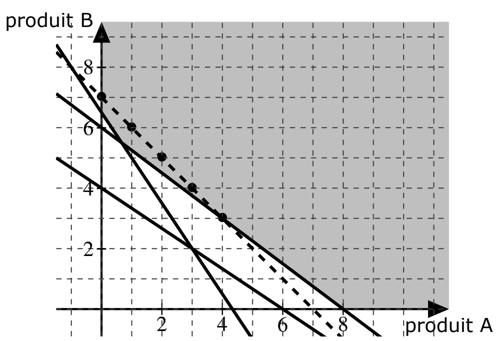


1.12

$P(x;y)=x+y$

$$\begin{cases} 15x+10y\geq 65 \\ 20x+30y\geq 120 \\ 300x+400y\geq 2400 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Il faut mettre 0 dose de produit A et 7 de produit B ou 1 de A et 6 de B ou 2 de A et 5 de B ou 3 de A et 4 de B ou 4 de A et 3 de B.
Le prix sera de CHF 7.–.

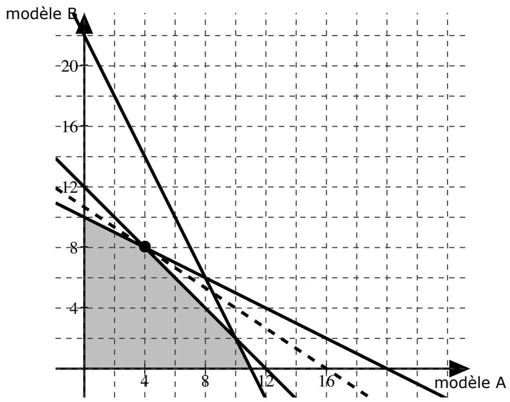


1.13

$P(x\,;y) = 200x + 300y$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 2x + y \leq 22 \\ x + y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Il faut faire 4 statues A et 8 statues B. Le profit sera de CHF $3200.-$.



1.14 150 t du fournisseur A et 625 t du fournisseur B

1.15

a) 15 armoires et 30 tables.

b) 15 armoires et 30 tables ou 20 armoires et 24 tables ou 25 armoires et 18 tables ou 30 armoires et 12 tables.

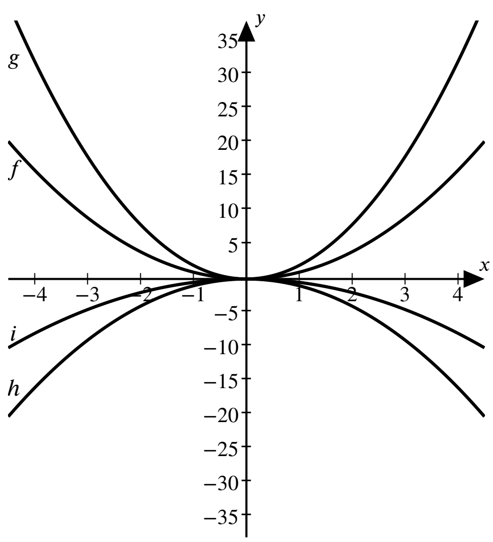
1.16 $4'000$ km en bateau, $2'000$ km en car et $2'000$ km en train.

2 Solutions - Fonctions quadratiques

2.1

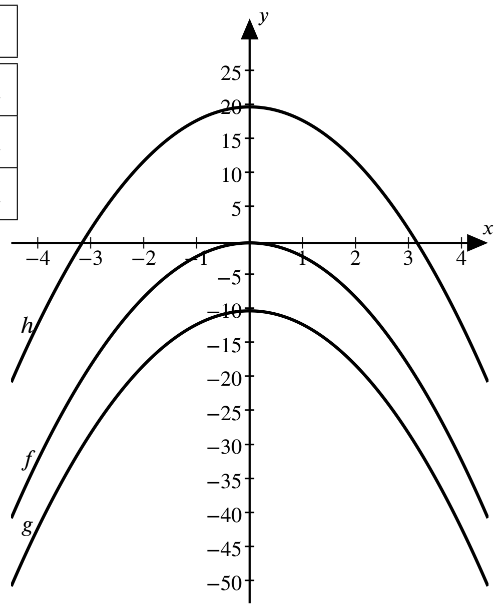
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$g(x) = 2x^2$	32	18	8	2	0	2	8	18	32
$h(x) = -x^2$	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16
$i(x) = -\frac{1}{2}x^2$	-8	$-4{,}5$	-2	$-0{,}5$	0	$-0{,}5$	-2	$-4{,}5$	-8

- Leur expression est de la forme ax^2. Les coefficients b et c sont nuls.
- Toutes ces paraboles passent par l'origine.
- Elles sont symétriques par rapport à l'axe Oy.
- Si $a > 0$, la parabole « sourit ». si $a < 0$, la parabole est « triste ».
- Faire varier le a change la courbure de la parabole.



2.2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)=-2x^2$	-32	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	-32
$g(x)=-2x^2-10$	-42	-28	-18	-12	-10	-12	-18	-28	-42
$h(x)=-2x^2+20$	-12	2	12	18	20	18	12	2	-12



- $a=-2$ pour toutes les paraboles. Elles sont toutes « tristes ». Elles ont la même courbure.
- Leur expression est de la forme $-2x^2+c$. Le coefficient b est nul.
- Elles sont symétriques par rapport à l'axe Oy.
- Faire varier c translate verticalement la courbe.
- c est l'ordonnée à l'origine de la parabole.

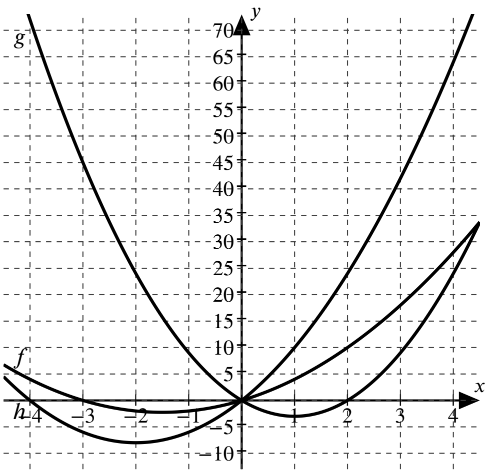
2.3

a) f : 0 et -3 $\quad$ g : 0 et 2 $\quad$ h : 0 et -4

b) 0 et $-\dfrac{b}{a}$

c)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)=x^2+3x$	4	0	-2	-2	0	4	10	18	28
$g(x)=3x^2-6x$	72	45	24	9	0	-3	0	9	24
$h(x)=2x^2+8x$	0	-6	-8	-6	0	10	24	42	64



d) $S_f=(-\frac{3}{2};-\frac{9}{4})$; $S_g=(1;-3)$; $S_h=(-2;-8)$

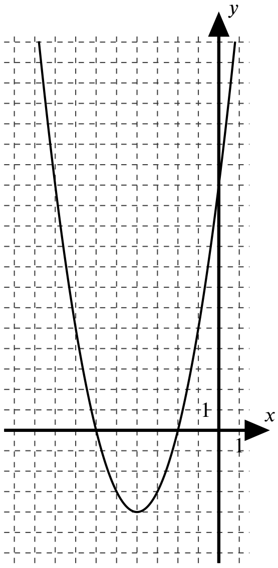
e) La première coordonnée du sommet est la moyenne des 2 zéros, quand ils existent. Ici, cela revient à prendre la moitié du zéro non nul.

f) $-\dfrac{b}{2a}$

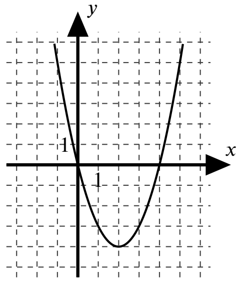
g) On a vu dans l'exercice précédent que changer le c translate verticalement la parabole. Cela ne change donc pas la première coordonnée du sommet. Ainsi, elle sera de $-\dfrac{b}{2a}$, comme à la question précédente.

2.4

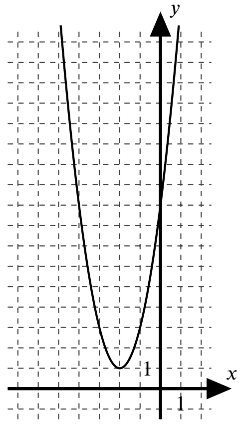
a) O. o. : 12
Zéros : -6 et -2
Sommet : $S(-4\,;-4)$
Orientation : convexe



b) O. o. : 0
Zéros : 0 et 4
Sommet : $S(2\,;-4)$
Orientation : convexe

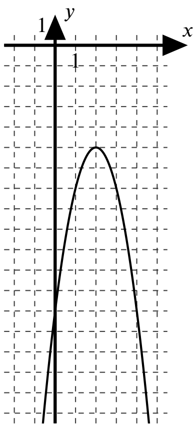


c) O. o. : 9
Zéros : aucun
Sommet : $S(-2\,;1)$
Orientation : convexe

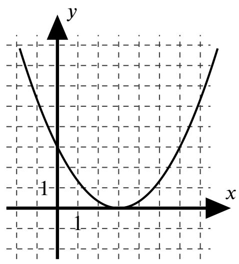


2.4

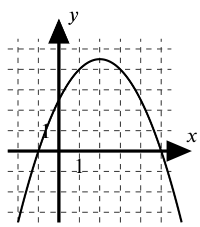
d) O. o. : -13
Zéros : aucun
Sommet : $S(2\,;-5)$
Orientation : concave



e) O. o. : 3
Zéros : 3
Sommet : $S(3\,;0)$
Orientation : convexe



f) O. o. : $\frac{5}{2}$
Zéros : -1 et 5
Sommet : $S\left(2\,;\frac{9}{2}\right)$
Orientation : concave



2.5 a) $(3\,;-2)$ et $(-2\,;18)$ b) $(1\,;8)$ et $\left(\frac{2}{3}\,;7\right)$ c) Aucun point d'intersection.

2.6 a) $(3\,;9)$ et $(5\,;33)$ b) $(6\,;-6)$ c) Aucun point d'intersection

2.7 Les deux courbes sont bien tangentes, car elles n'ont qu'un point d'intersection : $(4\,;1)$

2.8 $A(y)=250y-\frac{3}{4}y^2$ $y=\frac{500}{3}$ $x=125$ Le champ mesure 125 m sur environ $166{,}7$ m.

2.9 $A(x)=27x-2x^2$ $x=\frac{27}{4}$ 6,75 cm de chaque côté.

2.10 $P(x)=36x-x^2$ Les nombres sont 18 et 18.

2.11 $P(x)=12x+x^2$ Les nombres sont -6 et 6 et le produit -36.

2.12 $S(x)=x^2+(36-x)^2=2x^2-72x+1296$ minimum = 648

2.13 $A(x)=(x-2)(12-x)$ 2 morceaux de 7 cm de long et 2 autres de 5 cm de long.

2.14 Variables : $x=BM=CN$, $y=BN$
À optimiser : $A_{MNI}=\frac{x+3}{2}\cdot 6-\frac{3x}{2}-\frac{xy}{2}$ Contrainte : $y=6-x$
Fonction à optimiser : $\mathscr{A}_{MNI}(x)=\frac{x+3}{2}\cdot 6-\frac{3x}{2}-\frac{x(6-x)}{2}=\frac{x^2-3x+18}{2}$
Min : $x_{MIN}=\frac{3}{2}$ Le point M doit se situer à $1,5$ cm du point B.

2.15 a) $x=2$ cm b) aire max $=36$ cm^2

2.16 a) Le point F doit être situé à $2\ cm$ du point D. b) La proportion de l'aire du triangle est de $\frac{28}{64}=43,75\%$.

2.17 a) 60 km/h b) 75 km

2.18 a) 125 m b) 105 m c) 7 s

2.19 $R(x)=x[480-5(x-60)]$ Il faut planter 78 poiriers.
Ou si x est le nb de poiriers en plus des 60 : $R(x)=(60+x)(480-5x)$

2.20 $R(x)=(120+30x)(240-40x)=28'800+2400x-1200x^2$

a) Dans une semaine. b) Le revenu sera de CHF $30'000.-$.

2.21 Si $30\le x\le 90$ $R(x)=(75-0,5x)x$ Pour 75 participants.

3 Solutions - Polynômes et fonctions polynomiales

3.1

a) $x^2-10x+25$
b) $9x^2+42xy+49y^2$
c) $25a^3-16a$
d) $3x^2-15x-150$
e) $4y^4-60y^3+200y^2$
f) $-21x^2+88x-25$
g) $-2x^2+7x+54$
h) $t^3+\frac{22}{3}t^2-28t+3$

3.2

a) $x^5(x+7)(x-7)$
b) $5(y-2)(y-8)$
c) $\frac{1}{8}x^2(x-4)(x-4)$
d) $(14x+1)^2$
e) $-m(m+7)(m-1)$
f) $x^7y^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
g) $\frac{1}{8}(x+2)(x-8)$
h) $-3(c^2+15)$

3.3

a) $10(2x+7)(x-3)$
b) $(5y-2)(5y-8)$
c) $x(2x-5)(3x-1)$
d) $x^2(2x-3)(5x-4)$
e) $(3x+5)^2$
f) $100a^2+9a+1$

3.4

a) $11x^2(x+3)(x-2)$
b) $3(4x-1)(3x-1)$
c) $5y(7x^2+5x+2)$
d) $2x^5(x-12)(x+12)$
e) $-(7c+3)^2$
f) $x^2y^4(3x+5)(x-2)$

3.5

a) $\frac{1}{3}x(x-5)(x+3)$
b) $\frac{1}{2}(x-6)(x-4)$
c) $(\sqrt{7}x+15)(\sqrt{7}x-15)$
d) $(x-12)(2x+1)$
e) $x^5(9x+2)^2$
f) $\frac{1}{6}(x-6)(x-3)$

3.6

a) $25x^2+40x+16$
b) $25x^4+40x^2+16$
c) $25x^6+40x^3+16$
d) z^2-225
e) z^4-225
f) $z^{20}-225$
g) $x^2+19x-66$
h) x^4+19x^2-66
i) $3x^2-29x-44$
j) $3x^4y^2-29x^2y-44$

3.7

a) $(x^2+25)(x-5)(x+5)$
b) $(x+2)(x-2)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$
c) $(x^2+11)(2x^2+1)$
d) $(3x+2)^2(3x-2)^2$
e) $(z+3)(z-3)(z^2+1)$
f) $(x+1)(x-1)(x^2+9)$

3.8

a) $a^2(a+5)(a-5)(a^2+4)$
b) $5(x+3)(x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
c) $-x^3(7x^2+6)(x+1)(x-1)$
d) $\frac{1}{3}(x^2+9)(x-3)(x+3)$
e) $2xy(4x^2+25)^2$
f) $\frac{1}{7}x^4(x^2+7)(x^2+3)$

3.9

a) $x^3+12x^2+48x+64$
b) $8x^3-60x^2+150x-125$
c) $1000c^3-300c^2+30c-1$
d) $27x^3+9x^2+x+\frac{1}{27}$
e) $x^3-6x^2+12x-8$
f) $x^6-6x^4+12x^2-8$
g) $x^9+3x^6+3x^3+1$
h) $x^{30}y^{12}+3x^{20}y^8+3x^{10}y^4+1$

3.10

a) $(x+5)(x^2-5x+25)$
b) $(x-5)(x^2+5x+25)$
c) $(2V+T)(4V^2-2VT+T^2)$
d) $(3x-2)(9x^2+6x+4)$
e) $(x+1)^3$
f) $(q-10)^3$

3.11

a) $(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$
b) $x(x+2)(x^2-2x+4)$
c) $(x+1)^2(x^2-x+1)^2$
d) $8(n+1)^3$
e) $(x+1)(x^2-x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)$
f) $x^3(x+3)^3$

3.12

a) $(x+5)(x^2+3)$
b) $(x+6)(x+2)(x-2)$
c) $(5z-8)(z-1)(z+1)$
d) $(x+8)(x+1)(x^2-x+1)$
e) $(x+1)(x+2)(x^2-2x+4)$
f) $(2w+3)(w-5)(w^2+5w+25)$

3.13

a) $2x(3x-5)(x^2+11)$
b) $-x^3(x+8)(2x+3)(4x^2-6x+9)$
c) $\frac{1}{11}(x+2)(x+11)(x-11)$
d) $10y^2(3y-2)(2y-1)(2y+1)$
e) $5(2x-13)(x+1)(x^2-x+1)$
f) $5(2x+13)(x-1)(x^2+x+1)$

3.14

a) $\mathcal{S}=\left\{-5\right\}$
b) $\mathcal{S}=\left\{-2;2\right\}$
c) $\mathcal{S}=\left\{2\right\}$
d) $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{10}\right\}$
e) $\mathcal{S}=\left\{-5;1\right\}$
f) $\mathcal{S}=\left\{0;-\frac{1}{6};4\right\}$

3.15

a) $F(x)=(3x^3-2x^2-4x+2)(x-2)+9$
b) $F(x)=(x^2-3x+1)(x-5)$
c) $F(x)=(3x^2-2x+2)(x+2)+4$
d) $F(x)=(x^3+3x^2+x+3)(x-3)+2$

3.16

a) $F(x)=(-x^2+2x-1)(2x-3)-4$
b) $F(x)=(-4x^2-3x+2)(4x+5)$
c) $F(x)=(3x^2+7x+5)(3x-7)+9$
d) $F(x)=(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1)(2x-4)-4$

3.17

a) $F(x)=(x^3-3x^2+3x-7)(x^2+2x-1)+(20x-8)$
b) $F(x)=(5x^2+3x+5)(x^2-1)+(3x+4)$
c) $F(x)=(3x^3+7x^2-5x+1)(2x^2-3x+2)+(x+3)$
d) $F(x)=(x^2-5x+6)(3x^2+8x+4)$

3.18 x^4+4x^2+x-20 est la seule possibilité

3.19 $x^3-11x+6$ ou $k(x^3-11x+6)$ pour tout nombre réel k.

3.20

a.i) oui
a.ii) non
a.iii) non
a.iv) oui
a.v) non
a.vi) oui
a.vii) non
a.viii) non

b) $A(x)=(x^2+5x-4)(x+2)$ $D(x)=(3x^2-x+3)(x+2)$ $F(x)=(10x^3+3x^2-3)(x+2)$

3.21

a.i) oui
a.ii) non
a.iii) oui
a.iv) non
a.v) oui
a.vi) non
b) tous

3.22

a) Zéros : ±2
b) Zéros : -3 ; -1

3.23

a) $(x-3)(x+2)(x+5)$
b) $(x-1)(x+7)(x+4)$
c) $(2x+1)(x-2)(x+3)$
d) $(x+3)(x^2+4)(x+4)$

3.24

a) $\mathcal{S}=\left\{-3;9\right\}$
b) $\mathcal{S}=\left\{-1;-2;-3;-4\right\}$
c) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{3};-3;2\right\}$
d) $\mathcal{S}=\left\{1;-1;-11;-5\right\}$

3.25

a) $(x-4)(x+3)(x+4)$
b) $(x-5)(x-3)(x-1)$
c) $(x-3)(x+4)^2$
d) $(x-4)(x-3)(x-2)$
e) $(x-2)(x+3)(x^2+x+1)$
f) $(x+1)(5x+1)(7x+1)$

3.26

a) $x(x-8)(x+8)$
b) $(x-4)(x^2+4x+16)$
c) $(x^2+8)(x+\sqrt{8})(x-\sqrt{8})$
d) $(x+8)(x^2+8)$
e) $(x^2+8)^2$
f) $(x+8)(x+2)(x+4)$
g) $x(x+8)(3x-8)$
h) $(x+16)(x-2)(x+2)$

3.27

a)

x		-2		3		4	
$f(x)$	+	0	−	0	+	0	−

b)

x		-2		3		4	
$g(x)$	−	0	−	0	+	0	−

c)

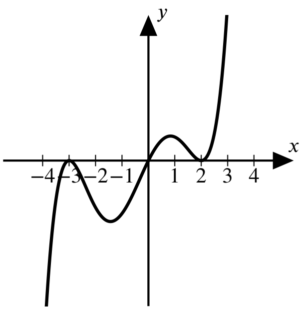
x	
$h(x)$	+

d)

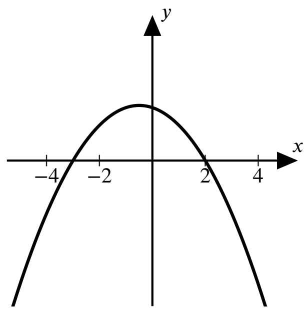
x		-3		0		4	
$i(x)$	−	0	+	0	+	0	+

3.28

a)

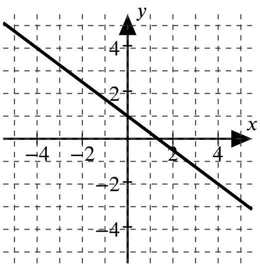


b)



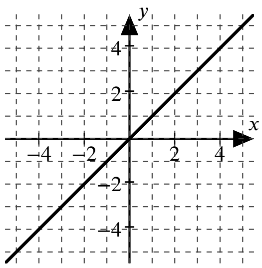
3.29

a)



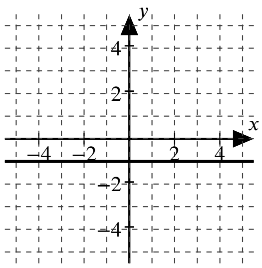
x		$\frac{4}{3}$	
$f(x)$	+	0	−

b)



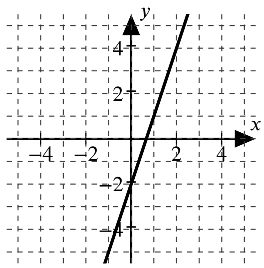
x		0	
$g(x)$	−	0	+

c)



x	
$h(x)$	−

d)



x		$\frac{2}{3}$	
$i(x)$	−	0	+

3.30

a)

x		7	
$7-x$	+	0	−

b)

x		$\frac{7}{4}$	
$4x-7$	−	0	+

c)

x		6	
$-\frac{1}{3}x+2$	+	0	−

d)

x		0	
$\frac{4}{5}x$	−	0	+

e)

x	
13	+

f)

x		6	
$-6+x$	−	0	+

3.31 Par exemple $f(x)=4-x$ ou $f(x)=8-2x$ ou $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+2$ ou ...

3.32

a)

x		$-\frac{3}{2}$		5	
3	+		+		+
$5-x$	+		+	0	−
$2x+3$	−	0	+		+
$3(5-x)(2x+3)$	−	0	+	0	−

b)

x		0		$\frac{5}{4}$	
$3x$	−	0	+		+
$-5+4x$	−		−	0	+
$3x(-5+4x)$	+	0	−	0	+

c)

x		-4		6	
-4	−		−		−
$x+4$	−	0	+		+
$x-6$	−		−	0	+
$-4(x+4)(x-6)$	−	0	+	0	−

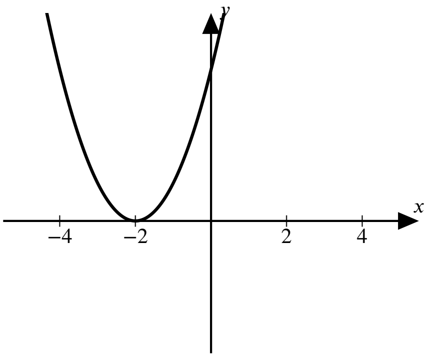
d)

x		$-\frac{1}{7}$		0	
$-4x$	+		+	0	−
$7x+1$	−	0	+		+
$-4x(7x+1)$	−	0	+	0	−

3.33

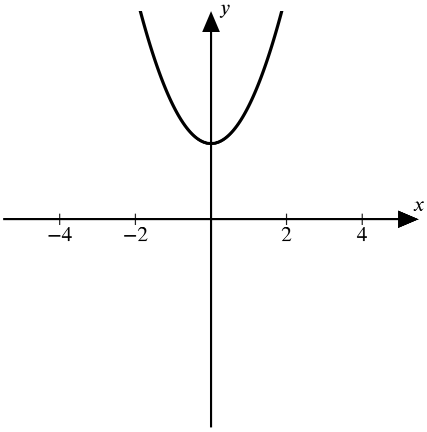
a)

x		-2	
$(x+2)^2$	+	0	+



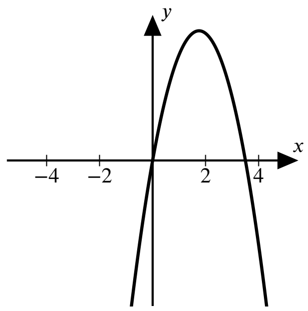
b)

x	
x^2+2	+



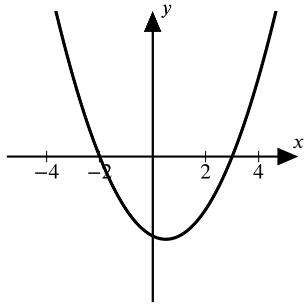
c)

x		0		$\frac{7}{2}$	
$-2x^2+7x$	−	0	+	0	−



d)

x		-2		3	
x^2-x-6	+	0	−	0	+



3.34

a)

x		-11		-5	
$-x^2-16x-55$	$-$	0	$+$	0	$-$

b)

x		-1		$\frac{1}{13}$	
$13x^2+12x-1$	$+$	0	$-$	0	$+$

c)

x		$-\frac{3}{2}$	
$4x^2+12x+9$	$+$	0	$+$

d)

x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
$-5+x^2$	$+$	0	$-$	0	$+$

e)

x	
x^2+x+9	$+$

f)

x		0		$\frac{2}{9}$	
$-9x^2+2x$	$-$	0	$+$	0	$-$

g)

x	
$-x^2-9$	$-$

h)

x		0	
$-5x^2$	$-$	0	$-$

3.35

a)

x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
$5-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$2x^2+3$	$+$		$+$		$+$
$(5-x^2)(2x^2+3)$	$-$	0	$+$	0	$-$

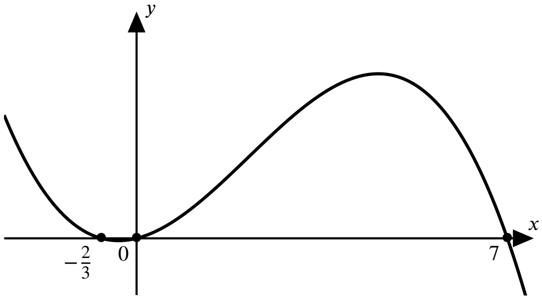
b)

x		-3		2	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
x^2+x-6	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x+3)(x^2+x-6)$	$-$	0	$-$	0	$+$

3.36

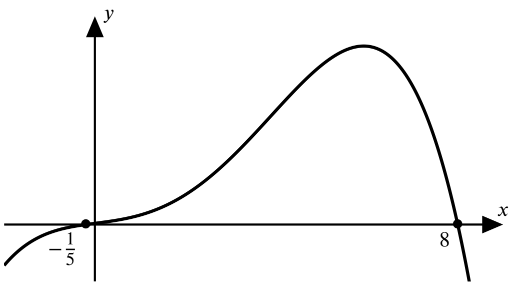
a)

x		$-\frac{2}{3}$		0		7	
$5x(3x+2)(7-x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$



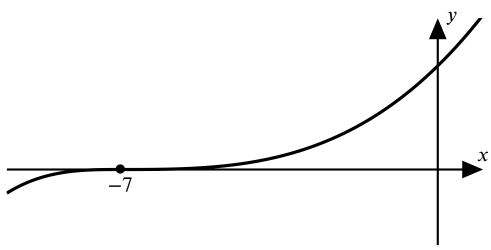
b)

x		$-\frac{1}{5}$		8	
$-4(x-8)(5x+1)(x^2+2)$	$-$	0	$+$	0	$-$



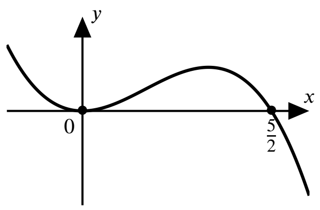
c)

x		-7	
$(x+7)^3$	$-$	0	$+$



d)

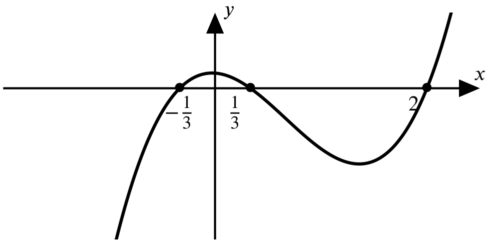
x		0		$\frac{5}{2}$	
$x^2(-2x+5)$	$+$	0	$+$	0	$-$



3.37

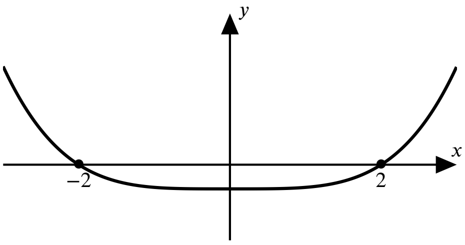
a)

x		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		2	
$(3x+1)(3x-1)(x-2)$	−	0	+	0	−	0	+



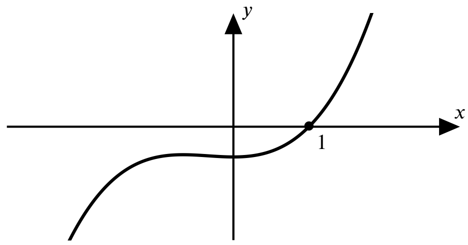
b)

x		-2		2	
$(2+x)(2-x)(4+x^2)$	−	0	+	0	−



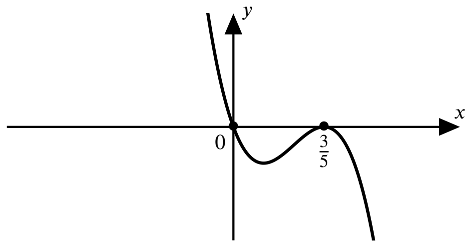
c)

x		1	
$(x-1)(x^2+2x+2)$	−	0	+



d)

x		0		$\frac{3}{5}$	
$-x(5x-3)^2$	+	0	−	0	−



3.38

a)

x		5	
$(5-x)^3$	+	0	−

b)

x		$-\frac{7}{3}$	
$(3x+7)^4$	+	0	+

c)

x		0		2	
$x^3(x-2)^2$	−	0	+	0	+

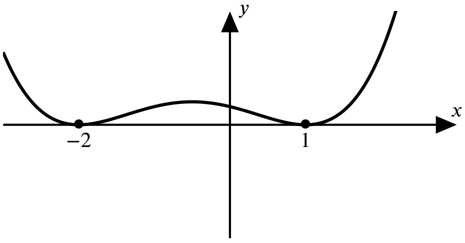
d)

x		-4		0		6	
$-3x(x+4)^4(6-x)^2$	+	0	+	0	−	0	−

3.39

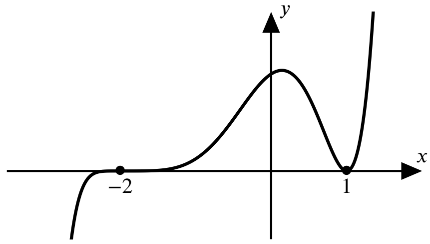
a)

x		-2		1	
$(x-1)^2(x+2)^2$	+	0	+	0	+



b)

x		-2		1	
$(x-1)^2(x+2)^5$	−	0	+	0	+



Références

[1] T. Besson : 2C Exercices de mathématiques, juin 2020.

[2] H. Bovet : Diplôme 2D. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2008.

[3] J.-P. Favre : Mathématiques pour la Matu pro. Promath Editions, 2019.

[4] J.-P. Javet : Mathématiques 2C. http://www.javmath.ch, 2021.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch

sarah.delmonico@eduvaud.ch

Version du 9 juin 2023