2C

Mathématiques

Partie 2

Sarah Delmonico
Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2023-2024

Table des matières

Exercices

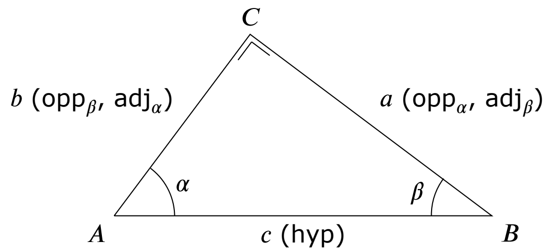
Solutions

4 Trigonométrie II

4.1 Rappel - Trigonométrie dans le triangle rectangle

Soit un triangle ABC rectangle en C.

- Le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse**. Il est abrégé par « hyp ». C'est le côté le plus long.
- Les deux autres côtés sont appelés **cathètes**. Pour les différencier, il faut se repérer par rapport à l'un des angles.
  La **cathète adjacente** à l'angle α, notée « adj_α », est la cathète qui est un des côtés de α. L'autre cathète est la **cathète opposée** à l'angle α, notée « opp_α ».



Pour chaque angle non droit du triangle ABC, on peut définir les rapports trigonométriques **sinus**, **cosinus** et **tangente**. Par exemple, pour α :

$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{\text{opp}_\alpha}{\text{hyp}}} \qquad \boxed{\cos(\alpha) = \frac{\text{adj}_\alpha}{\text{hyp}}} \qquad \boxed{\tan(\alpha) = \frac{\text{opp}_\alpha}{\text{adj}_\alpha}}$$

À l'aide des rapports trigonométriques, il est possible de **résoudre un triangle rectangle**. Cela signifie calculer les longueurs de tous ses côtés, les valeurs de ses angles et son aire.

Exemples :

a) Résoudre le triangle ABC rectangle en C dont on donne le côté $b = 8,2$ cm et l'angle $\alpha = 37°$.

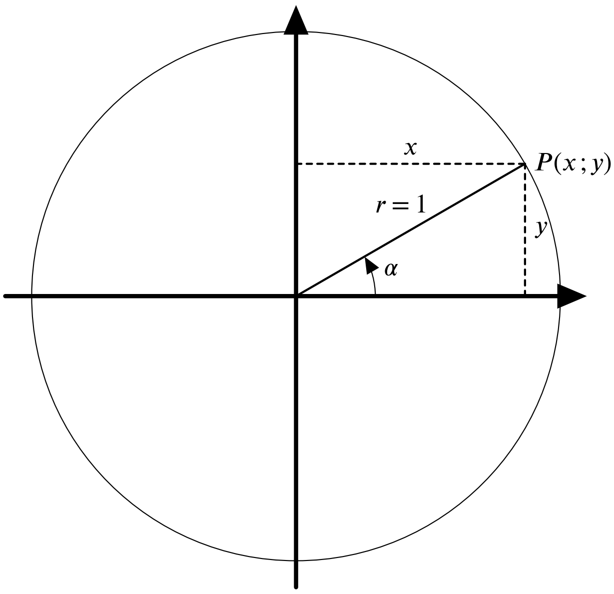
b) Résoudre le triangle ABC rectangle en C dont on donne les côtés $a = 7,6$ cm et $c = 18,4$ cm.

4.2 Cercle trigonométrique

4.3 Rapports trigonométriques généralisés

Jusqu'à présent, nous avons défini les rapports trigonométriques pour des angles dans des triangles rectangles, donc des angles aigus. Nous aimerions maintenant pouvoir travailler dans des triangles quelconques et donc aussi avec des angles obtus. Et pourquoi se limiter aux angles convexes ? Comment peut-on généraliser la notion de rapports trigonométriques à tous les angles ?

Pour cela nous allons avons besoin du cercle trigonométrique. Avant de définir cette nouvelle notion, observons la figure ci-dessous. Il s'agit d'un cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1. Le point $P(x;y)$ est sur le cercle et l'angle entre Ox et OP est α.



Déterminer cos(α) et sin(α) à l'aide des coordonnées de P.

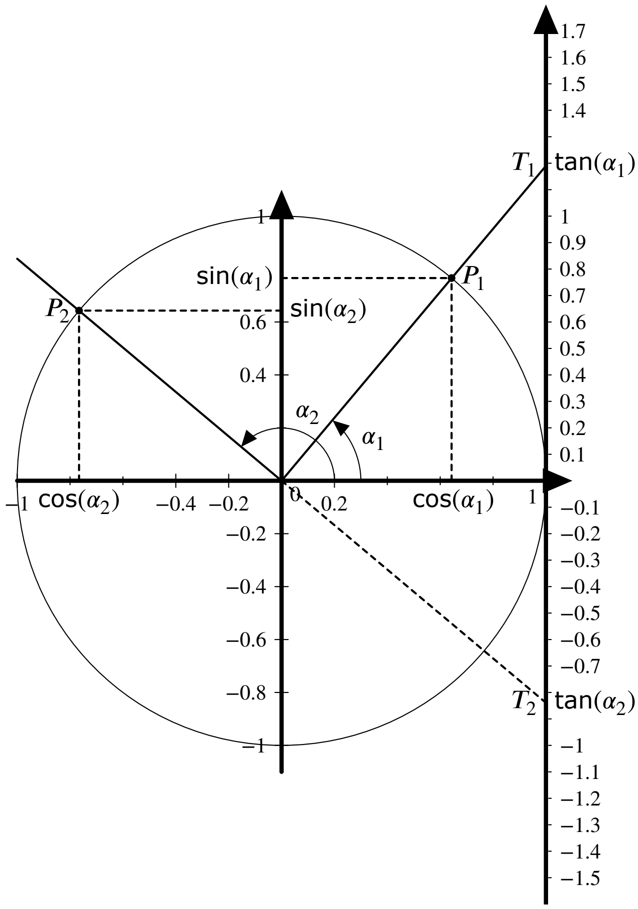
Sur cette même figure, représenter un triangle rectangle dont un des angles est α et tel que adj$_\alpha$ mesure 1.

Où peut-on retrouver la valeur de tan(α) ?

Définition 4.1 On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre $O(0;0)$ de rayon 1 muni de 3 axes gradués tels que ci-dessous.

On définit les **rapport trigonométriques** de l'angle α de la manière suivante :

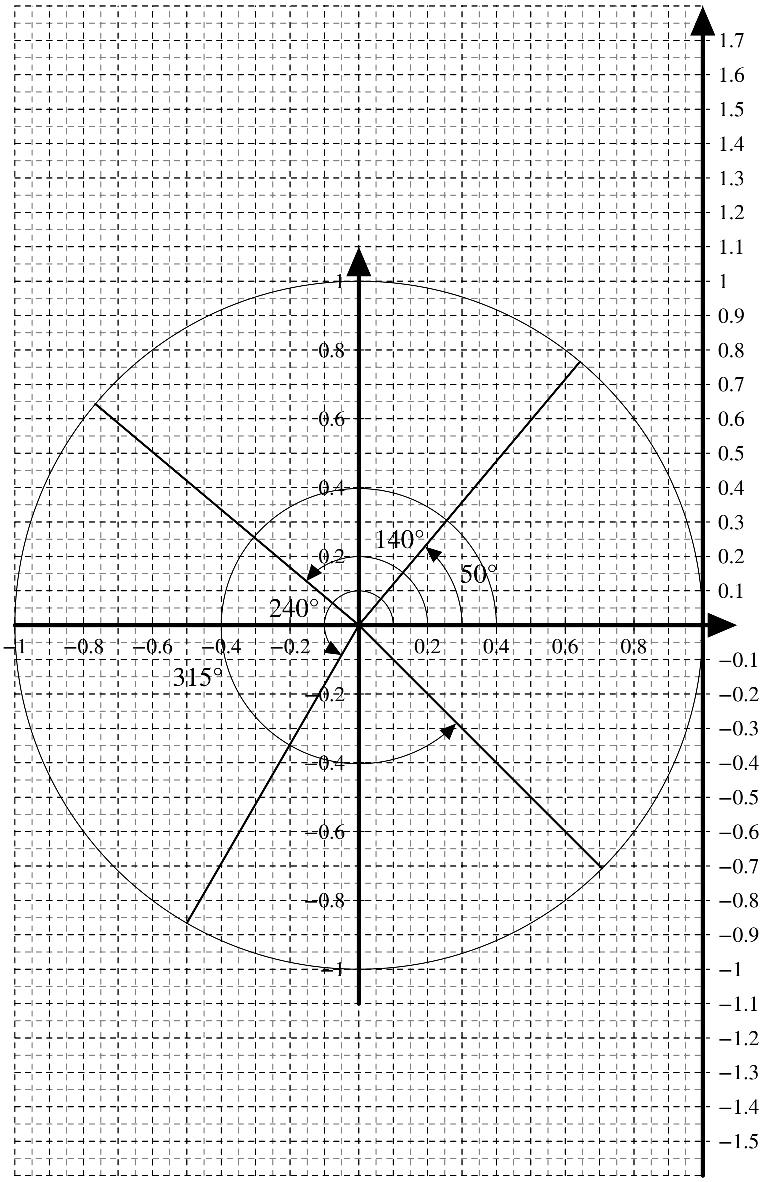
- Le **cosinus de l'angle** α, $\cos(\alpha)$, est la 1re coordonnée du point P, où P est le point du cercle tel que l'angle entre Ox et OP est α.
- Le **sinus de l'angle** α, $\sin(\alpha)$, est la 2e coordonnée du point P.
- La **tangente de l'angle** α, $\tan(\alpha)$, est la 2e coordonnée du point T, où T est le point de la tangente verticale telle que l'angle entre Ox et OT est α.



Remarques :

- Cette définition induit que $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ donnent des valeurs comprises entre -1 et 1.
- Par contre, $\tan(\alpha)$ peut prendre n'importe quelles valeurs.
- Pour les angles aigus, cette définition est équivalente à celle vue précédemment.
- Le cercle trigonométrique est en quelque sorte un formulaire interactif !

Exemple : Estimer les rapports trigonométriques des angles ci-dessous grâce au cercle trigonométrique. Comparer ensuite aux valeurs données par la calculatrice.



degrés	240°	140°	50°	315°	−45°	0°	90°	180°	270°	500°
sin										
cos										
tan										

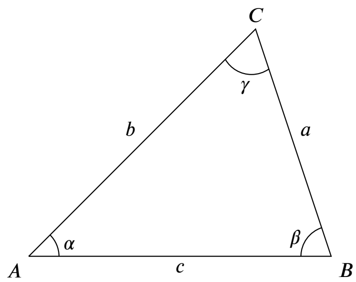
Quelles sont les valeurs interdites de la fonction tan ?

4.4 Trigonométrie dans le triangle quelconque

Théorème du cosinus

Nous avons vu comment résoudre un triangle rectangle. Nous allons maintenant faire de même pour les triangles quelconques.

Soit un triangle quelconque ABC, nous nommerons les côtés et les angles comme ci-dessous :



Exemple :

a) Calculer la longueur a d'un triangle quelconque, sachant que l'angle $\alpha = 60°$, $c = 5$ et $b = 6$. Pour y arriver, partager le triangle en deux triangles rectangles à l'aide de la hauteur issue de C et utiliser uniquement le cosinus comme rapport trigonométrique. Noter soigneusement le raisonnement.

b) En utilisant le raisonnement fait ci-dessus, exprimer a à l'aide des lettres α, c et b.

Théorème 4.1 (Théorème du cosinus ou de Pythagore généralisé) *Soit un triangle ABC. On a :*

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) \end{aligned}}$$

Exemple : Calculer, à l'aide de ce théorème, la longueur a d'un triangle quelconque, sachant que l'angle $\alpha = 60^\circ$, $c = 5$ et $b = 6$.

Remarque : Si $\alpha = 90^\circ$, on a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(90) = b^2 + c^2$. On retrouve le théorème de Pythagore.

Nous utiliserons le théorème du cosinus pour résoudre des triangles lorsqu'on connaît la longueur des trois côtés ou deux côtés et un angle.

Exemple : Résoudre le triangle ABC sachant que $a = 4$, $b = 5$ et $c = 7$ (sauf l'aire). Vérifier par construction.

Exemple : Résoudre le triangle ABC sachant que $\alpha = 40^\circ$, $b = 5$ et $c = 7$ (sauf l'aire).

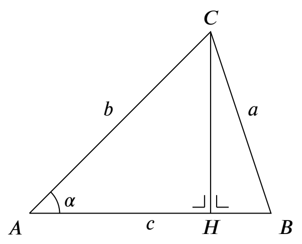
Vérifier par construction.

Exemple : Résoudre le triangle ABC sachant que $\alpha = 40^\circ$, $a = 4$ et $b = 5$ (sauf l'aire).

Vérifier par construction.

Théorème de l'aire

Exemple : Soit un triangle quelconque ABC avec $\alpha = 60°$, $c = 5$ et $b = 6$.



a) Calculer la hauteur CH.

b) Calculer l'aire du triangle en fonction.

Théorème 4.2 (théorème de l'aire) *Soit un triangle ABC. On a :*

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}ab \cdot \sin(\gamma)}$$

Exemple : En utilisant le théorème de l'aire, calculer l'aire du triangle ABC tel que l'angle $\alpha = 60°$, $c = 5$ et $b = 6$.

Théorème du sinus

Théorème 4.3 (théorème du sinus) *Soit un triangle ABC. On a :*

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$$

Exemple : Calculer l'angle β du triangle ABC, à l'aide de ce théorème, sachant que l'angle $\alpha = 40°$, $a = 4$ et $b = 5$. Trouver toutes les possibilités et vérifier par construction.

Exemple : Calculer l'angle β du triangle ABC, à l'aide du théorème du sinus, sachant que l'angle $\alpha = 40°$, $b = 5$ et $c = 3$. Trouver toutes les possibilités et vérifier par construction.

Remarque : Ce théorème est plus facile d'utilisation que le théorème du cosinus. Néanmoins, lorsqu'on l'utilise pour trouver un angle, il donne parfois des solutions que l'on doit éliminer.

Malheureusement, il n'y a pas toujours des critères simples, à part la construction, pour savoir si l'on doit éliminer une possibilité ou non. De ce fait, il vaut mieux éviter d'utiliser le théorème du sinus pour trouver des angles.

Nous utiliserons le théorème du sinus pour résoudre des triangles lorsqu'on connaît deux angles et un côté.

Exemple : Résoudre le triangle ABC sachant que $a = 6$, $\alpha = 45°$ et $\gamma = 30°$. Vérifier par construction.

5 Analyse combinatoire

5.1 Principes fondamentaux

L'analyse combinatoire est la branche des mathématiques qui étudie le dénombrement.

Cela nous permettra de répondre, par exemple, aux questions suivantes :

- Combien d'équipes de 4 personnes peut-on former à partir des membres de la classe ?
- Combien d'anagrammes peut-on former à partir du mot ANAGRAMME ?
- Combien y a-t-il de grilles possibles à l'EuroMillion ?

Et si je sais combien de grilles il y a à l'EuroMillion, je peux calculer la probabilité d'y gagner...

Principe de multiplication

Exemple : Il y a 3 chemins pour aller de A à B et 2 pour aller de B à C. Combien de chemins différents y a-t-il pour aller de A à B puis à C ?

Supposons qu'un événement E se décompose en k étapes successives. Si la première étape à n_1 réalisations différentes, la deuxième n_2, etc ..., alors l'événement E admet $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ réalisations différentes.
En combinatoire, les **réalisations** sont le terme employé pour désigner les cas possibles.

Il est possible de visualiser ce principe par la méthode des « gobelets ». Chaque étape est représentée par un gobelet et les réalisations sont les objets que l'on peut mettre dans chaque gobelets.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent.

Chaque trajet est un goblet : $|\underbrace{\quad}_{A \to B}| \quad |\underbrace{\quad}_{B \to C}|$

Puis, on note le nombre de chemins :

Si certaines étapes ont des contraintes, on commence par celles qui en ont le plus :

Exemple : Combien de nombres pairs à trois chiffres existe-t-il ?

Principes d'addition et de soustraction

Exemple : Combien de codes de 5 lettres peut-on écrire s'ils sont composés, soit uniquement de voyelles, soit uniquement de consonnes ?

> Supposons qu'un événement E se décompose en 2 sous-événements disjoints E_1 et E_2, alors le nombre de réalisations de E est égal à la somme du nombre de réalisations de E_1 avec le nombre de réalisations de E_2.
>
> On dit que deux événements sont **disjoints** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps

Exemple : De combien de manières différentes peut-on obtenir une somme comprise entre 6 et 8 en lançant deux dés distincts ?

Ce principe peut s'utiliser sous forme de soustraction, par exemple lorsqu'il y a la formulation **« au moins un »**.

> Supposons qu'un événement E_1 soit un sous-événement de l'événement E, alors le nombre de réalisations de E_1 est égal au nombre de réalisations de E moins celles du complémentaire de E_1.

Exemple : Combien de codes de cadenas à 5 chiffres peut-on écrire s'ils doivent contenir au moins un 0 ?

Exemple : Calculer de deux manières différentes le nombre de paires d'initiales comprenant au moins un X.

5.2 Les permutations

La fonction factorielle

Exemples :

a) Combien de codes de 3 lettres peut-on former avec les lettres A, B et C en n'utilisant qu'une seule fois chaque lettre ?

b) Combien de codes de cadenas à 10 chiffres peut-on former en n'utilisant qu'une seule fois chaque chiffre ?

On se rend compte que le calcul du deuxième exemple est fastidieux à faire, même à la calculatrice. On a donc inventé une fonction qui donne directement le résultat à partir du premier nombre :

La **fonction factorielle**, de ℕ dans ℕ, est définie par :

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \text{ si } n \neq 0$$

Par convention, on définit $0! = 1$.

Comment utiliser cette fonction sur ma calculatrice :

Exemple :

a) $5! =$

b) $20! =$

c) $70! =$

d) $\dfrac{70!}{67!} =$

Exemple : Combien de plans de classe peut-on faire pour placer les 24 élèves de la classe s'il y a exactement 24 places à disposition ?

Les permutations simples

Une **permutation** à n éléments est une disposition **ordonnée** de n objets .

Une permutation est **permutation simple** si les n objets sont **distincts**.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n le nombre des permutations simples à n éléments.

Les exemples de la page précédente sont des permutations. On peut constater que :

$$\boxed{P_n = n!}$$

Preuve : Représentons chaque emplacement et indiquons le nombre de possibilités en dessous :

–––	–––	...	–––	–––	–––
n	$n-1$	...	3	2	1

Il y a n possibilités pour la première position. Il ne reste ensuite plus que $n-1$ objets pour la suivante et ainsi de suite.

On conclut grâce au principe de multiplication. #

Exemple : Combien y a-t-il d'anagrammes du mot GYMNASE ?

Exemple : Combien y a-t-il de classements différents dans une course où il y a 10 coureurs ?

Les permutations avec répétitions

Exemple : Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ELEVE ?

On parle de **permutation avec répétions** lorsqu'il y a des objets indiscernables parmi la collection.

Prenons une collection de n objets composés de p_1 objets identiques d'une première sorte, p_2 d'une deuxième sorte, etc... avec $p_1 + p_2 + ...p_k = n$.

On note $\overline{P_n}(p_1\,;p_2\,;...\,;p_k)$ le nombre des permutations avec répétitions de cette collection .

En observant l'exemple précédent, on peut constater que :

$$\boxed{\overline{P_n}(p_1\,;p_2\,;...\,;p_k) = \frac{n!}{p_1!\cdot p_2\cdot ...\cdot p_k}}$$

Exemples :

a) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot EXCELLENCE ?

b) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ANAGRAMMES ?

5.3 Les arrangements

5.3.1 Les arrangements simples

Exemple : Combien de codes de 5 lettres différentes peut-on former ?

On appelle **arrangement** une disposition **ordonnée** de p éléments choisis parmi une collection de n objets.

On parle **arrangement simple** si les p éléments choisis **doivent être différents les une des autres**.

Soit p et $n \in \mathbb{N}$ avec $1 \le p \le n$.

On note A_p^n le nombre d'arrangements simples de p éléments choisis parmi une collection de n objets distincts.

On peut constater que :

$$\boxed{A_p^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemples :

a) Combien y a-t-il de podiums possibles lors de la finale d'une course comprenant 8 participants ?

b) Combien de plans de classe peut-on faire s'il y a 24 élèves et 26 places ?

Comment utiliser cette fonction sur ma calculatrice :

Remarque : Une permutation simple à n éléments est un arrangement simple de n éléments choisis parmi n objets, donc $P_n = A_n^n$. Cela justifie le choix de $0! = 1$, car ainsi $A_n^n = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$

Les arrangements avec répétitions

Exemple : Combien de codes de 5 lettres peut-on former ?

On appelle **arrangement avec répétions** un arrangement dont les éléments choisis **n'ont pas besoin d'être différents les une des autres**.

Soit p et $n \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p \leq n$.

On note $\overline{A_p^n}$ le nombre d'arrangements avec répétitions de p éléments choisis parmi n objets.

On peut constater que :

$$\boxed{\overline{A_p^n} = n^p}$$

Exemples : On effectue un tirage au sort parmi les 24 élèves de la classe chaque vendredi durant les 10 premières semaines de cours. On écrit ensuite la liste des numéros de semaines avec le nom de l'élève à côté.

a) Combien y a-t-il de listes possibles si le nom est remis en jeu après chaque tirage ?

b) Combien y a-t-il de listes possibles si le nom n'est pas remis en jeu après chaque tirage ?

5.4 Les combinaisons

Exemple : On choisit 3 personnes dans une classe de 24 personnes. Combien de groupes différents puis-je obtenir ?

On appelle **combinaison simple** un choix **non ordonné** de p éléments différents parmi une collection de n objets distincts.

Soit p et $n \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p \leq n$.
On note C_p^n le nombre de combinaisons simples de p éléments parmi n objets distincts.

On peut constater que :

$$\boxed{C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}}$$

Exemple : Pour remplir une grille d'*Euromillion*, il faut choisir 5 numéros et 2 étoiles.

a) Les 5 numéros sont choisis entre 1 et 50. Combien cela fait-il de possibilités ?

b) Les 2 étoiles sont choisies parmi 12. Combien cela fait-il de possibilités ?

c) Combien y a-t-il de grilles différentes ?

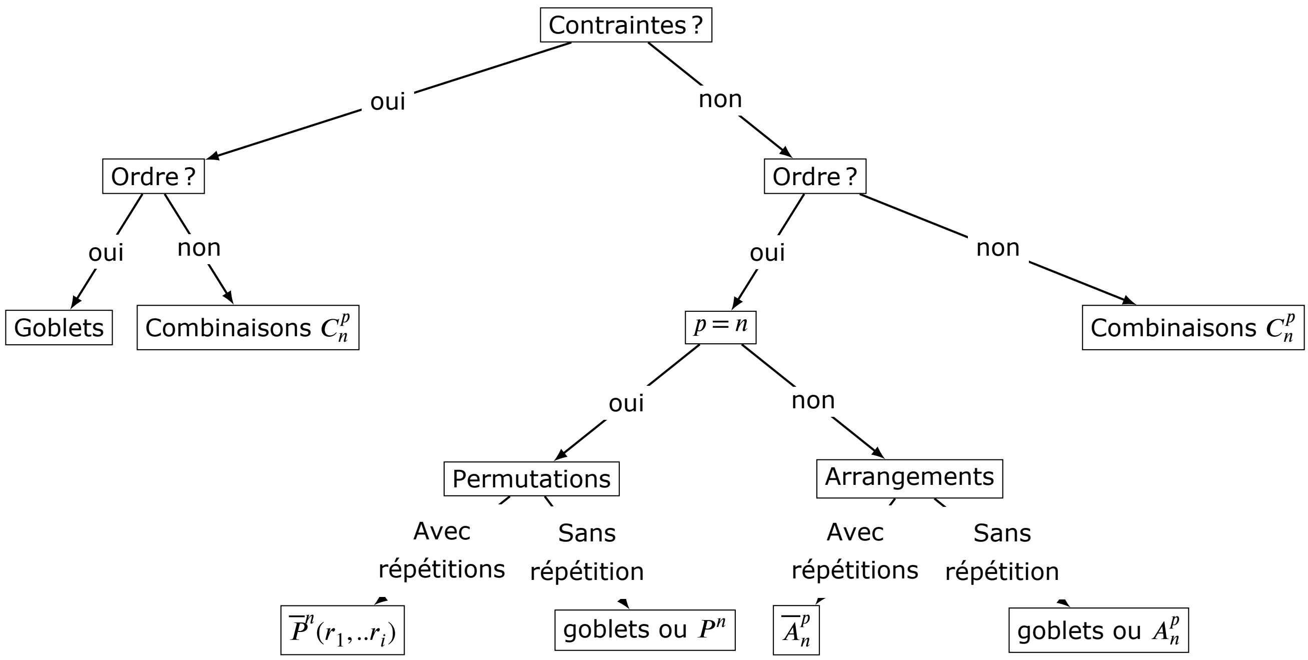
Comment utiliser cette fonction sur ma calculatrice :

5.5 Synthèse

La difficulté est de reconnaître quelle formule utiliser. Les questions de base sont toujours : « L'ordre est-il important ou non ? » et « Y a-t-il des répétitions ou non ? »

Les situations ne sont souvent pas aussi simples que les exemples précédents. Il faudra utiliser judicieusement les principes de multiplication et d'addition avec les différentes formules. Seule la pratique de multiples situations vous fera gagner en aisance.

L'arbre ci-dessous peut vous aider à identifier la bonne méthode :



Remarques :

- Lors d'un tirage si les objets sont tirés « successivement » l'ordre est important, s'il sont tirés « simultanément » l'ordre ne compte pas.
- Un tirage avec remise a forcément des répétitions.
- Lors de la distribution d'une main dans un jeu de cartes, l'ordre ne compte pas.

Exemple : Une enseignante de mathématiques prépare un test de combinatoire qui aura 9 exercices.

a) Elle choisit parmi sa banque de données qui contient 50 exercices. Combien y a-t-il de tests différents possibles si l'on ne tient pas compte de l'ordre des exercices ?

b) Elle choisit parmi sa banque de données qui contient 16 exercices de permutations, 20 exercices d'arrangements et 14 exercices de combinaisons. Combien y a-t-il de tests différents possibles si l'on ne tient pas compte de l'ordre des exercices et qu'elle choisit 3 exercices de chaque sorte ?

c) Les 9 exercices ont été choisis. Combien y a-t-il d'ordres possibles ?

d) Les 9 exercices ont été choisis. Combien y a-t-il d'ordres possibles si les 3 exercices de permutations doivent être l'un après l'autre ?

e) Les 9 exercices ont été choisis. Combien y a-t-il d'ordres possibles si les 3 exercices de permutations ne doivent pas être tous l'un après l'autre ?

f) Les 9 exercices ont été choisis. Combien y a-t-il d'ordres possibles si le premier et le dernier exercice doivent être choisis parmi les 3 exercices de permutations ?

Exemple : Une classe, qui compte 14 filles et 4 garçons, part en voyage d'études.

a) De combien de manières différentes peut-on choisir les 8 filles qui dormiront dans le premier dortoir et les 6 filles qui dormiront dans le deuxième ?

b) Je veux choisir un groupe de 5 personnes pour m'aider à l'organisation du voyage d'études. Combien de possibilités y a-t-il pour qu'il compte exactement un garçon ?

c) Je veux choisir un groupe de 5 personnes pour m'aider à l'organisation du voyage d'études. Combien de possibilités y a-t-il pour qu'il compte au moins un garçon ?

d) Je veux choisir un groupe de 5 personnes pour m'aider à l'organisation du voyage d'études. Combien de possibilités y a-t-il pour qu'il compte au moins deux garçons ?

e) Sur place, pour faire la commande des boissons du petit-déjeuner, chacun des élèves devra choisir entre prendre un thé, un café ou un jus d'orange. De combien de manières différentes la classe pourrait-elle faire sa commande ?

6 Statistique descriptive

6.1 Introduction

Les mots « statistique » et « statistiquement » sont souvent employés dans la vie courante et souvent pour justifier des décisions politiques ou de la direction d'une entreprise. Ces termes sont employés pour donner une garantie « mathématique » ou « scientifique ». Cette notion a aussi une connotation négative qui incite à la méfiance. Qu'en est-il réellement ? Nous allons le découvrir dans ce chapitre.

Citations

« La statistique est la première des sciences inexactes. »

Edmond et Jules de Goncourt

« La démocratie, ce curieux abus de la statistique. »

Jorge Luis Borges

« La raison d'être des statistiques, c'est de vous donner raison. »

Abe Burrow

« Il y a trois sortes de mensonges : les mensonges, les sacrés mensonges et les statistiques. »

Mark Twain

« Un enfant sur sept étant Chinois, nous nous sommes arrêtés à six. »

Marie-Lyse Aston

« Je ne crois aux statistiques que lorsque je les ai moi-même falsifiées. »

Winston Churchill

Un peu d'histoire

Le mot statistique, du latin « status », état, désignait à l'origine la collecte et l'évaluation des données concernant l'État.

Cette science de l'État était une représentation purement descriptive de faits géographiques et sociaux comme le climat, la population, les productions de matières premières, agricoles…Elle devait être une aide pour les dirigeants de l'État afin de prendre les bonnes décisions.

Exemples :

- L'empereur Yao (vers 2200 av. J.-C.) procédait à des enquêtes pour connaître les productions agricoles.
- L'empereur Auguste à Rome collectait des données pour le nombre de soldats ou le revenu des citoyens.
- L'astronome Johannes Kepler (1571- 1630) formula ses lois sur le mouvement des planètes en se basant sur des données statistiques mesurées par l'astronome danois Tsych Brahé (1546-1601).

De nos jours

La statistique a actuellement un rôle central dans le fonctionnement des États et dans l'économie. La Suisse est par exemple dotée d'un office fédéral dédié à la statistique (OFS) qui est basé à Neuchâtel et qui emploie plus de 800 personnes. Les données collectées et traitées touchent des domaines variés comme la démographie, l'écologie, l'économie, la santé, l'industrie, la politique…

La **statistique** est la *science* qui, à partir de l'observation de phénomène de masse, permet d'obtenir des informations fiables.

Cette science utilise principalement les méthodes de la statistique mathématique que l'on peut scinder en deux branches principales :

- la collecte de données et le traitement de celles-ci, appelée la **statistique descriptive** ;
- l'interprétation des données, appelée **l'inférence statistique**.

OBJECTIFS DES STATISTIQUES
Collecte des données Classement, synthèse et traitement Présentation et communication de l'information
Population ou échantillon ? Recensement > description échantillon > inférence (estimation et décision)
Tant pour l'étude d'une donnée quantitative ou les liens entre deux (ou plusieurs) variables

UTILITÉ DES STATISTIQUES
Décrire les variables et les relations qu'elles entretiennent Exemple : décrire le lien entre les notes en mathématiques au collège et au gymnase en utilisant un échantillon représentatif
Estimer la valeur des paramètres et prendre des décisions (avantages : coûts, situations paradoxales ou risquées)
Prévoir et éventuellement expliquer Exemple : Utiliser (ou non) la note du collège pour prédire la performance au gymnase

6.2 Vocabulaire

On appelle **population** l'ensemble de référence sur lequel vont porter les observations de la statistique. Un **individu** ou **unité statistique** désigne un élément de base de la population. Une population ne désigne pas forcément un ensemble de personnes. Le nombre d'individus est appelé l'**effectif** de la population.

Lorsque la population est trop nombreuse, on étudie un sous-ensemble représentatif de la population qu'on appellera **échantillon**.

On appelle **caractère** ou **variable statistique** (v.s) une caractéristique que l'on veut étudier sur la population.

Les valeurs possibles du caractère (v.s) sont appelées **modalités** ou **valeurs**. Le caractère (v.s) est **quantitatif** (ou **mesurable**) si les modalités sont des nombres et **qualitatif** sinon.

La liste des modalités prises par le caractère pour chaque individu de la population est appelée la **série statistique**.

On désignera un caractère (ou variable statistique) par une lettre majuscule X, Y ... et ses modalités par la même lettre en minuscule affectée d'un indice : x_1, x_2 ... pour le caractère X ou y_1, y_2 ... pour le caractère Y.

Exemple : On désire faire une statistique de la taille des élèves qui suivent une formation au gymnase dans le canton de Vaud.

- Population : tous les élèves inscrit.e.s dans les gymnases vaudois. Au 30 juin 2022, l'effectif de cette population était de $14'968$. [1]
- On pourra choisir un échantillon composé par exemple d'une classe par volée dans chaque gymnase.
- Un.e gymnasien.nne vaudois.e sera un individu de cette statistique.
- Le caractère est la taille et il est quantitatif.
- Modalités : nombres compris entre 140 et 210 cm

1. Source : Direction générale de l'enseignement postobligatoire (DGEP), https://www.vd.ch/

Exemple : On fait une étude statistique dans votre classe. On aimerait connaître le sexe, l'âge, la taille et choix langue I de chaque élève.

Population : Effectif :

Caractères (v.s)	Modalités	Type de modalité
X :		
Y :		
Z :		
U :		

6.3 Effectifs et fréquences

6.3.1 Étude d'une variable qualitative

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons aux variables statistiques qualitatives. C'est-à-dire celles dont les modalités ne sont pas des valeurs numériques (par exemple la couleur des yeux).

On considère une population d'effectif n et une variable statistique qualitative X. Cette variable aura des modalités x_1, x_2, ..., x_i, ...

Le nombre d'individus qui représentent la modalité x_i est appelé l'**effectif de la modalité** x_i. On le note n_i.

La **fréquence de la modalité** x_i, noté f_i est la proportion

$$f_i = \frac{n_i}{n} = \frac{\text{effectif de la modalité } x_i}{\text{effectif de la population}}$$

Exemple : On fait une étude statistique dans votre classe. On aimerait connaître le domicile de chaque élève. On peut représenter cette statistique dans un **tableau de distribution**.

Répartition des élèves de la classe selon .

Modalités x_i	Effectif n_i	Fréquence f_i	Fréquence en %
x_1 :			
x_2 :			
x_3 :			
x_4 :			
x_5 :			
x_6 :			
x_7 :			
x_8 :			
x_9 :			
x_{10} :			
Total			

Il est possible de représenter cette statistique sous forme graphique.

Diagramme en colonne ou histogramme

La hauteur de chaque colonne est proportionnelle à l'effectif ou à la fréquence de chaque modalité.

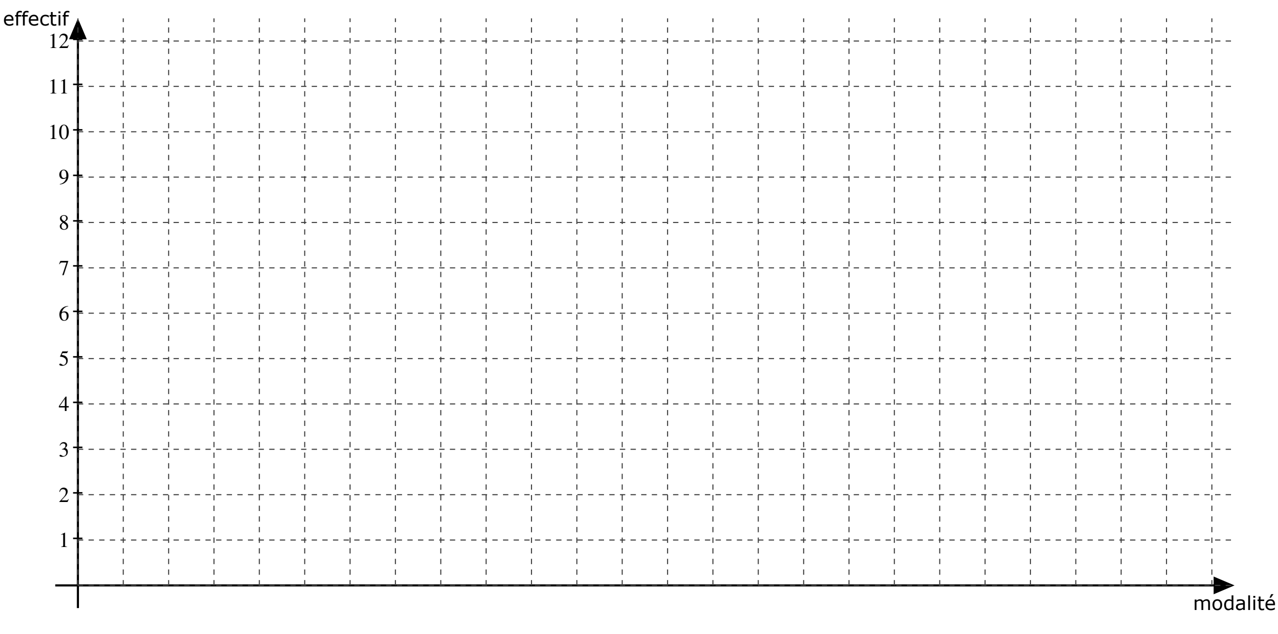
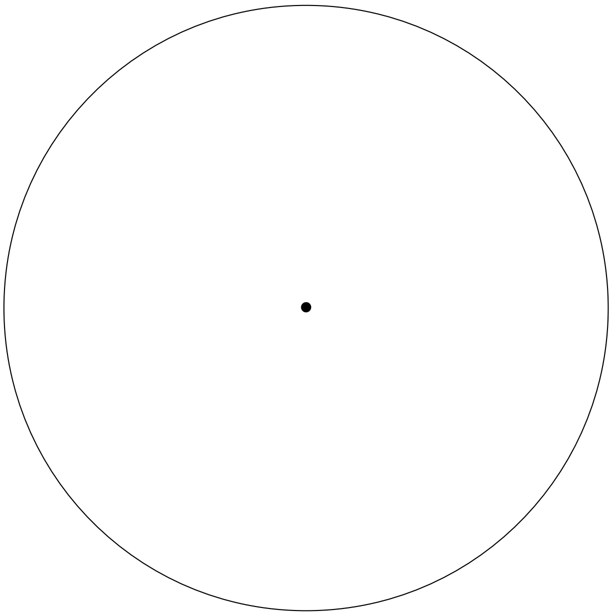


Diagramme en secteur (camembert)

L'aire de chaque secteur du cercle est proportionnelle à la fréquence de la modalité. L'angle du secteur est obtenu par le calcul : $f_i \cdot 360°$.



Modalités :

Il existe d'autres représentations graphiques, en connaissez-vous ?

Démarche pour étudier une variable qualitative

(I) Identifier toutes les modalités x_i du caractère (v.c) X étudié.

(II) Représenter l'effectif n_i de chaque modalité et sa fréquence dans un tableau de distribution.

(III) Représenter graphiquement la statistique dans un diagramme (histogramme, secteurs…).

Règles de présentation d'un tableau de distribution

- Le tableau porte un titre qui en évoque le contenu. On utilisera de préférence « Répartition des *(unités statistiques)* selon *(nom de la v.c)*. »
- La première colonne contient les modalités de la variable étudiée et a comme titre le nom de la variable.
- La deuxième colonne contient l'effectif de chaque modalité et a comme titre « Effectif de *(unités statistiques)* ».
- La dernière colonne contient la fréquence de chaque modalité et a comme titre « Fréquence de *(unités statistiques)* ».
- La dernière ligne donne les totaux de chaque colonne. Le total de la dernière colonne est forcément $1 = 100\%$ et celui de la colonne des effectifs doit donner l'effectif de la population.
- Si les données présentées sont tirées d'une recherche, il faut indiquer la source sous le tableau.

Remarques :

- Les fréquences peuvent être données sous forme de pourcentages, de fractions ou de nombres à virgule.
- Les fréquences données en pourcentages sont arrondies au dixième (éventuellement à l'unité).
- Il est également possible de présenter un tableau de distribution en ligne selon ce qui est le plus esthétique.

Exemple :

Répartition des élèves des gymnases vaudois en 2021-2022 selon leur type de formation.

Type de formation	Effectif d'élève	Fréquence en %
École de maturité	$9'708$	
École de culture générale	$3'651$	
École de commerce	$1'064$	
Maturités spécialisées	684	
Total		

(Source :Direction générale de l'enseignement postobligatoire (DGEP), https://www.vd.ch/)

Types de variables qualitatives

On distingue deux types de variables qualitatives selon s'il est possible d'ordonner leurs modalités.

On dira que la variable qualitative est **ordinale** si une relation d'ordre existe entre les modalités, sinon elle est dite **nominale**.

Lorsque la variable qualitative est ordinale, il est parfois utile de coder les caractères à l'aide de nombres. Cela n'en fait pas un caractère quantitatif, car on ne peut pas faire d'opération. Exemple : 1 pour janvier, 2 pour février, 3 pour mars, etc ($1+2=3$ n'a pas de sens).

Exemples :

- La variable « taille d'un T-shirt » qui prend les modalités XS, S, M, L, XL est une variable qualitative ordinale.
- La variable « couleur d'un T-shirt » qui prend les modalités « blanc », « noir », « bleu », « rouge » … est une variable qualitative nominale.

6.3.2 Étude d'une variable quantitative

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons aux variables statistiques quantitatives. C'est-à-dire celles qui ont des modalités numériques.

Si les modalités sont des nombres qui sont isolés les uns des autres, on dit que la variable qualitative est **discrète**. C'est le cas si les modalités sont des nombres entiers. Par contre, si les modalités peuvent prendre n'importe quelles valeurs contenues dans un intervalle de nombres réels, on dit que la variable quantitative est **continue**.

Exemples :

- La variable « nombre d'enfants dans une famille » est une variable quantitative discrète.
- La variable « taille d'un individu » est une variable quantitative continue.

La méthode pour étudier une variable quantitative dépendra si elle est discrète ou continue et le nombre de ses modalités.

Variable quantitative discrète avec peu de modalités

Lorsque la variable quantitative discrète comporte peu de modalités, on procédera de la même manière que pour une variable qualitative.

Exemple : Un prof de mathématiques veut étudier la répartition des notes des élèves d'une classe lors du dernier test.

Les modalités possibles sont $1\ 1{,}5\ 2\ 2{,}5\ 3\ 3{,}5\ 4\ 4{,}5\ 5\ 5{,}5\ 6$. C'est donc une variable quantitative discrète.

La série statistique est la liste des notes obtenues par les élèves de la classe :

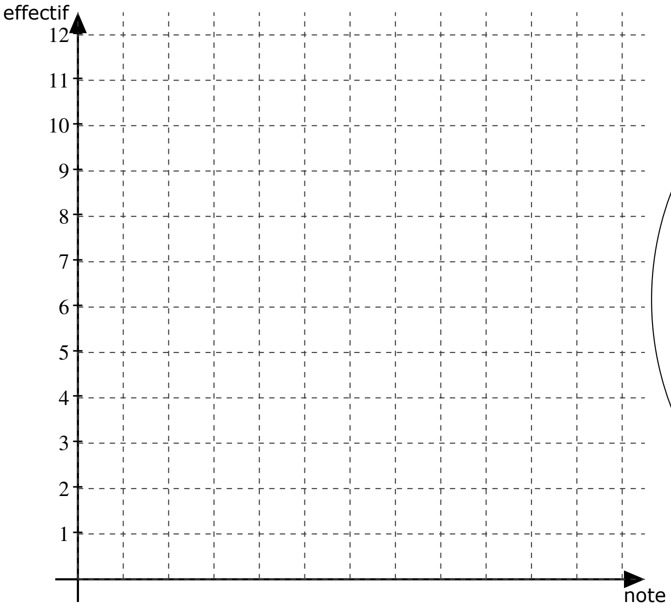
$$4{,}5\ 5\ 3{,}5\ 6\ 5\ 4{,}5\ 2{,}5\ 5{,}5\ 6\ 4{,}5\ 5{,}5\ 6\ 4\ 3{,}5\ 4\ 4{,}5\ 4\ 6\ 3\ 3{,}5$$

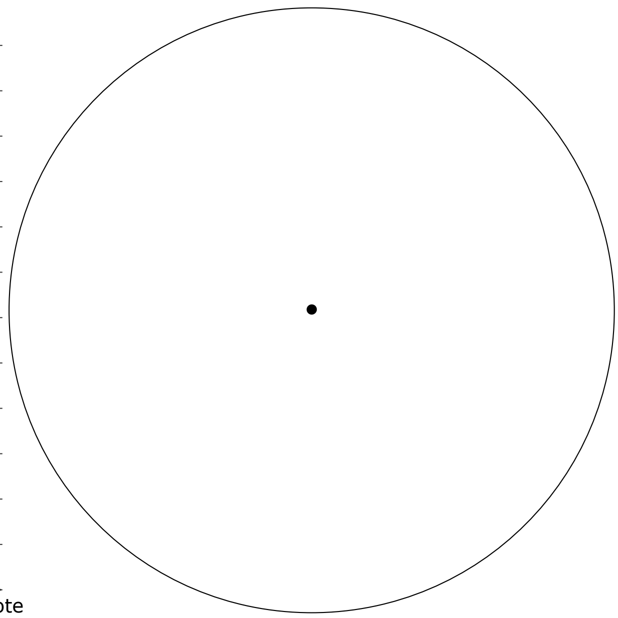
On peut faire un tableau de distribution.

Répartition des notes du dernier test de maths.

Note	Effectif	Fréquence en %
6		
5,5		
5		
4,5		
4		
3,5		
3		
2,5		
2		
1,5		
1		
Total		

On peut ensuite représenter la statistique graphiquement :





Variable quantitative discrète avec beaucoup de modalités ou continue.

Lorsque la variable quantitative discrète comporte beaucoup de modalités, on ne peut pas procéder de la même manière, car le tableau de distribution a trop de lignes et n’ai plus lisible.

Lorsqu’il y a beaucoup de modalités, l’astuce est de les regrouper par **classes**. Généralement les classes sont des intervalles numériques.

Pour les variables continues, on fait de même.

Exemple : On veut étudier la répartition des habitants d’une ville selon leur année de naissance.

Les modalités sont des nombres entiers, mais il y en a beaucoup (100).

Comment représenter intelligemment cette statistique ?

On peut par exemple choisir de regrouper les années de naissance par décennie :

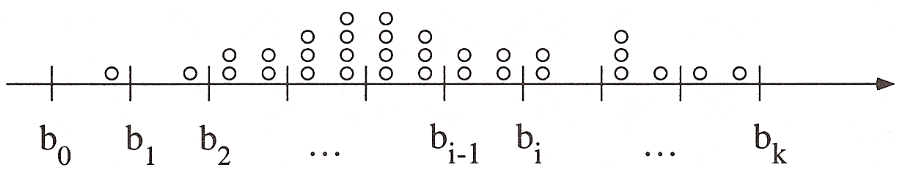
Répartition des habitants de la ville selon leur année de naissance.

Années de naissance	Effectif	Fréquence en %
2020 à 2029		
2010 à 2019		
2000 à 2009		
1990 à 1999		
1980 à 1989		
1970 à 1979		
1960 à 1969		
1950 à 1959		
1940 à 1949		
1930 à 1939		
1920 à 1929		
Total		

Le choix des classes n’est pas anodin. On peut biaiser une statistique selon la manière dont elles sont définies. Pour y voir plus clair, on définit les caractéristiques suivantes d’une classe :

- b_{i-1} est la **borne inférieure** de la i^e classe ;
- b_i est la **borne supérieure** de la i^e classe ;
- $c_i = \dfrac{b_i + b_{i-1}}{2}$ est le **centre** de la i^e classe (notation alternative : z_i) ;
- $L_i = b_i - b_{i-1}$ est la **largeur** ou **amplitude** de la i^e classe ;

Il faut également s’assurer que les classes ne se recoupent pas ; il ne faut pas qu’un individu appartienne à deux classes. Ainsi l’intervalle de la classe doit être semi-ouvert $[b_{i-1}\,;b_i[$.



Remarque : Par la suite, pour les variables quantitatives continues, nous désignerons les classes par leur centre c_i.

Exemple : On veut étudier la statistique de la taille en cm des employés d'une entreprise.

Les données brutes rangées dans l'ordre croissant sont :

142,4	162,1	172,1	178,3	181,2	188,5
148,7	163,4	172,3	178,5	181,4	189,1
151,5	165,1	172,7	179	182,1	190,3
153,6	165,2	173,4	179,2	183,5	191,4
156,1	166,3	175,2	179,6	184,2	192,5
158,2	167,1	175,3	179,8	186,1	193,3
159,8	170,3	176,1	180,2	187,2	196,2
160,5	171,1	177,2	180,4	188,3	197,1
161,3	171,2	177,4	180,9	188,4	205,2

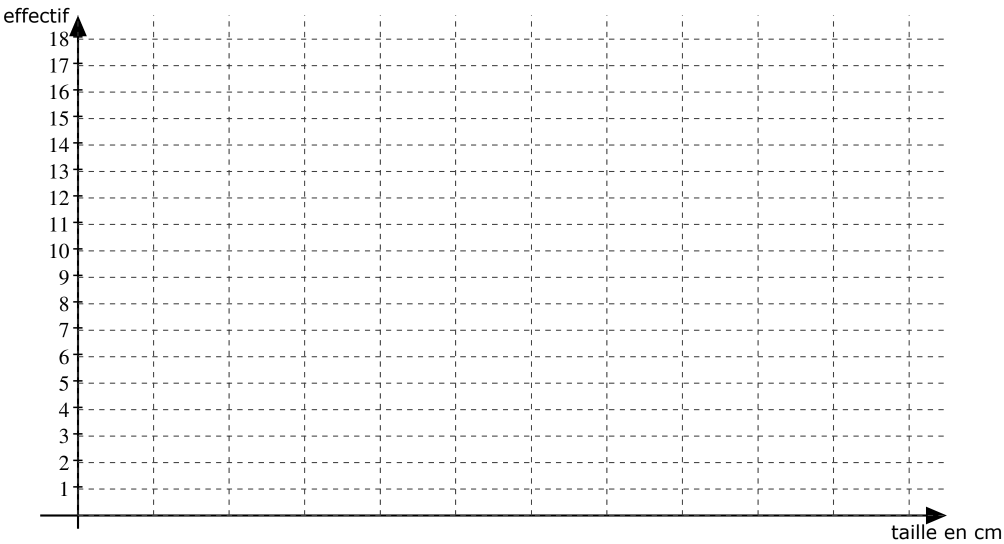
Pour représenter cette statistique, on peut grouper par classe de 10 cm de largeur avec une valeur minimale de 140 cm.

Répartition des employés selon leur taille en cm.

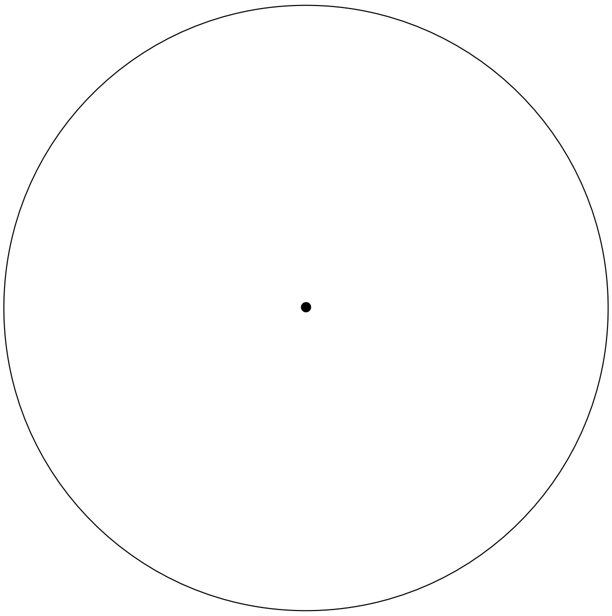
Taille en cm	z_i en cm	L_i en cm	Effectif	Fréquence en %
$[140\,;150[$				
Total				

Pour représenter graphiquement cette statistique, on peut faire un histogramme ou chaque colonne représentera une classe. Sur l'axe horizontal, on notera le centre de chaque classe. L'aire de chaque colonne doit être proportionnelle à l'effectif de la classe.

Sur la partie supérieure de chaque colonne, on peut dessiner le point représentant le centre de la classe. En reliant ces points, on obtient le polygone des effectifs.



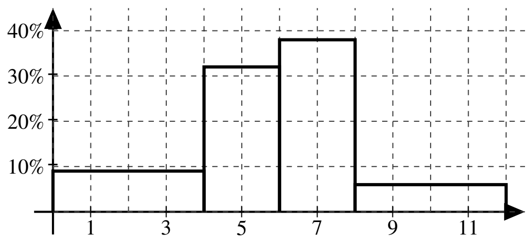
On peut toujours représenter les données graphiquement par un diagramme en secteurs. L'aire (ou l'angle) de chaque secteur doit être proportionnelle à l'effectif de la classe correspondante.



Remarques :

- Les classes peuvent avoir des largeurs constantes ou variables.
- Dans le cas de largeur constante, on fixe cette largeur en considérant l'étendue des données et le nombre de classes.
- Dans le cas de largeurs variables, on choisit souvent des classes de largeur égale au centre de la distribution et des classes de largeurs inégales à ses extrémités. On peut également choir les classes en fonctions de ce que l'on veut montrer au travers de l'étude statistique. Par exemple, lors d'études de populations, on regroupe souvent les classes d'âges des citoyens selon leur capacité à travailler : « Enfants » : $[0;18[$, « Actifs » : $[18;65[$, « Retraités » : $[65;120[$.
- Sur l'histogramme des fréquences, l'aire de chaque rectangle est proportionnelle à la fréquence de la classe correspondante. Ce principe doit être respecté si les largeurs des classes sont inégales.

	x_i	n_i	f_i [%]
$[0;4[$	2	9	18
$[4;6[$	5	16	32
$[6;8[$	7	19	38
$[8;12[$	10	6	12



- Le premier point, respectivement le dernier point, du polygone des effectifs (ou fréquence) est situé sur l'axe horizontal et au centre d'une classe fictive qui précède la première classe, respectivement qui suit la dernière classe, et de largeur identique à ladite classe.

6.4 Fréquences cumulées

On accompagne fréquemment le tableau de distribution d'une variable statistique continue de deux colonnes indiquant les **fréquences cumulées croissantes** et **décroissantes**. On les note respectivement F_i et F_i'. La fréquence cumulée croissante (respectivement décroissante) d'une classe est la somme des fréquences de toutes les classes qui lui sont inférieures ou égales (respectivement supérieures ou égales).

Exemple : Les membres d'un club de pêche ont noté la longueur des poissons pêchés ce jour-là.

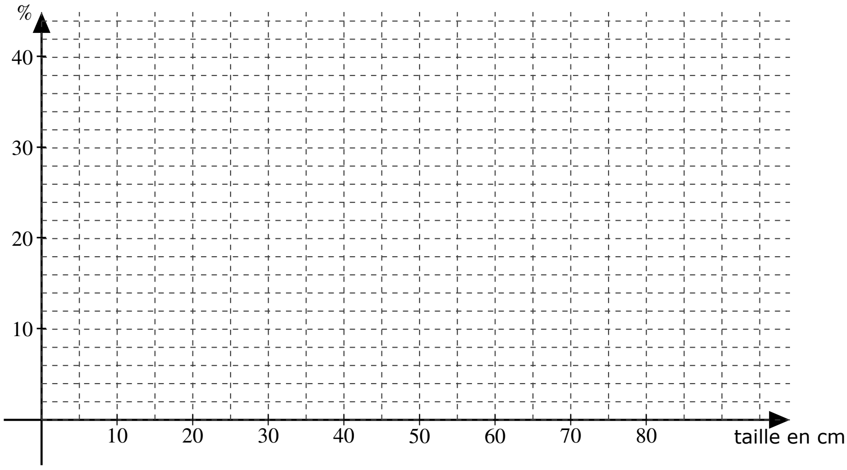
12	17	21	24	24	28	29	34	12	18
21	24	25	28	29	34	13	18	22	24
27	28	29	36	14	18	22	24	27	28
31	38	15	20	22	24	27	29	32	39
16	20	23	24	27	29	32	39	16	20
23	24	27	29	32	39	17	21	23	24
27	29	34	56						

Pour analyser ces variables statistiques continues, nous faisons 6 classes de largeur $L_i = 5$ et avec $b_0 = 10$. Nous terminons par une 7ᵉ classe de largeur $L_7 = 20$.

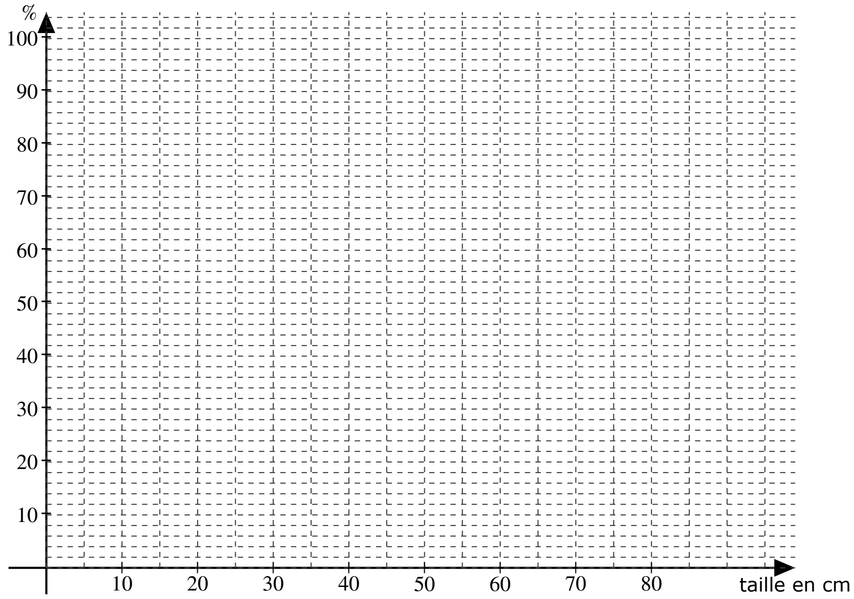
Répartition des poissons pêchés selon leur taille en cm.

Taille en cm	c_i en cm	L_i en cm	Effectif	Fréquence en %	F_i Fréquence cumulée croissante en %	F_i' Fréquence cumulée décroissante en %
$[10;15[$	$12,5$	5	4			
$[15;20[$	$17,5$					
$[20;25[$						
$[25;30[$						
$[30;35[$						
$[35;40[$						
$[40;60[$						
Total						

Histogramme des fréquences et polygone des fréquences



Polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.



Remarque : Pour construire le polygone des fréquences cumulées croissantes ou décroissantes, les points sont situés sur la borne de droite de chaque classe.

6.5 Mesures de tendance centrale

Les **critères de position** d'un ensemble de valeurs numériques d'un caractère statistique donné sont des valeurs que l'on peut calculer et qui permettent de caractériser la position globale de cet ensemble.

On les appelle **mesures de tendance centrale** ou **valeurs centrales**. Celles que nous allons utiliser sont, par exemple, la moyenne, le mode, la médiane ou les quantiles (quartiles, déciles).

6.5.1 Mode et classe modale

Dans le cas d'une série d'une variable qualitative X, ou quantitative discrète, le **mode** est la modalité (valeur) du caractère qui a le plus grand effectif. On le note X_0.

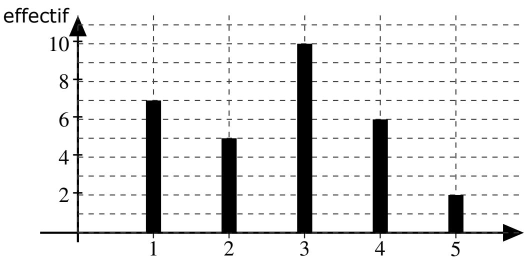
Dans le cas d'une série regroupée en *classes d'égale amplitude*, la **classe modale** est la classe ayant le plus grand effectif.

Il arrive parfois qu'une variable statistique possède plusieurs modes ou plusieurs classes modales, dans ce cas on dit qu'elle est **plurimodale**.

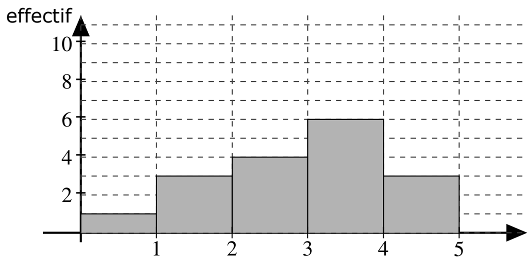
À l'intérieur d'une classe modale $[b_i\,;b_{i-1}]$, on situe le mode proportionnellement aux différences d'effectifs (ou de fréquences) de la classe modale et de ses classes voisines :

$$X_0 = b_{i-1} + \frac{n_i - n_{i-1}}{(n_i - n_{i-1}) + (n_i - n_{i+1})} \cdot L_i$$

Exemples : Les digrammes en barres et histogrammes ci-dessous représentent des séries statistiques. Quelles sont les modes ou classes modales de chacune d'elles ?

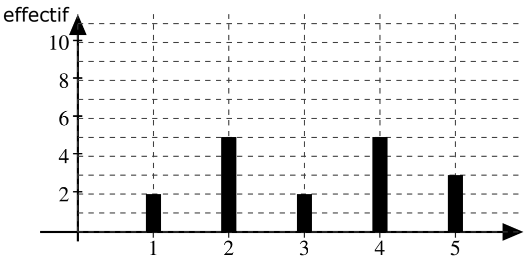


Mode :

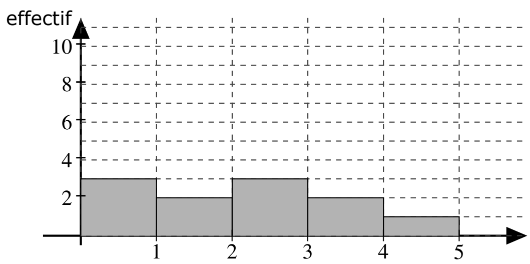


Classe modale :

Mode :



Mode :



Classe modale :

Mode :

6.5.2 Médiane

La **médiane** (notée M, Me ou Med) partage la population de la série en deux parties de population égale de telle sorte qu'au moins 50% des individus prennent une valeur inférieure ou égale à la médiane et au moins 50% des individus prennent une valeur supérieure ou égale à la médiane.

La médiane d'une **variable discrète** est donc la première modalité dont la fréquence cumulée croissante atteint ou dépasse 50%.

Exemple : Compléter le tableau puis déterminer le mode et la médiane.

Répartition des élèves selon la note obtenue au test de maths.

Note x_i	n_i	f_i en %	F_i en %
1	1		
2	2		
3	5		
4	7		
5	8		
6	2		
Total	25		

Médiane :

Toujours dans le cas d'une **variable discrète**, on peut calculer la médiane sans passer par les fréquences cumulées. On range la série par ordre croissant des valeurs et on observe l'effectif total n.

- Si l'effectif total n est *impair*, la médiane est obtenue pour la valeur de rang $\frac{n+1}{2}$.

  Exemple : série de 13 notes 2 / 2 / 3,5 / 3,5 / 4 / 4 / **4,5** / 5 / 5,5 / 5,5 / 5,5 / 6 / 6

  Médiane = 7^{e} terme = 4,5

- Si l'effectif total n est *pair*, la médiane est la moyenne des valeurs de rangs $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}+1$.

  Exemple : série de 12 notes 2 / 2 / 3,5 / 4 / 4 / **4,5** / **5** / 5,5 / 5,5 / 6 / 6 / 6

  Médiane = moyenne des 6^{e} et 7^{e} termes = $\dfrac{4,5+5}{2}=4,75$

Dans le cas d'une série dont les données sont regroupées en **classes**, on commence par déterminer la première classe d'indice i, où la fréquence cumulée atteint ou dépasse 50%, appelée **classe médiane**. Puis, la médiane se calcule dans celle-ci de la manière suivante :

$$\boxed{\text{Médiane} = M = b_{i-1} + \frac{0,5 - F_{i-1}}{f_i} \cdot L_i}$$

Exemple : Compléter le tableau puis calculer le mode et la médiane.

Répartition des employés selon leur taille en cm.

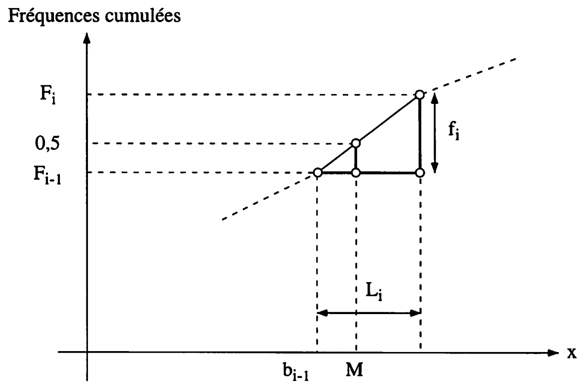
Taille en cm	c_i en cm	n_i	f_i en %	F_i en %
$[140;150[$	145	2	$3,7$	$3,7$
$[150;160[$	155	5	$9,3$	
$[160;170[$	165	8	$14,8$	
$[170;180[$	175	18	$33,3$	
$[180;190[$	185	14	$25,9$	
$[190;200[$	195	6	$11,1$	
$[200;210[$	205	1	$1,9$	
Total		54	100	

Exemple : Déterminer la médiane de l'exemple des poissons de la page 35.

Justification de la formule :

Grâce aux fréquences cumulées, on a déterminé la classe dans laquelle la médiane se trouve.

Pour la calculer plus précisément, on imagine que la fréquence cumulée augmente régulièrement au sein de la classe. Sur notre intervalle $[b_{i-1}\,;b_i[$, on part donc de F_{i-1} pour arriver à F_i. La médiane est l'abscisse du point correspondant à une fréquence cumulée croissante de 50%.



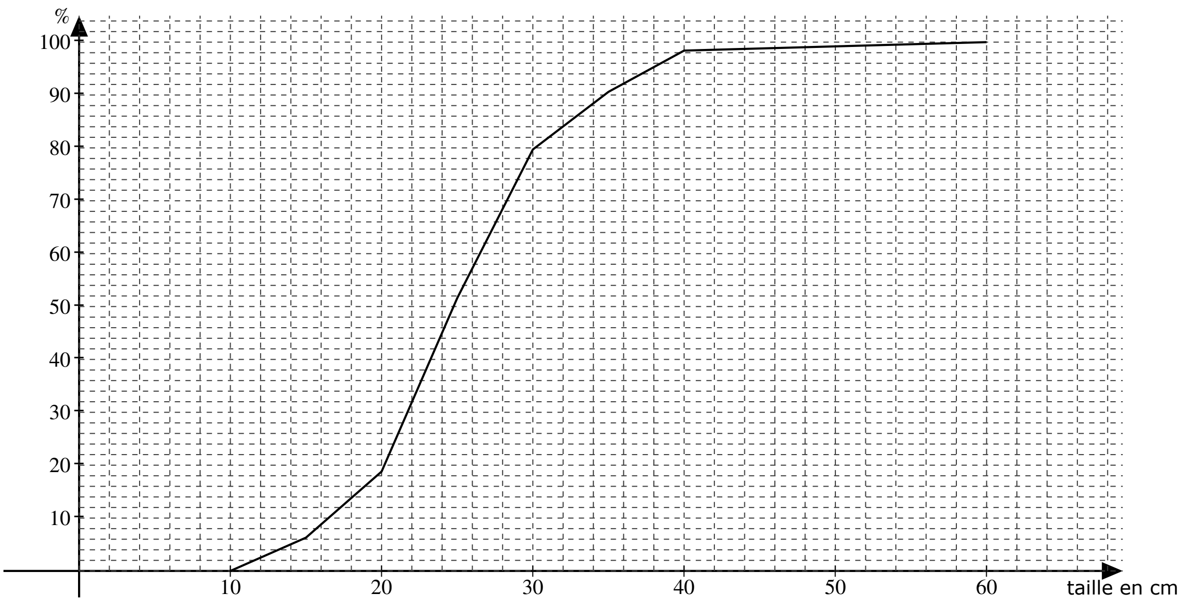
En observant le dessin ci-dessus, on constate que les mesures des côtés des triangles sont proportionnelles. Donc :

$$\frac{M-b_{i-1}}{\underbrace{b_i-b_{i-1}}_{L_i}}=\frac{0{,}5-F_{i-1}}{\underbrace{F_i-F_{i-1}}_{f_i}}$$

Il n'y a plus qu'à isoler M pour obtenir la formule.

Exemple : Le graphique ci-dessous représente le polygone des fréquences cumulées croissantes de l'exemple précédent.

Par construction géométrique, trouver la médiane.



Remarque : La médiane se situe à l'intersection des polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

6.5.3 Moyenne

La **moyenne** $\bar{x}$, μ ou $\overline{X}$, d'une **variable statistique quantitative** X est la somme de toutes les données divisée par l'effectif total n :

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}}$$

Exemple : Notes d'un test où 2 élèves ont triché : 1 / 1 / 4 / 4 / 4 / 4,5 / 5 / 5 / 5 / 5 / 5 / 5

a) En observant ces résultats, quelle est votre impression sur la difficulté du test ?

b) Calculer la moyenne.

c) Déterminer le mode.

d) Calculer la médiane.

e) Comparer ces indicateurs avec votre impression initiale.

Pour une variable quantitative discrète prenant les valeurs de x_1 à x_p dont on connaît les effectifs n_i (ou les fréquences f_i), la moyenne se calcule de la manière suivante :

$$\boxed{\bar{x} = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + ... + n_p \cdot x_p}{n}}$$

donc $\bar{x} = \frac{n_1}{n} \cdot x_1 + \frac{n_2}{n} \cdot x_2 + ... + \frac{n_p}{n} \cdot x_p$, ce qui donne la formule :

$$\boxed{\bar{x} = f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + ... + f_p \cdot x_p}$$

Dans le cas d'une variable quantitative continue dont les données sont regroupées en classes, on utilise les centres c_i des classes choisies.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{n_1 \cdot c_1 + n_2 \cdot c_2 + ... + n_p \cdot c_p}{n} = f_1 \cdot c_1 + f_2 \cdot c_2 + ... + f_p \cdot c_p}$$

Exemples : Calculer la moyenne pour les séries ci-dessous puis comparer avec la médiane.

a)

Répartition des élèves selon la note obtenue au test de maths.

Note x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	f_i en %	$f_i \cdot x_i$
1	1		4	
2	2		8	
3	5		20	
4	7		28	
5	8		32	
6	2		8	
Total	25		100	

b)

Répartition des poissons pêchés selon leur taille en cm.

Taille en cm	c_i en cm	L_i en cm	Effectif	Fréquence en %	$f_i \cdot c_i$
$[10;15[$	12,5	5	4	6,3	
$[15;20[$	17,5	5	8	12,5	
$[20;25[$	22,5	5	21	32,8	
$[25;30[$	27,5	5	18	28,1	
$[30;35[$	32,5	5	7	10,9	
$[35;40[$	37,5	5	5	7,8	
$[40;60[$	50	20	1	1,6	
Total			64	100	

Remarque : Lorsque les valeurs extrêmes, maximum ou minimum, semblent douteuses, ou ne rentrent pas dans le cadre de l'étude, on peut faire un calcul de moyenne élaguée en les retirant de la série.

En effet, la moyenne est sensible aux valeurs extrêmes ou aberrantes. Elles peuvent donc fausser l'interprétation des résultats.

Exemple : Dans une entreprise, 9 salariés sont payés CHF $2000.–$ mensuels. Le patron se paie CHF $22'000.–$ mensuels.

Dans ces conditions, la moyenne est une valeur non représentative :

$$\bar{x} = \frac{9 \cdot 2000 + 22'000}{10} = 4000$$

Pour éviter ce genre de biefs, il arrive que l'on tronque volontairement la population et qu'on élimine 10% des valeurs les plus basses et 10% des valeurs les plus hautes.

6.5.4 Quartiles

Les **trois quartiles**, notés Q_1, Q_2, Q_3 sont les valeurs d'un caractère quantitatif qui partage l'effectif total de la population en **quatre groupes égaux**. Q_2 est par conséquent la médiane.

Le 1er **quartile** noté Q_1 partage la population en deux parties de telle sorte qu'au moins 25% des individus prennent une valeur inférieure ou égale à Q_1 et au moins 75% des individus prennent une valeur supérieure ou égale à Q_1.

Il suffit d'échanger les valeurs en pourcentages pour la définition de Q_3.

Pour déterminer Q_1 et Q_3, on procède de la même manière que pour la médiane :

- si $n = 4p$ (multiple de 4)

  Exemple : série de 12 notes : 4, 5, 7, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 11, 13, 16

- si $n = 4p + 1$ (multiple de 4 $+1$)

  Exemple : série de 13 notes 4, 5, 7, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 11, 12, 13, 16

- si $n = 4p + 2$ (multiple de 4 $+2$)

  Exemple : série de 14 notes 4, 5, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 12,13, 16

- si $n = 4p + 3$ (multiple de 4 $+3$)

  Exemple : série de 15 notes 4, 5, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11,11, 12, 13, 16

Dans le cas d'une **variable quantitative continue**, on adaptera la formule de la médiane pour le calcul des quartiles. On commence par trouver la classe i contenant le quartile qui nous intéresse. Puis on calcule :

$$\boxed{Q_1 = b_{i-1} + \frac{0{,}25 - F_{i-1}}{f_i} \cdot L_i} \qquad \boxed{Q_3 = b_{i-1} + \frac{0{,}75 - F_{i-1}}{f_i} \cdot L_i}$$

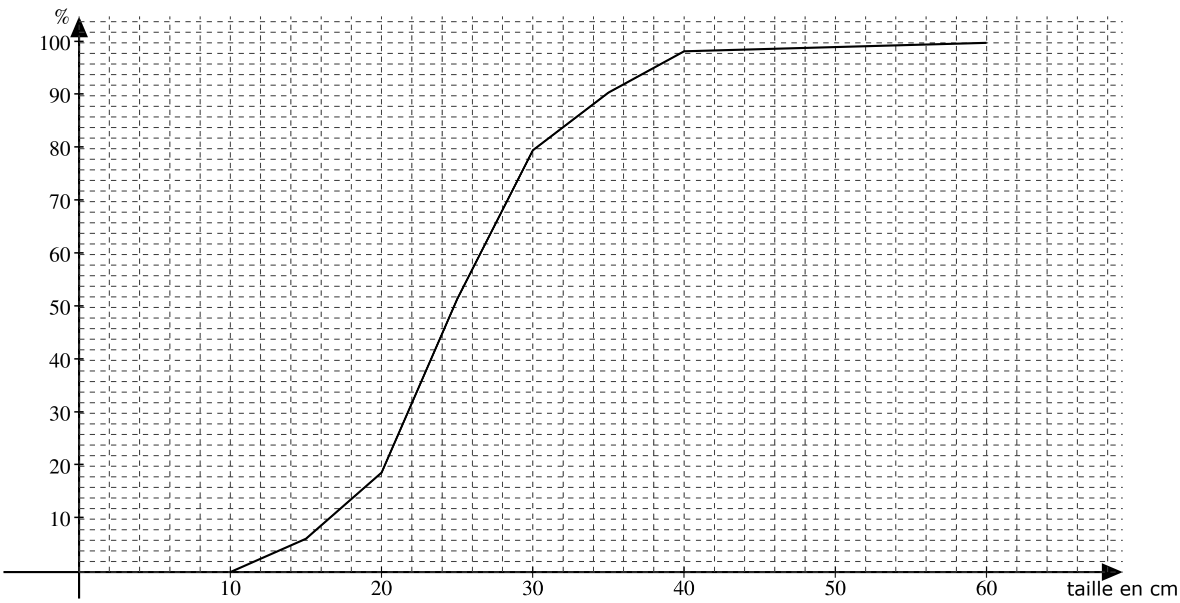
Remarque : En utilisant les mêmes principes, on peut également partager la population en dix parties égales, appelées **déciles**, ou en cent parties égales, appelée **centiles**.

Exemple : Calculer les quartiles de cette série.

Répartition des poissons pêchés selon leur taille en cm.

Taille en cm	c_i en cm	L_i en cm	Effectif	Fréquence en %	F_i Fréquence cumulée croissante en %
$[10;15[$	12,5	5	4	6,3	6,3
$[15;20[$	17,5	5	8	12,5	18,8
$[20;25[$	22,5	5	21	32,8	51,6
$[25;30[$	27,5	5	18	28,1	79,7
$[30;35[$	32,5	5	7	10,9	90,6
$[35;40[$	37,5	5	5	7,8	98,4
$[40;60[$	50	20	1	1,6	100
Total			64	100	

Retrouver les valeurs des quartiles par construction dans le graphique ci-dessous.



6.6 Indicateurs de dispersion

Après avoir calculé les mesures de tendance centrale, on peut chercher à déterminer la dispersion des valeurs du caractère statistique autour de celles-ci.

Exemple : Deux élèves X et Y ont rendu chacun 5 devoirs. Considérons les séries statistiques qui, à chaque devoir, associent une note obtenue sur 20.

Élève X : 8 ; 10 ; 12 ; 15 ; 16. Élève Y : 3 ; 12 ; 12 ; 15 ; 19.

Calculer les moyennes et médianes pour chaque élève. Que se passe-t-il ?

Et pourtant, un simple coup d'œil sur les valeurs des séries statistiques permet de dire que la série Y est plus ………………………………… que la série X.

Pour décrire une série statistique, en plus des caractéristiques de position, on considèrera les **caractéristiques de dispersion**.

6.6.1 Étendue

On appelle **étendue**, notée E, d'une série statistique la différence entre la plus grande valeur, X_{max}, et la plus petite valeur, X_{min}, du caractère.

$$\boxed{E = X_{max} - X_{min}}$$

Elle donne une première indication sur l'ordre de grandeur des valeurs de la série. Mais elle reste très limitée, surtout si les valeurs extrêmes sont très éloignées des valeurs centrales.

6.6.2 Interquartile

L'écart interquartile est la différence entre le troisième et le premier quartile.

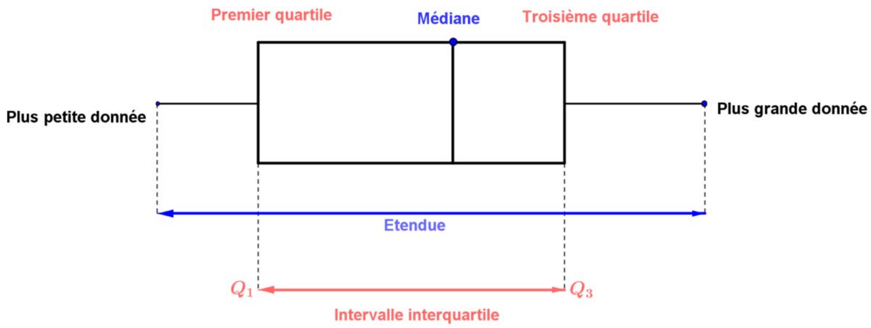
$$\boxed{\text{écart interquartile} = I = Q_3 - Q_1}$$

Exemple : Donner l'étendue et l'écart interquartile pour les deux séries de notes des élèves X et Y.

6.6.3 Boîte à moustaches

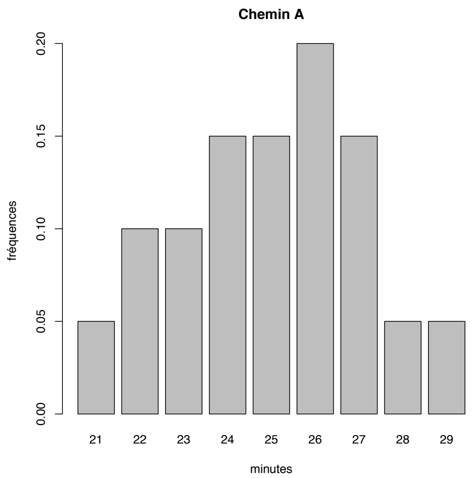
On appelle **boîtes à moustaches** ou **résumé en cinq points** la représentation synthétique donnant les informations suivantes : la médiane, le premier et le troisième quartile et les valeurs extrêmes.

- Les boîtes s'étendent de Q_1 à Q_3,
- la ligne en gras marque la médiane,

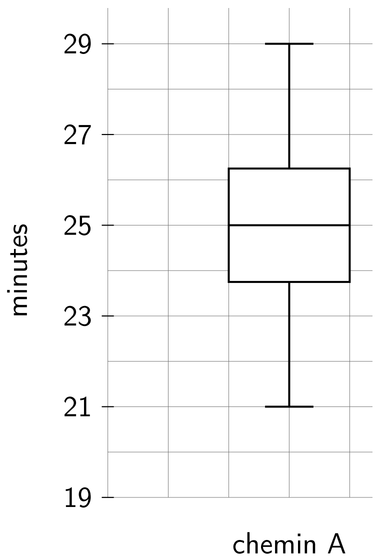


Exemple :

											moyennes
Chemin A	26	25	24	25	23	28	23	24	29	26	
	24	27	21	22	26	27	22	25	27	26	25



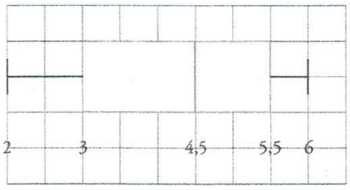
Boîte à moustache :



21 22 22 23 23 24 24 24 25 25 | 25 26 26 26 26 27 27 27 28 29

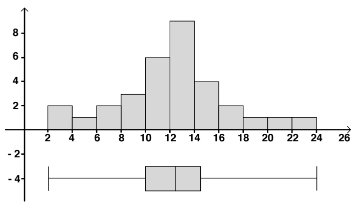
$$\text{Médiane} = \frac{25+25}{2} = 25 \qquad Q_1 = \frac{23+24}{2} = 23{,}5 \qquad Q_3 = \frac{26+27}{2} = 26{,}5$$

Exemple :



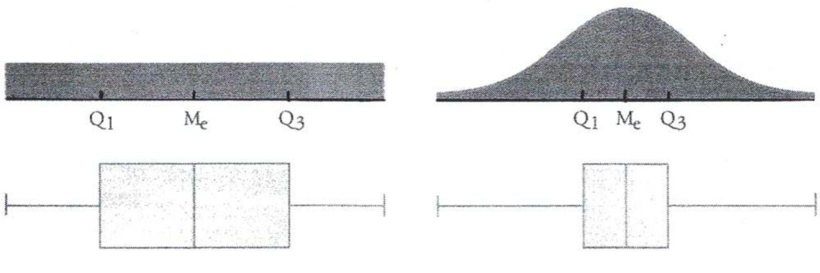
Cette boîte à moustache fournit les informations suivantes :

- La moins bonne note est 2. La meilleure note est 6.
- 25% des élèves ont fait une note inférieure ou égale à 3.
- La moitié des élèves ont fait $4{,}5$ ou moins.
- 75% des élèves ont fait une note inférieure ou égale à $5{,}5$.
- 50% des élèves ont fait une note entre 3 et $5{,}5$.



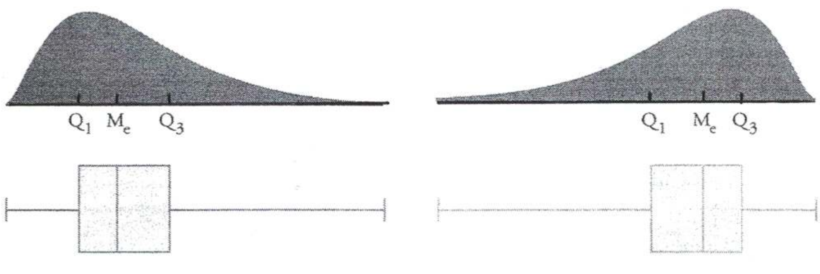
La boîte à moustaches permet une bonne visualisation de la zone centrale de la série et de la dispersion. Ce diagramme permet d'avoir une vue d'ensemble de la répartition de la série statistique. Il est surtout intéressant lorsque l'on veut comparer des études statistiques différentes d'un même caractère : on compare alors leurs diagrammes en boîte. (exemple : étude des différents types de voitures garées sur un parking le lundi, même étude le mardi).

Plus une boîte à moustache est rétrécie, plus la distribution est « pointue », l'effectif est concentré autour de la médiane. Plus elle est étendue, plus la distribution est aplatie, l'effectif est réparti sur toutes les valeurs.



uniforme en forme de cloche

La boîte à moustache permet de voir si la distribution est asymétrique et vers quelle valeur elle se regroupe.



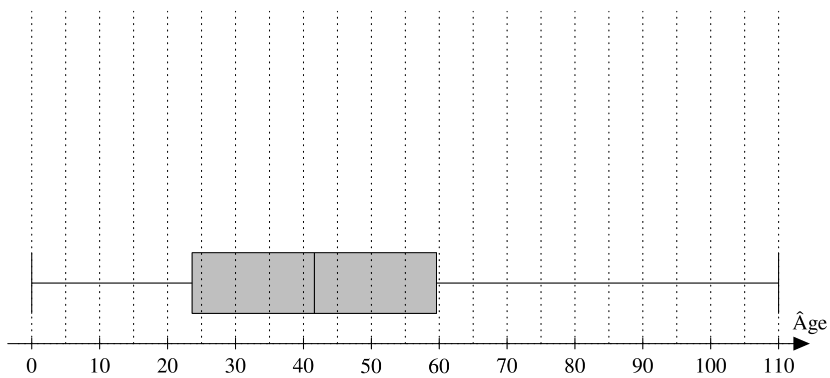
asymétrie à droite asymétrie à gauche

Exemple : Le tableau ci-dessous recense la population de la Suisse par tranche d'âge en 2007 (en milliers) :

Âge	Population masculine	Population féminine	f_i masculine	F_i masculine
[0 ; 15[	605,3	571,4	0,162	0,162
[15 ; 30[	703,0	687,5	0,189	0,351
[30 ; 45[	875,6	871,2	0,235	0,586
[45 ; 60[	798,4	790,0	0,214	0,800
[60 ; 75[	520,4	569,3	0,140	0,940
[75 ; 90[	209,1	333,7	0,056	0,996
[90 ; 110[	15,1	43,3	0,004	1,000
Totaux	3726,9	3866,4	1,000	

(source: Office fédéral de la statistique OFS)

Compléter ce diagramme en « boîte à moustaches » représentant la population féminine en ajoutant celle de la population masculine et comparer ces 2 distributions.



6.6.4 Variance

En statistique et probabilité, la **variance**, notée σ^2, $\sigma^2(X)$ ou $V(X)$, est une mesure arbitraire servant à caractériser la dispersion d'une distribution ou d'un échantillon.

L'utilisation des valeurs absolues est souvent une impasse en mathématique. Pour rendre positifs les écarts, un autre outil est à notre disposition : la mise au carré. On ne va donc pas calculer la moyenne des écarts, mais la moyenne des carrés des écarts. C'est ce qu'on appelle la variance :

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{n_1(x_1-\bar{x})^2 + n_2(x_2-\bar{x})^2 + ... + n_p(x_p-\bar{x})^2}{n}}$$

Dans le cas d'un échantillon discret, les valeurs x_i sont les modalités.

Dans le cas d'un échantillon dont les données sont regroupées en classes, les valeurs c_i représentent les centres des classes choisies.

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{n_1(c_1-\bar{x})^2 + n_2(c_2-\bar{x})^2 + ... + n_p(c_p-\bar{x})^2}{n}}$$

La disparition des valeurs absolues permet des calculs plus simples, mais il en reste néanmoins beaucoup à faire pour arriver au résultat.

On économise beaucoup de calculs en utilisant la formule suivante :

$$\boxed{\sigma^2 = f_1 \cdot x_1^2 + f_2 \cdot x_2^2 + ... + f_p \cdot x_p^2 - \bar{x}^2}$$

Exemple : Déterminer de deux manières différentes la variance de cet échantillon de tailles :

Répartition des employés selon leur taille en cm.

$[b_{i-1};b_i[$	x_i	n_i	f_i en %	F_i en %	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
$[140;150[$	145	2	3,7	3,7	5,365	
$[150;160[$	155	5	9,3	13,0	14,415	
$[160;170[$	165	8	14,8	27,8	24,420	
$[170;180[$	175	18	33,3	61,1	58,275	
$[180;190[$	185	14	25,9	87,0		
$[190;200[$	195	6	11,1	98,1		
$[200;210[$	205	1	1,9	100		
Total		54	1	-	175,8	

Ces formules étaient surtout utiles dans le cadre de calculs à la main ; l'usage des ordinateurs les rend un peu obsolètes...

Démonstration de la formule :

$$\sigma^2 = \frac{n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+...+n_p(x_p-\bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{n_1(x_1^2-2x_1\bar{x}+\bar{x}^2)+n_2(x_2^2-2x_2\bar{x}+\bar{x}^2)+...+n_p(x_p^2-2x_p\bar{x}+\bar{x}^2)}{n}$$

$$= \frac{n_1x_1^2+n_2x_2^2+...+n_px_p^2}{n}-\frac{2n_1x_1\bar{x}+2n_2x_2\bar{x}+...+2n_px_p\bar{x}}{n}+\frac{n_1\bar{x}^2+n_2\bar{x}^2+...+n_p\bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{n_1}{n}x_1^2+\frac{n_2}{n}x_2^2+...+\frac{n_p}{n}x_p^2-2\bar{x}\frac{n_1x_1+n_2x_2+...+n_px_p}{n}+\bar{x}^2\frac{n_1+n_2+...+n_p}{n}$$

$$= f_1x_1^2+f_2x_2^2+...+f_px_p^2-2\bar{x}\cdot\bar{x}+\bar{x}^2\cdot 1$$

$$= f_1x_1^2+f_2x_2^2+...+f_px_p^2-2\bar{x}^2+\bar{x}^2$$

$$= f_1x_1^2+f_2x_2^2+...+f_px_p^2-\bar{x}^2$$

6.6.5 Écart-type

L'**écart-type** est une autre mesure de dispersion d'une série de valeurs autour de leur moyenne.

Les écarts-types connaissent de nombreuses applications. En théorie des sondages, on utilisera l'écart-type d'un échantillon choisi au hasard pour évaluer la dispersion de la population tout entière. En physique, on s'en sert pour calculer l'erreur de mesure. En finance, l'écart-type est une mesure de la volatilité d'un actif.

De manière plus générale, il est important de savoir si les valeurs sont groupées ou au contraire dispersées, ce qui indique si la population est uniforme ou pas vis-à-vis du critère testé.

En raison de la mise au carré des écarts, l'unité de la variance est le carré de celle du caractère (si le caractère est en kg, sa moyenne est en kg, mais sa variance est en kg^2) d'où l'impossibilité d'additionner la moyenne et la variance.

On a donc défini l'**écart-type**, noté σ ou $\sigma(X)$, comme étant la racine carrée de la variance. Son unité est donc la même que celle de la moyenne. Cela a l'air anecdotique, mais la possibilité d'additionner moyenne et écart-type est fondamentale, en particulier pour le calcul d'intervalle de confiance (voir plus bas).

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma^2}}$$

Exemple : Calculer la moyenne, le mode, la médiane et l'écart-type pour les résultats de chacune de ces deux classes. Représenter les notes par un diagramme en colonnes et une boîte à moustaches. Comparer tous ces résultats.

classe 1 :

x	1	2	3	4	5	6
nb d'élèves	0	0	1	10	1	0

classe 2 :

x	1	2	3	4	5	6
nb d'élèves	0	3	3	3	3	3

Propriétés de l'écart-type :

- L'écart-type est toujours positif. Il est nul si la série statistique est constante.

- **Sensibilité aux valeurs extrêmes :**
  Comme la moyenne, l'écart-type est sensible aux valeurs extrêmes ou aberrantes et il est parfois nécessaire d'éliminer ces valeurs avant de faire le calcul de l'écart-type.

6.6.6 La cote Z

La cote Z permet de situer une donnée par rapport aux autres données d'une série statistique. L'exemple suivant va nous aider à comprendre cette notion.

Exemple : Un employeur désire engager un étudiant pour l'été afin qu'il l'aide à terminer une étude de marché. Comme le travail requiert des connaissances en statistique, il décide de choisir la personne la plus performante parmi les quatre candidats qui ont suivi un cours de statistique et qui ont brillé chacun dans leur classe. Voici les résultats des 4 candidats.

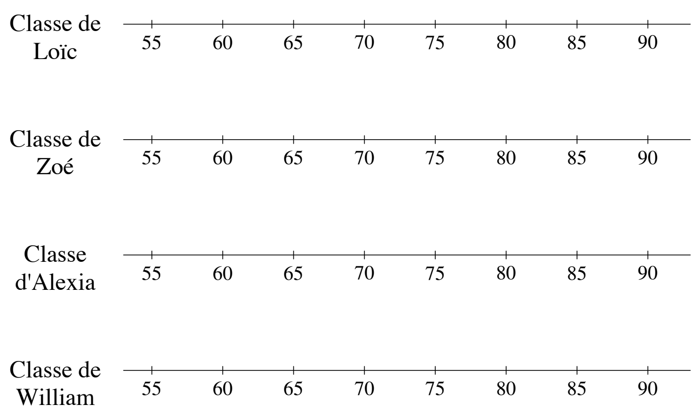
Candidat	Note	Moyenne de classe	Écart-type de la classe
Loïc	85	75	10
Zoé	76	70	3
Alexia	70	60	4
William	75	80	5

Si l'employeur se fie à la note seulement, quel devrait être son choix ?

S'il considère en plus les moyennes de classe ?

Et s'il tient compte de la note, de la moyenne et de l'écart-type, qui devrait-il embaucher ?

Pour mieux comprendre, représentons sur les diagrammes suivants la moyenne de classe et l'écart-type et la note de l'étudiant(e).



Position de chaque note par rapport aux autres notes de la classe :

- Comme la note de Loïc se situe à 1 écart-type au-dessus de la moyenne sa classe, on dit que sa cote Z est égale à $+1$.

- Comme la note de Zoé se situe à 2 écarts-types au-dessus de la moyenne de sa classe , on dit que sa cote Z est égale à $+2$.

- La cote Z d'Alexia = ... et la cote Z de William = ...

Ainsi la cote Z donne la mesure, en nombre d'écarts-types, de l'écart entre une valeur et la moyenne.

La **cote** Z, aussi appelée **cote standard**, est une mesure de position d'un objet par rapport à la moyenne du groupe. Concrètement, cette mesure donne la distance entre une donnée et la moyenne **en nombre d'écarts-types**.

Pour déterminer une cote Z, il faut d'abord déterminer la moyenne puis l'écart-type. Ensuite, on utilise la formule suivante pour déterminer la valeur de la cote Z de la donnée x_i :

$$\boxed{\text{cote } Z = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}}$$

La cote Z est particulièrement utile pour comparer des résultats de nature différente. Il est important de savoir qu'une cote Z plus grande que 2 ou plus petite que -2 est assez rare, et qu'une cote Z plus grande que 3 ou plus petite que -3 est rare. C'est pour cette raison que les valeurs indiquées sur une échelle de cote Z sont généralement comprises entre -3 et $+3$.

Exemple : Chaque semaine, un géant de l'alimentation publie une circulaire annonçant les soldes du jeudi pour toutes ses épiceries. Le gérant de l'une de ces épiceries décide un jour d'en faire un peu plus en plaçant une annonce dans le journal local. Le jeudi suivant la parution de l'annonce, il reçoit $2'280$ clients alors qu'habituellement, le jeudi, la moyenne est de $2'000$ clients avec un écart-type de 80 clients.

Peut-il en conclure que son annonce dans le journal local a eu de l'effet ? Un écart de 280 clients par rapport à la moyenne est-il significatif ?

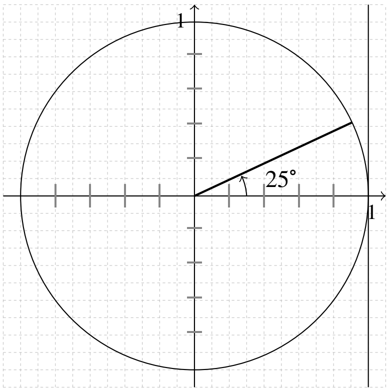
Exercices

4 Trigonométrie II

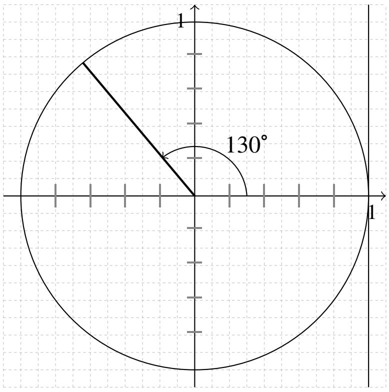
Cercle trigonométrique

Exercice 4.1 À l'aide du cercle trigonométrique, donner une bonne approximation des valeurs des rapports trigonométriques (cos, sin, tan) des angles suivants :

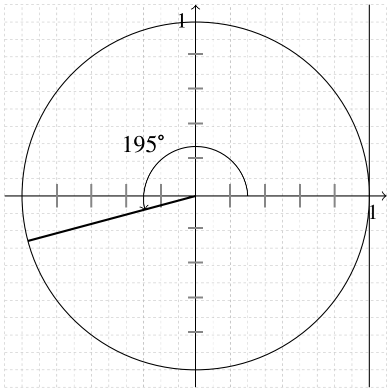
a) $\alpha = 25^\circ$



b) $\alpha = 130^\circ$

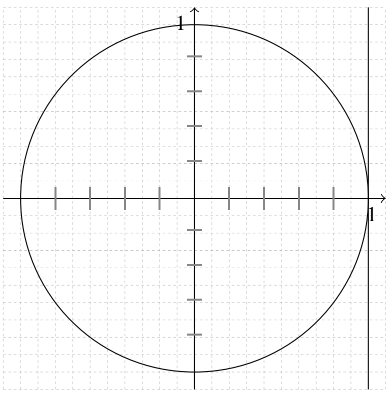


c) $\alpha = 195^\circ$

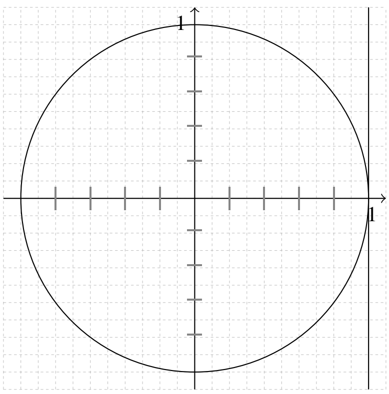


Exercice 4.2 À l'aide du cercle trigonométrique, donner une bonne approximation des valeurs des rapports trigonométriques (cos, sin, tan) des angles suivants :

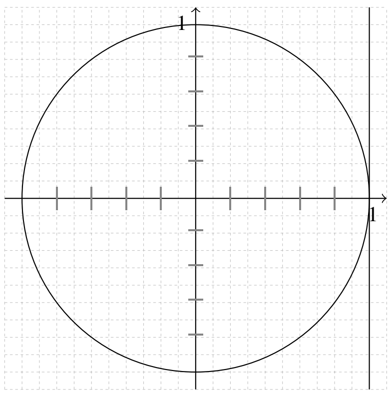
a) $\alpha = 45^\circ$



b) $\alpha = 330^\circ$

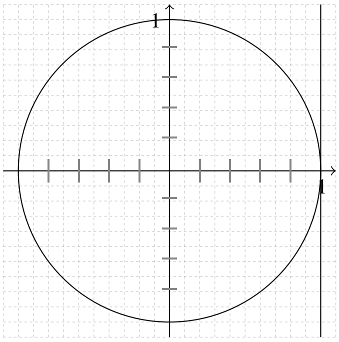


c) $\alpha = 210^\circ$

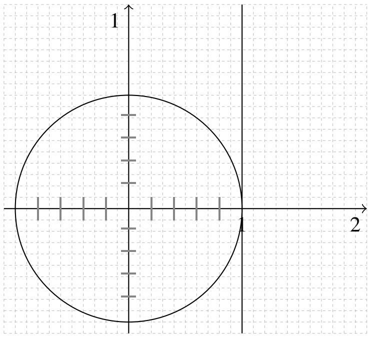


Exercice 4.3 Représenter dans le cercle trigonométrique les triangles équilatéraux et isocèles rectangles qui permettent de justifier les valeurs exactes des rapports trigonométriques (cos, sin, tan) des angles en radians suivants. Donner ces valeurs exactes uniquement grâce aux dessins.

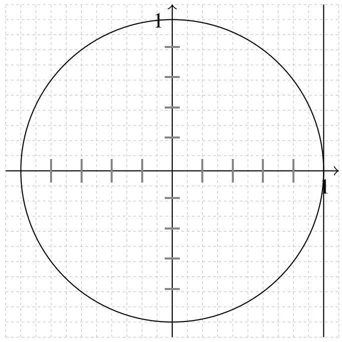
a) $\alpha = 45°$



b) $\alpha = 60°$

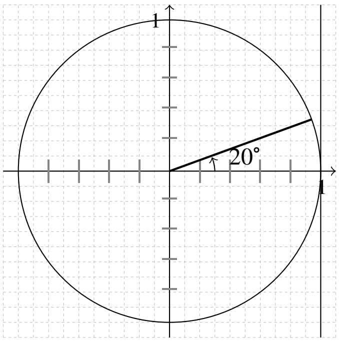


c) $\alpha = 30°$

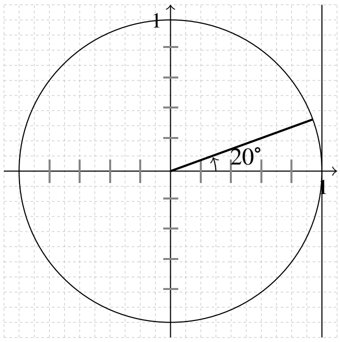


Exercice 4.4 Représenter l'angle demandé, donner les rapports trigonométriques des deux angles et les comparer. Expliquer le pourquoi de ce que l'on peut observer.

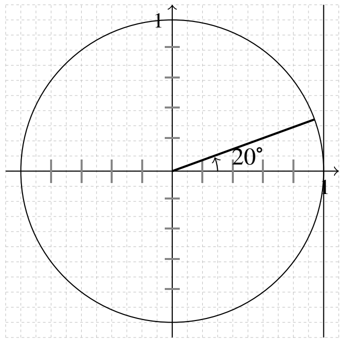
a) $\alpha = 160°$



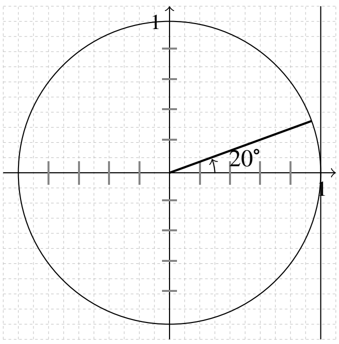
c) $\alpha = 200°$



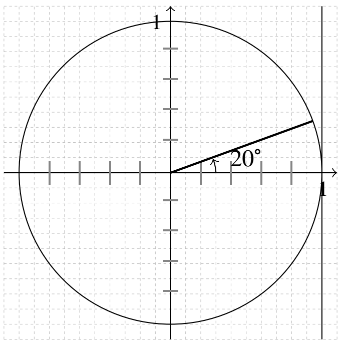
e) $\alpha = 70°$ (sauf tan)



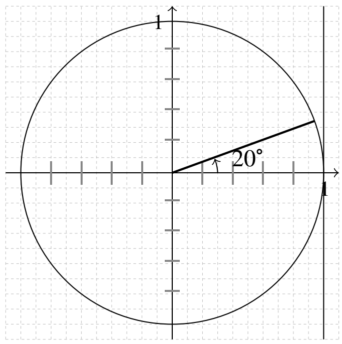
b) $\alpha = 340°$



d) $\alpha = 110°$ (sauf tan)



f) $\alpha = 740°$



Trigonométrie dans le triangle quelconque

Exercice 4.5 Résoudre les triangles ABC suivants à l'aide du théorème du cosinus (sauf l'aire).

a) $a=7$ $b=9$ $\gamma=35°$

b) $a=13,4$ $b=9,7$ $c=8,1$

c) $a=57,89$ $b=10,48$ $\beta=7,26°$

Exercice 4.6 Soit un triangle ABC avec $c=6$ et $\alpha=30°$. Calculer b à l'aide du théorème du cosinus et faire à la construction pour comparer. Expliquer le nombre de solutions obtenues dans chaque cas.

a) $a=2$ b) $a=3$ c) $a=4$ d) $a=6$ e) $a=7$

Exercice 4.7 Pour calculer la distance entre deux points A et B, un géomètre choisit un point C qui est à 420 m de A et à 540 m de B. Si l'angle $\angle ACB=63,2°$, calculer la distance séparant A et B.

Exercice 4.8 Calculer l'aire des triangles de l'exercice 4.5.

Exercice 4.9 Résoudre les triangles ABC suivants à l'aide du théorème du sinus.

a) $a=10$ $\alpha=85°$ $\gamma=40°$

b) $a=85,67$ $\beta=123,18°$ $\gamma=24,54°$

c) $c=78,54$ $\alpha=67,66°$ $\beta=85,93°$

Exercice 4.10 Pour calculer la distance entre deux points A et B, un géomètre choisit un point C qui est à 375 m de A et à 530 m de B. Si l'angle $\angle BAC=49,5°$, calculer la distance séparant A et B.

Exercice 4.11 Calculer tous les angles des triangles ABC suivants.

a) $a=4$ $b=9$ $c=10$

b) $a=60$ $b=94$ $c=38$

c) $a=68,87$ $b=35,57$ $c=81,46$

Exercice 4.12 Résoudre les triangles ABC suivants.

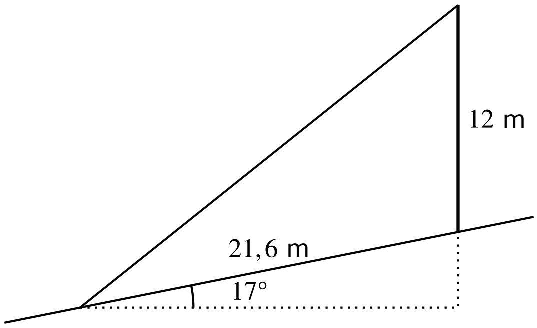
a) $a=70,24$ $b=82,12$ $\gamma=30,69°$

b) $a=20,46$ $\beta=58,25°$ $\gamma=39,38°$

c) $a=98,06$ $b=364,04$ $\beta=30,65°$

d) $a=85,80$ $c=57,29$ $\beta=117,81°$

Exercice 4.13 Un poteau haut de 12 m est planté sur le flanc d'une colline dont la pente forme un angle de $17°$ avec l'horizontale Calculer la longueur minimale d'un câble tendu entre le sommet du poteau et un point en contrebas distant de $21{,}6$ m de la base du poteau.



Exercice 4.14 Soit le parallélogramme $ABCD$. On a $AB = 30$ cm, $BC = 20$ cm et $\beta = 60°$.

Calculer la longueur des diagonales AC et BD, ainsi que l'angle aigu θ qu'elles forment entre elles.

Exercice 4.15 Soit un quadrilatère convexe $ABCD$ dont on connaît l'angle $\alpha = 110°$ ainsi que les longueurs de ses quatre côtés : $AB = 3$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 6$ cm et $DA = 5$ cm.

Que peut-on dire sur le triangle BCD ? Utiliser cette observation pour calculer l'aire et les angles du quadrilatère.

5 Analyse combinatoire

Principes fondamentaux

Exercice 5.1 Une personne a quatre jupes et six chemisiers. Combien de tenues « jupe et chemisier » différentes peut-elle porter ?

Exercice 5.2 Une personne veut acheter une voiture. Elle constate qu'elle a non seulement le choix entre 8 modèles, mais que chaque modèle est disponible en 15 couleurs différentes, peut être manuel ou automatique, et encore à essence, hybride ou électrique.

De combien de manières différentes peut-elle faire sa commande ?

Exercice 5.3 Mon fitness possède 4 appareils de cardio et 10 appareils de musculation différents. Mon coach me prépare un programme que je dois faire dans l'ordre indiqué. Le programme peut être un entraînement d'endurance composé de 3 appareils cardio différents ou alors être un programme de force composé d'un appareil de cardio suivi de 3 appareils de musculation différents.

Combien existe-t-il de programmes différents ?

Exercice 5.4 Pour chaque condition suivante, combien de "mots" peut-on former en utilisant que les lettres A, B, C et D ?

a) Le "mot" comporte quatre lettres. Chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois.

b) Le « mot » comporte quatre lettres. Chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois. La première et la dernière lettre doivent être identiques.

c) Le « mot » comporte quatre lettres. Chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois. Il ne doit contenir aucun A.

d) Le « mot » comporte quatre lettres. Chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois. Il doit contenir exactement un A.

e) Le « mot » comporte quatre lettres. Chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois. Il doit contenir au moins un A.

f) Le « mot » comporte quatre lettres. Chaque lettre n'est utilisée qu'une seule fois.

g) Le « mot » comporte cinq lettres. Chaque lettre n'est utilisée qu'une seule fois.

h) Le « mot » comporte cinq lettres, qui doivent être toutes identiques.

Exercice 5.5 Dans certains pays, les plaques d'immatriculation des automobiles commencent par une lettre de l'alphabet, suivie de cinq chiffres. Calculer combien de plaques d'immatriculation sont réalisables dans les situations suivantes.

a) Le premier chiffre suivant la lettre ne peut pas être 0.

b) La première lettre ne peut pas être O ou I et le premier chiffre ne peut pas être 0 ou 1.

c) Les lettres X, Y ou Z sont réservées pour des plaques de collection. Dans ce cas, les 5 chiffres sont identiques. Sinon, les lettres et les chiffres peuvent être choisis de toutes les manières possibles.

Les permutations

Exercice 5.6 Calculer le nombre d'anagrammes que l'on peut former avec les mots suivants :

a) ART

b) ARA

c) $DIPLOME$

d) $MATURITE$

e) $BACCALAUREAT$

f) $MISSISSIPPI$

Exercice 5.7 Un étudiant possède cinq livres de math, trois livres d'histoire et huit livres en allemand. De combien de manières peuvent-ils être rangés sur une étagère si les livres traitant de la même matière sont placés les uns à côté des autres ?

Exercice 5.8 Combien de mots peut-on écrire avec les lettres du mot $TOULOUSE$, si les consonnes doivent occuper les 1re, 2e et 7e positions ?

Exercice 5.9 Les quatre remplaçants d'une équipe de volley prennent place sur le banc des remplaçants. De combien de manières différentes peuvent-ils s'asseoir ?

Exercice 5.10 Neuf personnes prennent place autour d'une table ronde.

a) De combien de manières différentes peuvent-elles s'asseoir ? (On ne tient compte que de la position relative des neuf personnes les unes par rapport aux autres.)

b) Même question, mais un couple de deux amoureux désirent être voisins.

c) Dans le cas de la question a), combien y a-t-il de configurations dans lesquelles les deux amoureux ne sont pas assis l'un à côté de l'autre.

Exercice 5.11 Un représentant s'apprête à visiter cinq de ses clients. De combien de façons peut-il faire cette série de visite :

a) s'il les fait toutes le même jour ?

b) s'il en fait trois un jour et deux le lendemain ?

Exercice 5.12 De combien de manières peut-on partager un groupe de dix personnes :

a) en deux groupes de 7 et de 3 personnes ?

b) en trois groupes de cinq, trois et deux personnes ?

Exercice 5.13 Le client d'une banque se rappelle que 2, 4, 7 et 9 sont les chiffres de son code d'accès à quatre chiffres de sa carte bancaire. Malheureusement, il a oublié le code exact.
Calculer le plus grand nombre possible d'essais nécessaires pour obtenir le code secret.

Exercice 5.14 Le client d'une banque se rappelle que 2, 4 et 7 sont les chiffres de son code d'accès à quatre chiffres de sa carte bancaire. Malheureusement, il a oublié le code exact.
Sachant qu'un des chiffres apparaît deux fois dans le code, calculer le plus grand nombre possible d'essais nécessaires pour obtenir le code secret.

Exercice 5.15 Avec les lettres A, M, O, S et U, on peut créer 120 anagrammes. En les classant par ordre alphabétique, quelle sera la position du « mot » $SOUMA$?

Les arrangements

Exercice 5.16 Calculer le nombre de mots de 5 lettres que l'on peut former :

a) sans répétition (chaque lettre ne peut apparaître qu'une seule fois)

b) avec répétitions (chaque lettre peut apparaître plusieurs fois)

Exercice 5.17 Vous disposez de huit pièces de Scrabble™ permettant de composer le mot $EQUATION$. Combien de mots de quatre lettres pouvez-vous former ?

Exercice 5.18 De combien de manières peut-on agencer une vitrine qui contient 4 emplacements différents pour placer des sculptures, sachant que l'on a un choix de 10 sculptures.

Exercice 5.19 De combien de manières différentes cinq skieurs peuvent-ils s'asseoir sur un télésiège de huit places ?

Exercice 5.20 Dans l'alphabet Braille, chaque signe est représenté par six emplacements, qui contiennent chacun un point en relief ou rien.
Combien de signes distincts peut-on composer ?

Exercice 5.21 Un immeuble est composé d'un rez-de-chaussée et de huit étages.

a) Un ascenseur part du rez-de-chaussée avec cinq occupants. De combien de manières différentes ces cinq occupants peuvent-ils choisir les étages auxquels ils vont descendre ?

b) Même question si à chaque étage un occupant au plus quitte l'ascenseur.

Exercice 5.22

a) Combien y a-t-il d'initiales possibles formées de deux lettres ?

b) Combien un village doit-il avoir d'habitants pour que l'on soit sûr que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ?

Exercice 5.23 On considère les nombres 2, 5 et 7.

a) Combien peut-on former de nombres à deux chiffres distincts ?

b) Parmi eux, combien y a-t-il de nombres pairs ?

Exercice 5.24 Une cordée de sept personnes circulant en montagne comprend trois montagnards et quatre touristes. De combien de manières différentes, en tenant compte de l'ordre, peut-on disposer ces sept personnes en file, sachant que la première et la dernière personne de la cordée doivent être des montagnards ?

Exercice 5.25 Dix-sept chevaux sont au départ d'un grand-prix hippique. Combien y a-t-il de tiercés possibles :

a) au total ?

b) dans lesquels les trois chevaux gagnants sont-ils dans l'ordre d'arrivée ?

c) dans lesquels les trois chevaux gagnants sont-ils soit dans l'ordre d'arrivée, soit dans le désordre ?

d) dans lesquels les trois chevaux gagnants sont-ils dans le désordre ?

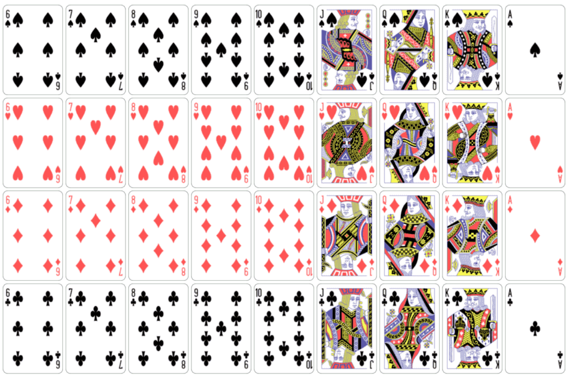
Exercice 5.26 Vos ancêtres sont votre père et votre mère, vos grands-parents, qui ont aussi chacun un père et une mère ...

a) Calculer le nombre de vos ancêtres de la 40^{e} génération (environ 1000 ans).

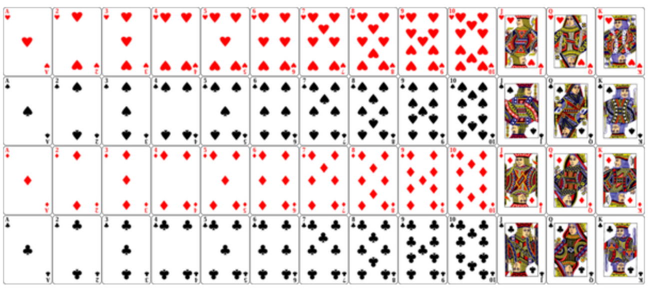
b) Ce nombre est plus grand que le nombre d'êtres humains ayant vécu sur Terre depuis 1000 ans. Où se trouve la faille dans ce raisonnement ?

À propos des jeux de cartes :

Un jeu de cartes de Jass est composé de 36 cartes. Il y a quatre couleurs différentes nommées *pique*, *coeur*, *carré* et *trèfle*. Il y a neuf cartes différentes de chaque couleur : l'as, le roi, la dame, le valet, puis les cartes numérotées de 10 à 6.



Un jeu de cartes de poker américain comporte 52 cartes. On ajoute au jeu de Jass les cartes numérotées de 5 à 2.



Dans un jeu de cartes, on appelle *main* les cartes qui sont distribuées au hasard à un joueur. L'ordre dans lequel les cartes de la main sont distribuées n'importe pas.

Les combinaisons

Exercice 5.27 On distribue une main de six cartes d'un jeu de Jass comportant 36 cartes.

a) Combien de mains différentes peut-on recevoir ?

b) Combien de mains comportent les quatre valets ?

c) Combien de mains comportent au moins un valet ?

Exercice 5.28 De combien de façons peut-on choisir une main de cinq cartes dans un jeu de Jass de 36 cartes, si l'on veut que ces cinq cartes contiennent :

a) les quatre as ?

b) deux as et deux rois ?

c) au moins un as ?

d) au moins deux rois ?

Exercice 5.29 Dix-sept chevaux sont au départ d'un grand-prix hippique. Combien y a-t-il de tiercés non ordonnés possibles ?

Exercice 5.30 Une classe doit élire un comité de trois personnes. Combien de comités différents peut-on former si la classe est constituée de 24 élèves ?

Exercice 5.31 Douze personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien y a-t-il de poignées de main ?

Exercice 5.32 Vous devez organiser un tournoi de tennis dans le cadre de votre club. Il y a neuf personnes inscrites qui devront toutes jouer une fois contre leur adversaire. Combien de matchs vont devoir se dérouler ?

Exercice 5.33 Un marchand de glace a en stock 31 parfums différents. Il se vante de proposer environ 4500 glaces différentes à trois boules, chaque boule étant d'un parfum différent. Est-ce vrai ?

Exercice 5.34 Avec 10 députés et 6 sénateurs, on veut former une commission de 7 membres comprenant exactement 5 députés. Quel est le nombre de possibilités ?

Exercice 5.35 Une grille de la loterie suisse comporte 45 numéros et le joueur doit en choisir six.

a) Combien y a-t-il de grilles possibles ?

b) Combien de grilles permettent de réaliser 3 points (gain de $6.–$) ?

c) Combien de grilles permettent de réaliser 6 points (gain du gros lot) ?

Exercice 5.36 Un questionnaire comprend huit questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non. Combien peut-on donner de réponses différentes avec quatre oui et quatre non ?

Exercice 5.37 On jette vingt fois une pièce de monnaie.

a) Combien y a-t-il de séquences différentes ?

b) Combien de séquences contiennent une fois pile ?

c) Combien de séquences contiennent quatre fois pile ?

d) Combien de séquences contiennent dix fois pile ?

e) Combien de séquences contiennent vingt fois pile ?

Exercice 5.38 Une urne contient douze boules numérotées de 1 à 12. Calculer le nombre de tirages différents si l'on tire trois boules :

a) simultanément ;

b) successivement et sans remettre dans l'urne les boules qui ont été tirées ;

c) successivement et en remettant dans l'urne, après chaque tirage, chaque boule qui a été tirée.

Synthèse

Exercice 5.39 On choisit 5 élèves dans la classe.

a) Combien y a-t-il de possibilités différentes de les asseoir sur un canapé cinq places ?

b) Combien y a-t-il de possibilités différentes de les asseoir sur un canapé trois places ?

c) Combien y a-t-il de possibilités différentes de les asseoir dans une salle de sept places ?

Exercice 5.40 Combien de nombres entiers positifs inférieurs ou égaux à $10'000$ peuvent être formés avec les chiffres 1, 2, 3 et 4

a) si les répétitions sont permises ?

b) si les répétitions ne sont pas permises ?

Exercice 5.41 Combien de nombres différents de cinq chiffres distincts peut-on former avec les chiffres de 0 à 9

a) si les nombres doivent être impairs ?

b) si les deux premiers chiffres de chaque nombre doivent être pairs ?

Exercice 5.42 Le Sport-Toto (paris sportifs) est un jeu de pronostics sur 13 matchs de football. Il y a trois résultats possibles : l'équipe qui reçoit gagne (1), le visiteur gagne (2) ou match nul (X). Combien de pronostics différents peut-on faire ?

Exercice 5.43 On veut asseoir cinq hommes et quatre femmes dans une rangée de neuf chaises de manière à ce que les femmes occupent les places paires. Combien y a-t-il de possibilités ?

Exercice 5.44 On dispose des sept jetons suivants : ① ① ② ② ② ③ ③.

a) Combien de nombres de sept chiffres peut-on composer en juxtaposant ces sept jetons ?

b) Combien de ces nombres sont inférieurs à $1'300'000$?

Exercice 5.45 On range six jetons de couleurs différentes regroupés deux à deux dans trois boites. Combien de dispositions différentes existe-t-il ?

Exercice 5.46 De combien de manières différentes peut-on asseoir huit personnes en rang si :

a) aucune restriction n'est imposée ;

b) les personnes A et B veulent être assises côte à côte ;

c) les hommes ne doivent avoir que des voisines et inversement, sachant qu'il y a quatre femmes et quatre hommes ;

d) les hommes, qui sont au nombre de cinq, doivent être assis côte à côte ;

e) les personnes forment quatre couples et chaque couple doit rester uni ?

Exercice 5.47 Dans une course, douze chevaux prennent le départ.

a) De combien de manières le tableau d'arrivée des trois premiers peut-il se présenter ? (tiercé dans l'ordre)

b) Combien de trios gagnants peut-on avoir ? (tiercé dans le désordre)

Exercice 5.48 Une urne contient les six jetons suivants : ① ② ③ ④ ⑤ ⑥.

a) On tire simultanément cinq jetons. Combien de tirages différents contenant deux chiffres pairs et trois impairs peut-on former ?

b) On tire successivement les six jetons et on les aligne dans l'ordre du tirage. Combien de nombres différents de six chiffres peut-on ainsi former ?

c) On tire successivement quatre jetons et on les aligne dans l'ordre du tirage. Combien de nombres différents de quatre chiffres peut-on ainsi former ?

d) On tire simultanément quatre jetons. Combien de tirages différents peut-on former ?

e) On tire successivement quatre jetons. À chaque tirage, on note le chiffre obtenu puis on remet le jeton tiré dans l'urne. Combien de nombres différents de quatre chiffres peut-on ainsi former ?

f) On tire simultanément cinq jetons. On les aligne de manière à ce que deux chiffres pairs soient toujours séparés par un chiffre impair et réciproquement, deux chiffres impairs soient toujours séparés par un chiffre pair. Combien de nombres à cinq chiffres différents peut-on ainsi former ?

Exercice 5.49 Combien de nombres à trois chiffres peut-on former avec les six chiffres 2, 3, 5, 6, 7, 9 ?

Parmi ces nombres, combien sont :

a) inférieurs à 400 ; b) pairs ; c) multiples de 5.

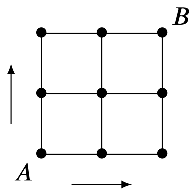
Exercice 5.50 Un étudiant doit résoudre huit problèmes sur dix lors d'un examen écrit.

a) Combien de choix peut-il faire ?

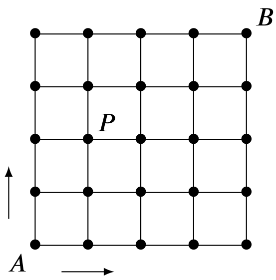
b) Combien de choix peut-il faire, en supposant qu'il doit obligatoirement résoudre les trois premiers problèmes ?

c) Combien de choix peut-il faire, en supposant qu'il doit obligatoirement résoudre au moins quatre des cinq premiers problèmes ?

Exercice 5.51 Sur un quadrillage $2x2$, on peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins reliant le point A (en bas à gauche) au point B (en haut à droite) ?



Exercice 5.52 Sur un quadrillage $4x4$, on peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut.



a) Combien y a-t-il de chemins reliant le point A (en bas à gauche) au point B (en haut à droite) ?

b) Parmi ces chemins, combien passent par le point $P(1\,;2)$?

Exercice 5.53 Combien de salades différentes peut-on préparer à partir d'un choix de laitue, scarole, endive, cresson et chicorée amère ? (Considérer d'abord le nombre possible constitué d'un légume, puis de deux ...)

Exercice 5.54 Dans combien de nombres compris entre 1000 et 9999

a) rencontre-t-on une fois le chiffre 3 ?

b) ne rencontre-t-on pas le chiffre 3 ?

c) rencontre-t-on trois fois le chiffre 3 ?

6 Statistiques descriptives

Vocabulaire

Exercice 6.1 Compléter les phrases ci-dessous :

a) L'ensemble sur lequel porte une étude statistique s'appelle ....

b) Un élément de cet ensemble est ....

c) L'étude statistique rend compte d'un aspect des individus de la population appelé ....

d) Si l'on peut mesurer cet aspect, la variable est de nature .... (prix, tailles, notes...)

e) Elle prend différentes valeurs. Si les valeurs sont isolées, on dit que la variable est

....

f) Si les valeurs appartiennent à un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que la variable est ....

....

g) Si l'aspect ne se traduit pas par des nombres, la variable est ....

(exemple : couleurs, lieux, opinions...). Elle prend différentes ....

h) Un groupe de n individus pris dans la population est ....

Exemples :

On étudie le prix d'un produit dans différents points de vente.

i) La population est ....

j) La variable est .... , il s'agit d'une variable ....

On étudie la couleur des voitures vendues par un garage.

k) La population est ....

l) La variable est .... , il s'agit d'une variable ....

On étudie la taille des élèves d'une classe du gymnase.

m) La population est ....

n) La variable est .... , il s'agit d'une variable ....

Un sondage d'opinion de collégiens sur leurs professeurs est réalisé par téléphone sur un échantillon représentatif de 405 élèves.

o) La population est ....

p) La variable est .... , il s'agit d'une variable ....

Étude d'une variable qualitative

Exercice 6.2 On a demandé aux enfants de trois classes de troisième primaire quel était leur sport d'hiver préféré. On a obtenu les données brutes suivantes :

Hockey	Glissade	Hockey	Hockey	Hockey
Hockey	Ski	Hockey	Ski	Raquette
Patinage	Ski	Ski	Hockey	Ski
Ski	Hockey	Ski	Raquette	Ski
Patinage	Ski	Hockey	Raquette	Raquette
Ski	Glissade	Hockey	Glissade	Glissade
Hockey	Glissade	Hockey	Hockey	Hockey
Ski de fond	Hockey	Patinage	Patinage	Hockey
Ski	Hockey	Ski	Raquette	Patinage
Hockey	Glissade	Ski	Ski	Ski de fond
Hockey	Patinage	Ski	Patinage	Hockey
Hockey	Patinage	Ski	Patinage	Raquette

a) Identifier la population

b) Identifier la variable statistique.

c) Donner l'ensemble des modalités.

Effectifs et fréquences

Exercice 6.3 Compléter les phrases ci-dessous :

a) Le nombre d'individus pour lesquels la variable prend une modalité donnée est .... de cette modalité.

b) La somme des effectifs de toutes les modalités est .... C'est le nombre d'individus de la population.

c) La .... d'une modalité est le quotient ――――――――――――.

Exercice 6.4 On a relevé le prix d'un produit dans plusieurs points de vente :
35 37 40 35 36 36 39 36 35 37 37 38 36 35 40 37 36 36 38 39 35 36 37 38 36

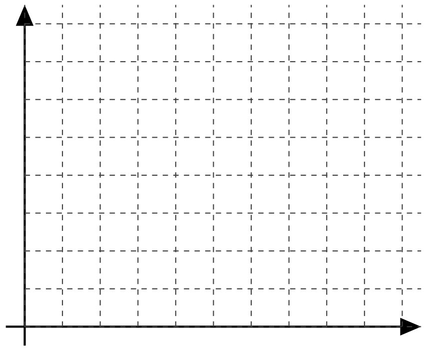
Résumer l'étude statistique en complétant le tableau ci-dessous :

Prix constater en Frs	35	36	37	38	39	40	Total
Nb de points de vente							
Fréquence							
Fréquence en %							

Exercice 6.5 Étude de la taille d'un groupe de 15 élèves.

Représenter la série statistique par un diagramme en bâtons.

Taille en cm	178	179	180	181	182
Effectif	5	2	3	1	4

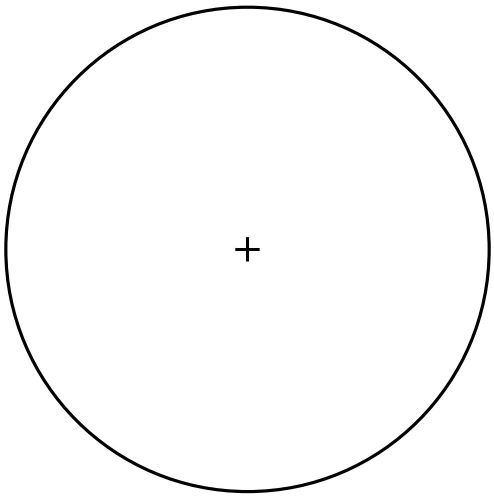


Exercice 6.6 Étude sur les couleurs préférées d'un groupe de 13 élèves.

a) Compléter le tableau ci-dessous en arrondissant à 10^{-3} pour les fréquences et à l'unité pour les angles.

Couleur	Effectif	Fréquence	Angle en °
Bleu	7		
Rouge	2		
Jaune	4		
Total			

b) Représenter par un diagramme circulaire la répartition des couleurs en fréquences.



Exercice 6.7 On a demandé aux employés d'une entreprise pour quel parti politique ils avaient voté lors des dernières élections. Voici les données brutes obtenues :

PS	PLR	PS	Centre	PS	UDC
PS	UDC	PLR	PS	Vert·e·s	Centre
UDC	PLR	Vert·e·s	UDC	UDC	UDC
PLR	PS	PLR	Centre	PLR	Centre
UDC	Centre	PS	UDC	UDC	UDC

a) Identifier la population ainsi que la variable statistique (v.s.).

b) Donner l'ensemble des modalités.

c) De quel type est cette variable statistique ?

d) Établir le tableau des distributions des effectifs et des fréquences.

e) Représenter les données par diagrammes en bâtons puis un diagramme en secteurs.

Exercice 6.8 Reprendre la série statistique de l'exercice 6.2.

a) Déterminer le tableau de distribution des effectifs et des fréquences.

b) Représenter les données par un diagramme en colonnes et un diagramme en secteurs.

Exercice 6.9 Un professeur de l'Uni a noté le nombre de points obtenus par 80 étudiants lors d'un test de statistiques.

2	3	5	5	4	6	6	5	4	3
7	7	7	6	2	7	7	9	8	10
5	6	6	8	6	6	3	7	3	5
9	7	6	4	7	5	9	9	6	9
6	3	9	8	8	7	5	6	10	6
9	7	7	7	4	7	10	8	7	10
3	5	8	5	8	7	4	8	10	7
4	6	6	8	7	7	7	8	8	9

a) Identifier la population ainsi que la variable statistique (v.s.).

b) Donner l'ensemble des modalités.

c) De quel type est cette variable statistique ?

d) Établir le tableau des distributions des effectifs et des fréquences.

e) Représenter les données par un diagramme en bâtons puis un diagramme en secteurs.

Exercice 6.10 On étudie l'état civil des 30 employés d'une petite entreprise. On a obtenu les données brutes suivantes :

Marié	Marié	Célibataire
Mariée	Célibataire	Marié
Célibataire	Marié	Veuf
Divorcé	Veuve	Célibataire
Marié	Marié	Divorcée
Célibataire	Divorcé	Divorcé
Célibataire	Célibataire	Marié
Mariée	Mariée	Marié
Mariée	Marié	Marié
Divorcée	Marié	Marié

a) Identifier la population et la variable statistique.

b) Donner l'ensemble des modalités.

c) Établir le tableau des distributions des effectifs et des fréquences.

d) Proposer diagrammes en bâtons des effectifs de cette variable statistique.

e) Proposer diagrammes en bâtons des fréquences de cette variable statistique.

f) Comparer ces deux représentations graphiques.

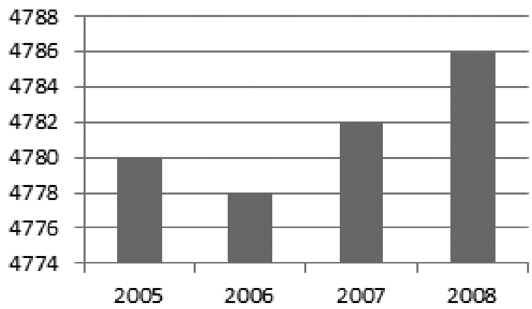
Exercice 6.11 Le tableau ci-après représente la répartition de l'état civil de 100 personnes interrogées au hasard.

État civil	effectif
Marié(e)	44
Divorcé(e)	32
Célibataire	19
Veuf(ve)	4
Religieux(se)	1

a) Quelle est la part de gens mariés sur la population concernée ?

b) Quel est le taux de divorce ?

Exercice 6.12 Le graphique suivant représente le nombre d'infractions déclarées à Joliville entre 2005 et 2008.



Laquelle de ces propositions est correcte ?

a) 2006 est l'année qui a connu le moins d'infractions.

b) Les infractions ont explosé entre 2006 et 2008.

Exercice 6.13 Une compagnie automobile a enregistré le prix des voitures vendues durant l'année dernière. Voici les données rangées :

10520	20420	24150	26390	27880	32110	34620	38350
14310	20630	24420	26510	28000	32430	35270	39240
16020	21110	24530	26520	29080	32480	35890	39810
16670	21350	24910	26710	29160	32610	36100	40700
17220	21790	25080	27400	29770	33720	36440	41660
18450	22500	25160	27550	30330	33740	36540	41720
19160	22630	25900	27630	30410	33740	36660	42600
19320	22910	26220	27660	30720	34220	37390	44310
19470	23400	26250	27790	31650	34570	37650	46270
19710	23820	26340	27840	31820	34620	38200	48340

a) Identifier la population.

b) Identifier la variable statistique.

c) Cette variable statistique est-elle discrète ou continue ?

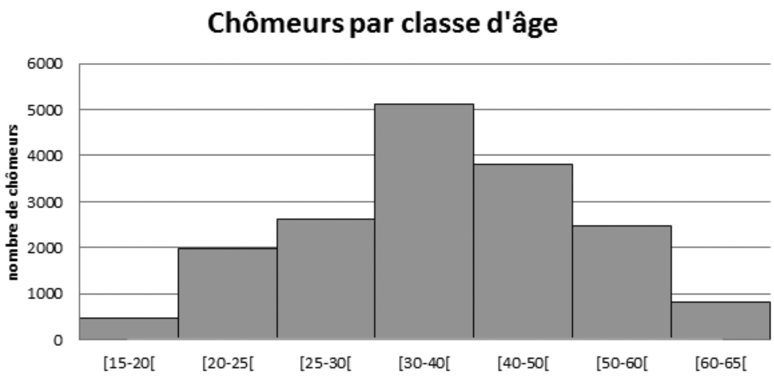
d) Regrouper les données en 8 classes de largeur $5'000$ avec valeur minimale égale à $10'000$, puis établir le tableau des distributions des effectifs et des fréquences.

e) Représenter les données par un histogramme et le polygone des fréquences.

Exercice 6.14 Le tableau récapitulatif suivant donne la statistique trimestrielle par classe d'âge des chômeurs inscrits dans un office du travail dans le canton de Vaud en juin 2009 :

classe d'âge	effectif	fréquence [%]
[15 ; 20[	472	2,73
[20 ; 25[	1'990	11,51
[25 ; 30[	2'621	15,16
[30 ; 40[	5'110	29,56
[40 ; 50[	3'798	21,97
[50 ; 60[	2'476	14,32
[60 ; 65[	821	4,75
Totaux	17'288	100

a) En quoi l'histogramme suivant est-il trompeur ?



b) Proposer un nouvel histogramme corrigeant cet effet visuel trompeur.

Exercice 6.15 En recevant les élèves qui désirent faire partie d'une équipe de foot du gymnase, l'entraîneur a pris note du poids de ces 60 joueurs :

72,6	81,9	84,7	88,1	89,4	91,6	93,7	95,8	99,1	103,2
75,8	82,6	85,4	88,1	90,2	92,4	93,9	96,6	99,4	103,9
77,5	82,9	86,2	88,3	90,9	92,5	94,4	97,1	99,8	104,0
78,3	83,0	86,9	88,7	91,1	92,8	94,7	97,2	100,4	105,2
79,6	83,5	87,3	89,0	91,2	93,0	94,8	97,5	101,7	106,1
81,5	84,1	87,8	89,1	91,3	93,3	95,2	98,3	102,1	118,7

a) Identifier la population.

b) Identifier la variable statistique.

c) Cette variable statistique est-elle discrète ou continue ?

d) En utilisant des classes de largeur 5, construire le tableau des distributions des effectifs et des fréquences (valeur minimale : 70). Vous admettrez une classe plus large à l'extrémité (classe $]105\,;120[$).

e) Représenter les données par un histogramme et le polygone des fréquences.

Exercice 6.16 Le directeur de l'usine PRO a fait une étude sur l'ancienneté des ouvriers de l'usine. Il a donc noté, en ordre croissant, le nombre d'années d'ancienneté de tous les ouvriers. Voici les données rangées :

0,1	1,6	5,8	7,8	9,7	13,2	15,4	18,2	22,4	25,9
0,3	2,3	6,2	8,3	10,2	13,6	15,9	19,1	22,6	26,7
0,5	3,4	6,6	8,6	11,1	14,3	16,2	19,8	23,5	27,8
0,9	3,9	6,9	9,0	12,3	14,6	16,6	20,3	24,1	29,8
1,1	5,1	7,2	9,2	12,7	14,7	16,8	20,7	24,8	32,5
1,2	5,3	7,5	9,4	12,9	14,9	17,0	21,2	25,3	47,2

a) Identifier la population.

b) Identifier la variable statistique.

c) Déterminer le tableau complet de distribution des fréquences après avoir regroupé les données en utilisant des classes de largeur 5 et une classe plus large à l'extrémité.

d) Représenter les données par un histogramme et le polygone des fréquences.

Exercice 6.17 La ville de TIP veut faire une étude sur le respect de ses règlements de stationnement. On a donc relever, pour chacun des 90 jours de l'été dernier, le nombre d'infractions aux règlements de stationnement. Le tableau incomplet des distributions des effectifs et des fréquences (arrondies) est donné ci-dessous.

Répartition des jours de l'été selon le nombre d'infractions constatées.

Classe	milieu de classe	effectif	fréquence
[100 ; 120[	110	2	....
[120 ; 140[	....	3	0,033
[140 ; 160[	150	....	0,111
[160 ; 180[	170	8	....
[180 ; 200[	....	....	....
[200 ; 220[	210	16	....
[220 ; 240[	230	....	0,289
[240 ; 260[	250	12	....
[260 ; 280[	270	....	0,033
	Totaux	90	1

a) Compléter le tableau des distributions des effectifs et des fréquences.

b) Faire un histogramme.

c) Construire le polygone des fréquences.

Exercice 6.18 Classer chacune des variables suivantes selon qu'elles sont qualitatives, quantitatives discrètes ou quantitatives continues :

a) profession
b) lieu de résidence
c) âge
d) pointure de chaussure
e) coordonnées GPS
f) langues parlées
g) revenu annuel
h) nationalité
i) vitesse du vent
j) couleurs des yeux
k) nombre de langues parlées
l) nombre de locataires d'une maison

Exercice 6.19 On donne, dans le tableau suivant, la répartition des exploitations viticoles d'un canton suisse en fonction de la superficie (en ha) :

superficie en ha	effectif
De 0 à moins de 5	19
De 5 à moins de 10	14
De 10 à moins de 15	29
De 15 à moins de 20	18
De 20 à moins de 25	27
De 25 à moins de 30	20
De 30 et plus	23

a) De quel type de variable statistique s'agit-il ?
b) Quelle est la population ?
c) Indiquer une modalité.
d) Évaluer le pourcentage des exploitations de moins de 10 ha.
e) Évaluer le pourcentage des exploitations de plus de 15 ha.

Fréquences cumulées

Exercice 6.20 On a mesuré le nombre de jours d'absence de 20 employés au cours d'une année. Des observations brutes figurent dans le tableau ci-dessous :

2	0	0	3	2	6	4	10	1	5
0	4	2	0	4	0	3	1	1	2

a) De quel type de variable statistique s'agit-il ?

b) Construire le tableau des fréquences cumulées croissantes.

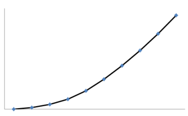
c) Indiquer le nombre d'employés ayant eu moins de 5 jours d'absence.

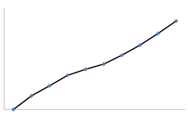
Exercice 6.21 Reprendre l'exercice 6.13.

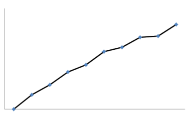
a) Compléter le tableau de distribution des fréquences en ajoutant les colonnes des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

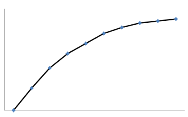
b) Représenter les courbes des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

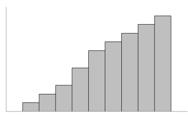
Exercice 6.22 Associer les histogrammes suivants à leur courbe de fréquences cumulées.

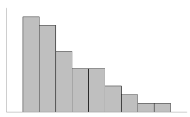
1.


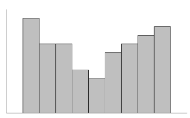
2.


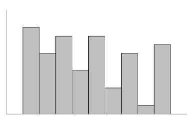
3.


4.


a)


b)


c)


d)


Exercice 6.23 Un échantillon de 200 sportifs est à la base du tableau statistiques suivant. À compléter.

Taille(cm)	effectifs	fréq.cum.croiss.[%]
$[150;160[$	....	$0,2$
$[160;170[$	60	....
$[170;180[$	....	$0,6$
$[180;190[$	30	....
$[190;200[$	....	....

Exercice 6.24 Reprendre l'exercice 6.15.

a) Compléter le tableau de distribution des fréquences en ajoutant les colonnes des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

b) Représenter les courbes des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

c) Touver la proportion de joueurs ayant un poids de plus de 100 kg.

d) Trouver la proportion de joueurs ayant un poids situé entre 80 kg et 95 kg.

e) L'instructeur de l'équipe trouve ses joueurs trop légers. Il demande à chacun d'augmenter son poids de 10%. Exprimer le nouveau poids du joueur en fonction de son poids initial.

Exercice 6.25 Reprendre l'exercice 6.16.

a) Compléter le tableau de distribution des fréquences en ajoutant les colonnes des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

b) Représenter les courbes des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

c) Trouver la proportion des ouvriers qui ont entre 10 et 20 ans d'ancienneté.

d) Trouver la proportion des ouvriers qui ont plus de 20 ans d'ancienneté.

e) Pour récompenser les ouvriers qui ont rapporté de gros profits à l'usine, le patron a décidé de donner à chacun une bonification de 100 Frs par année d'ancienneté plus un montant fixe de 500 Frs. Exprimer la bonification en fonction du nombre d'années d'ancienneté.

Exercice 6.26 La gendarmerie de Fribourg a relevé sur l'autoroute les vitesses de 50 véhicules un samedi soir.

123	102	145	172	126	97	135	120	141	150
162	128	113	135	147	145	107	172	136	156
129	122	130	178	112	138	144	123	108	126
119	136	132	147	158	167	117	134	143	152
127	104	158	134	155	136	149	123	113	131

a) Donner la population et la variable statistique.

b) Mettre les informations sous forme de tableau en faisant 5 classes de longueur $L = 20$, avec comme valeur minimale $b_0 = 80$.

c) Calculer les fréquences, les fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

d) Construire l'histogramme des fréquences, ainsi que le polygone des fréquences.

e) Construire les courbes de deux fréquences cumulées.

f) Sachant que la vitesse maximum est de 120 km/h sur l'autoroute, quel est le pourcentage de véhicule se trouvant strictement en-dessous de cette vitesse ?

g) Sachant que si on dépasse de 40 km/h la vitesse autorisée, le retrait de permis est automatique. Quel pourcentage d'automobiliste risque de se faire retirer leur permis ?

Exercice 6.27 Les voitures particulières neuves immatriculées en 2015 sont réparties dans le tableau ci-dessous selon le type d'énergie consommée.

Type d'énergie	Milliers de voitures
Essence	1450
Diesel	630
Hybride	23
Autres	9

a) Quelle est la population étudiée ?

b) Quelle est la variable statistique ?

c) Calculer les fréquences et fréquences cumulées.

Exercice 6.28 De 2009 à 2011, les dépenses culturelles ont représenté 5% de la dépense de consommation des ménages suisses. Leur répartition est donnée par le graphique ci-après.

Services audiovisuels	32%
Imprimés	26%
Internet	16%
Théâtre et concerts	10%
Cours de musique et danse	6%
Autres services	10%

a) Est-ce que la nature de la variable statistique est quantitative ? Justifier.

b) Est-ce que cette série peut être représentée par un diagramme en secteurs ? Si oui, dessiner-le.

c) Ce tableau est faux, car la somme des pourcentages devrait être de 5%. Est-ce vrai ? Pourquoi ?

Exercice 6.29 On a mesuré le nombre de jours d'absence de 20 employés au cours d'une année. Des observations brutes figurent dans le tableau ci-dessous :

2	0	0	3	2	6	4	10	1	5
0	4	2	0	4	0	3	1	1	2

a) De quel type de variable statistique s'agit-il ?

b) Construire le tableau des effectifs cumulés croissants.

c) Indiquer le nombre d'employés ayant eu moins de 5 jours d'absence.

Mesures de tendance centrale

Exercice 6.30 Compléter les phrases ci-dessous :

a) On appelle mode d'une série statistique, noté ...., ...

....

b) Le mode de la série de l'exercice 6.4 est : ....

c) La médiane de la série $4 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 15 \quad 17$ est : ....

d) La médiane de la série $5 \quad 8 \quad 8 \quad 9 \quad 14 \quad 15$ est : ....

e) Écrire la série de l'exercice 6.4 par ordre croissant :

....

f) Pour la série de l'exercice 6.4 : l'effectif total est : ....

La médiane est donc la .... valeur et vaut ....

g) La moyenne de la série de l'exercice 6.4 est :

1) avec les effectifs : $\bar{x} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}$ = ...

2) avec les fréquences : $\bar{x} =$ .... = ...

Exercice 6.31 Calculer le mode, la médiane et la moyenne de la variable statistique :

Modalité	10	11	12	13	14	15	16	17
Effectif	2	3	7	9	14	8	3	1

Exercice 6.32 Déterminer la classe modale, la médiane et la moyenne de la variable statistique :

Classe	$[0;2[$	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;8[$	$[8;10[$	$[10;12[$
Effectif	3	8	15	14	6	2

Exercice 6.33 On a mesuré la taille des 50 professeurs du collège NOB :

Taille en cm	$[130;140[$	$[140;150[$	$[150;160[$	$[160;170[$	$[170;180[$	$[180;190[$	$[190;200[$
Nombre de professeurs	2	4	7	8	15	10	4

Déterminer la classe modale, la médiane et la moyenne.

Exercice 6.34 Étude de la répartition des revenus annuels (en milliers d'€) d'une population de 4370 personnes.

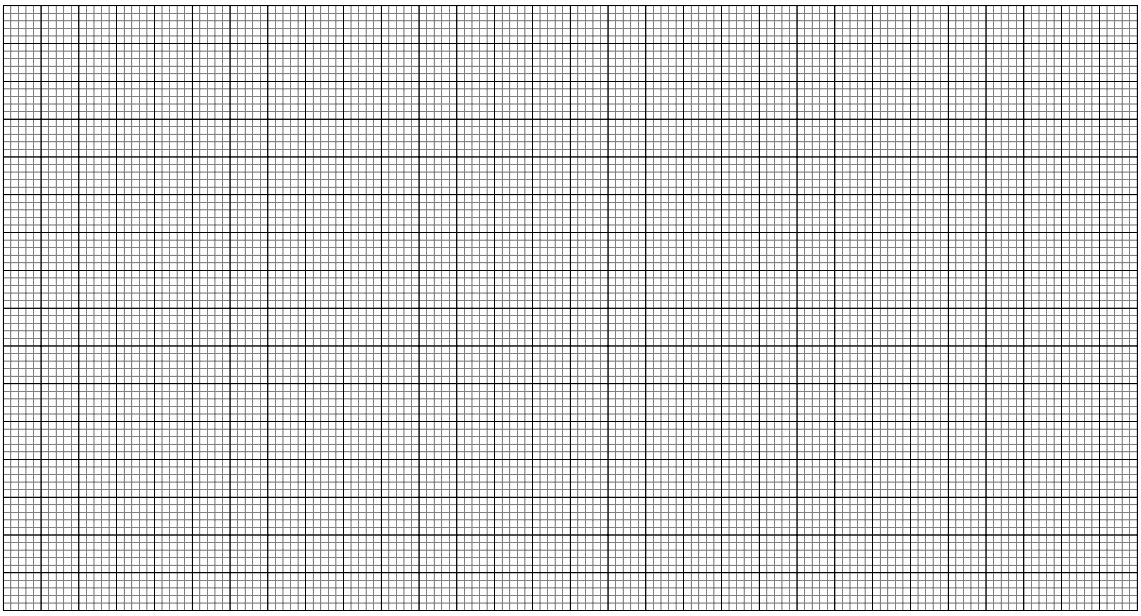
Salaires (en milliers d'€)	[0 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 60[	Total
Effectifs	306	231	385	1180	1468	568	232	4370

a) Compléter le tableau ci-dessous (arrondir à l'unité pour les fréquences et les amplitudes)

Salaires (en milliers d'€)	[0 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 60[	Total
Fréquences en %								
Amplitudes $a_i = x_{i+1} - x_i$								
Hauteurs $h_i = f_i / a_i$								
Fréquences cumulées %								

b) Tracer l'histogramme de la série.

Unités : abscisses : 1cm → 5'000 € ordonnées : 1cm → 1 unité.



c) Tracer le polygone des fréquences cumulées.

d) Quelle est la fréquence cumulée d'un salaire de $25'000$ €, et celle d'un salaire de $50'000$ € ?

e) Quelle est la médiane ?

Exercice 6.35 En faisant une enquête auprès des 40 élèves de la classe du professeur MAT on leur a demandé trois choses :

X le nombre d'enfants dans leur famille
Y leur âge
W leur revenu au cours de l'été dernier

On a condensé les réponses dans les tableaux ci-dessous :

Nb. enfants	Nb. élèves
1	12
2	10
3	8
4	4
5	3
6	1
7	1
8	1

Âge	Nb. élèves
$[17;18[$	6
$[18;19[$	14
$[19;20[$	12
$[20;21[$	5
$[21;22[$	2
$[22;23[$	1

Revenu	Nb.élèves
$[0;400[$	10
$[400;800[$	5
$[800;1200[$	4
$[1200;1600[$	6
$[1600;2000[$	5
$[2000;2400[$	2
$[2400;3600[$	8

Calculer le mode ou la classe modale, la médiane et la moyenne de ces trois variables statistiques.

Exercice 6.36 Pourquoi ne peut-on pas parler de mesure de tendance centrale d'une variable statistique qualitative ?

Exercice 6.37 Comment peut-on déterminer graphiquement la médiane ?

Exercice 6.38 Voici un bilan du nombre de kilomètres parcourus par les voitures de la compagnie de taxis AXIT au cours de l'année dernière :

Nombre de kilomètres parcourus	Nombre de voitures
$[20'000;25'000[$	4
$[25'000;30'000[$	6
$[30'000;35'000[$	11
$[35'000;40'000[$	15
$[40'000;45'000[$	20
$[45'000;50'000[$	14
$[50'000;60'000[$	6
$[60'000;80'000[$	4

Calculer le mode ou la classe modale, la médiane et la moyenne de cette variable statistique.

Exercice 6.39 La variable statistique X représente la longueur en centimètres des cannes des joueurs de la ligue de hockey BUTE :

Longueur des cannes en cm	Nombre de cannes
$[120;130[$	6
$[130;140[$	21
$[140;150[$	45
$[150;160[$	55
$[160;170[$	26
$[170;180[$	7

a) Construire le tableau de distribution des fréquences et des fréquences cumulées croissantes.

b) Calculer Q_3.

c) Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes.

d) Situer Q_3.

Exercice 6.40 Dans un groupe de 40 étudiants, on a fait une étude sur le nombre d'heures de classe de chacun, la journée de mardi :

4	5	6	3	4	2	2	6	7	4
6	7	4	4	1	3	3	5	1	6
5	5	5	5	5	5	6	3	4	2
3	5	8	4	4	3	4	3	6	5

a) Construire le tableau complet de distribution des fréquences.

b) Calculer le mode ou la classe modale, la médiane et la moyenne.

c) Calculer Q_3.

Exercice 6.41 Le bar ASOUS a fait une étude sur l'âge de ses clients lors d'une soirée spéciale de fin d'été. On a donc demandé ce soir-là l'âge des 50 clients :

21	22	25	28	31	32	35	39	46	54
21	23	25	29	31	32	36	41	48	56
22	24	26	29	31	33	37	42	48	57
22	24	26	30	31	33	39	44	49	57
22	24	27	30	31	33	39	44	52	58

a) En regroupant en classes de largeurs égales, construire le tableau de distribution des fréquences.

b) Déterminer les mesures de tendance centrale (mode ou classe modale, médiane et moyenne).

c) Calculer Q_1.

d) Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes.

e) Refaire la question c) à l'aide de la courbe des fréquences cumulées croissantes.

Indicateurs de dispersion

Exercice 6.42 Reprendre les données des exercices 13 et 21 et calculer :

a) l'étendue ;

b) la médiane ;

c) la moyenne ;

d) l'écart interquartile.

Exercice 6.43 Reprendre les données des exercices 15 et 24 et calculer :

a) l'étendue ;

b) la médiane ;

c) la moyenne ;

d) l'écart interquartile.

Exercice 6.44 Reprendre les données des exercices 16 et 25 et calculer :

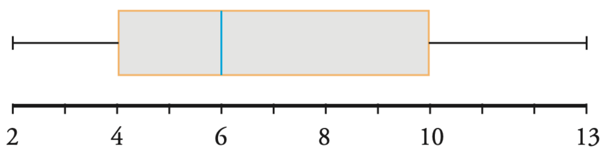
a) l'étendue ;

b) la médiane ;

c) la moyenne ;

d) l'écart interquartile.

Exercice 6.45 Dans une entreprise, on interroge un certain nombre d'employés pour savoir combien de mails ils ont envoyés dans une journée. Les résultats sont synthétisés par le diagramme ci-après :



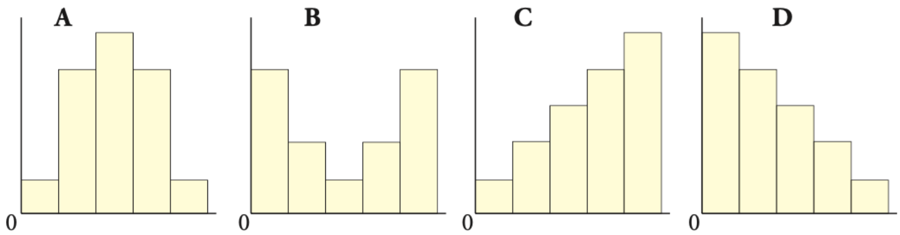
a) Calculer la médiane, Q_1, Q_3 et l'écart interquartile.

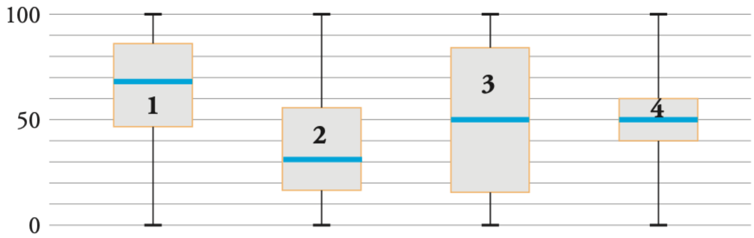
b) Les employés interrogés ont envoyé entre .... et .... mails.

c) La moitié des employés interrogés ont envoyé plus de .... mails.

d) .... % des employés interrogés ont envoyé entre 4 et 10 mails.

Exercice 6.46 Associer ces quatre histogrammes aux quatre boîtes à moustaches ci-après :



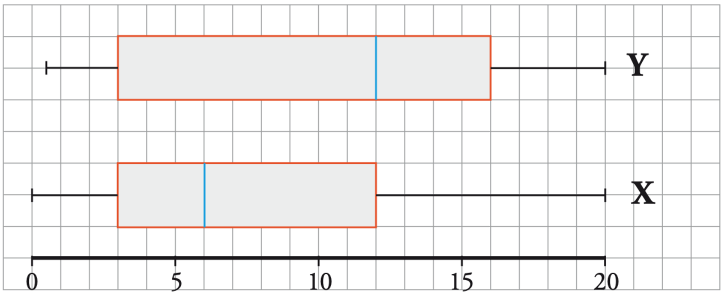


Exercice 6.47 Dessiner la boîte à moustache de la série statistique des exercices 13, 21 et 42.

Exercice 6.48 Dessiner la boîte à moustache de la série statistique des exercices 16, 25 et 44.

Exercice 6.49 Dessiner la boîte à moustache de la série statistique des exercices 15, 24 et 43.

Exercice 6.50 Dans deux villes X et Y, on a sélectionné un échantillon de 1000 personnes à qui on a demandé combien de cigarettes ils fumaient par jour. Les résultats ont été présentés sous la forme d'une boîte à moustaches ci-après :



a) Quelle est la valeur de la médiane, Q_1 et Q_3 pour les deux villes ?

b) Quelle est la ville la plus consommatrice de cigarettes ?

c) Peut-on affirmer qu'un quart de la population de la ville X fume plus de 3 cigarettes par jour ?

d) Peut-on affirmer que la moitié des habitants de la ville Y fume moins de 11 cigarettes par jour ?

Exercice 6.51 On a mesuré dans une classe le poids des filles (Y) et des garçons (X). Les valeurs observées sont les suivantes :

Y	52	56	60	52	80	54	56	56	50	58	58	48	60	52
X	70	62	64	72	64	68	84	61	72	68	74	64		

Représenter sur un même graphique les deux boîtes à moustaches afin de pouvoir faire une rapide comparaison.

Exercice 6.52 Les données suivantes représentent les valeurs d'un indicateur statistique calculé chaque année pour deux pays de l'UE. Cet indicateur mesure l'émission totale de gaz à effet de serre. *(Données : INSEE)*.

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Espagne	110,0	107,7	114,8	118,5	128,2	133,1	133,2	139,1	141,6	147,0
France	98,5	101,3	100,1	102,5	99,6	98,7	99,0	97,4	97,9	97,9

a) Calculer la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3 pour les deux pays.

b) Tracer les boîtes à moustaches pour l'Espagne et la France et comparez-les.

Exercice 6.53 À un test de mathématique, noté sur 10 points, les élèves de 2 classes ont obtenu les notes suivantes :

Classe A : 4 5 3 4 5 4 3 4 6 7 7 6 3 6 4 5 8 7 6 5 4 9 3 5 6 4 1 5 4 7 5

Classe B : 2 4 3 2 5 6 5 1 3 8 3 6 8 7 2 3 7 10 5 7 7 2 10 0 1 0 4 7 8 9 10

a) Compléter les colonnes n_i et f_i des tableaux ci-dessous :

Classe A

x_i	n_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
TOTAUX				

Classe B

x_i	n_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
TOTAUX				

b) Représenter pour chaque classe la série de notes par un diagramme en bâtons.

c) Calculer la moyenne de chacune des classes.

d) Compléter pour chacune des classes les colonnes $f_i x_i$ et $f_i x_i^2$ des tableaux ci-dessus et calculer la variance et l'écart-type de chacune des séries.

e) À partir des résultats précédents, faire une comparaison des deux classes.

f) Pour chacune des classes, donner la note du 16e élève.

Exercice 6.54 Calculer la variance et l'écart-type de la série statistique suivante.

Modalité	Effectif
25	4
30	8
35	11
38	15
41	18
52	12
55	7
60	5

Exercice 6.55 Calculer la variance et l'écart-type de la série statistique suivante.

Classe	Effectif
$[6;10[$	2
$[10;14[$	9
$[14;18[$	16
$[18;22[$	15
$[22;26[$	7
$[26;30[$	1

Exercice 6.56 En faisant une enquête auprès de 40 élèves, on leur a demandé le nombre d'enfants dans leur famille. Les résultats sont synthétisés dans le tableau ci-dessous :

Nombre d'enfants	Nombre d'élèves
1	12
2	10
3	8
4	4
5	3
6	1
7	1
8	1

a) Déterminer la moyenne, la médiane et le mode de la variable statistique.

b) Déterminer la variance et l'écart-type de la variable statistique.

Exercice 6.57 Calculer la variance et l'écart-type de la série statistique des exercices 13, 21 et 42.

Exercice 6.58 Calculer la variance et l'écart-type de la série statistique des exercices 15, 24 et 43.

Exercice 6.59 Calculer la variance et l'écart-type de la série statistique des exercices 16, 25 et 44.

Exercice 6.60 Lors d'une course de vélo, les 40 participants ont mis les temps suivants pour effectuer le parcours :

Temps en min	Effectif
[43 ;45[	2
[45 ;47[	3
[47 ;49[	7
[49 ;51[	11
[51 ;53[	8
[53 ;55[	6
[55 ;57[	3

a) Déterminer la moyenne, la médiane et la classe modale de la variable statistique.

b) Déterminer la variance et l'écart-type de la variable statistique.

Exercice 6.61 La maison de jeu PROBA a demandé à son croupier de noter pendant 60 jours consécutifs combien de fois par jour on obtient le 00 au jeu de la roulette. Le croupier a présenté les données suivantes :

Nombre de 00 par jour	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Nombre de jours	1	3	6	9	14	11	7	6	2	1

a) Calculer les mesures de tendance centrale.

b) Calculer la variance et l'écart-type.

Exercice 6.62 Claude s'entraîne dans le but de participer à une course d'un kilomètre. Il a noté pour chacune de ses 60 dernières courses d'entraînement son temps en secondes :

261	265	269	273	276	277	281	284	285	287
262	266	271	274	276	278	281	284	286	288
262	266	271	274	276	278	282	284	286	290
263	266	272	275	276	278	282	284	287	290
264	266	272	275	276	279	282	285	287	290
265	268	272	275	277	279	282	285	287	292

a) Identifier la population et la variable statistique étudiée. Est-elle discrète ou continue ?

b) Regrouper les données en classes de largeur 5 en prenant $b_0 = 260$, puis construire le tableau de distribution des fréquences.

c) Représenter l'histogramme et le polygone des fréquences.

d) Calculer les mesures de tendance centrale.

e) Calculer l'écart-type.

Exercice 6.63 Pour étudier l'effet de la caféine sur la fréquence cardiaque, on réalise l'expérience suivante :

Douze sujets prennent une tasse de café décaféiné, puis, 24 heures plus tard, une tasse de café « normal », avec caféine. La fréquence cardiaque, en nombre de battements par minute, est mesurée à chaque fois deux heures après l'absorption du café.

Le tableau suivant indique les résultats obtenus :

Sujet n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence cardiaque sans caféine	82	96	88	62	66	74	64	76	80	72	91	68
Fréquence cardiaque avec caféine	80	90	92	64	72	76	74	84	90	92	89	84

On note x_i la fréquence cardiaque du sujet numéro i après absorption de café décaféiné et y_i après absorption de café normal. On pose $z_i = y_i - x_i$.

a) Calculer la moyenne $\bar{z}$, l'écart-type σ et la médiane M de la série statistique $z_1, \dots, z_{12}$.

b) On pose : $t = \dfrac{\bar{z} \cdot \sqrt{n}}{\sigma}$ où n désigne le nombre de sujets (ici $n = 12$).
Lorsque $t > 2{,}2$ les statisticiens médicaux considèrent que la caféine augmente de façon significative la fréquence cardiaque deux heures après son absorption. Calculer t et conclure.

c) La variable statistique z_i est-elle plurimodale ?

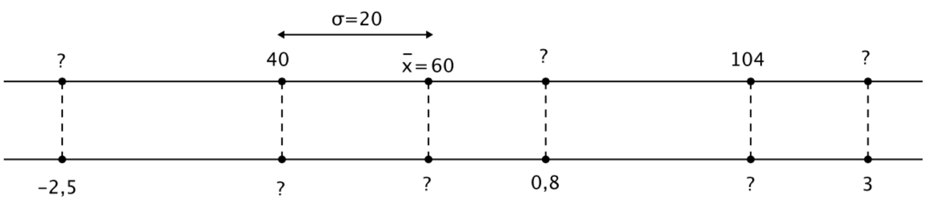
Exercice 6.64 On donne la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ de la variable statistique de l'exercice6.**??** :

$$\bar{x} = 146{,}85 \qquad \sigma = 12{,}879$$

a) Calculer la cote Z du huitième sapin.

b) Calculer la cote Z du trente-quatrième sapin.

Exercice 6.65 À l'aide de la représentation ci-dessous, déterminer les valeurs x et les cotes Z manquantes.



Exercice 6.66 Trois élèves se disputent le prix du meilleur financement de la semaine spéciale dans une école :

- Edgar a vendu 85 tablettes de chocolat, alors que la moyenne de vente est de 52 tablettes par élève avec un écart-type de 13 tablettes.
- Faustine a vendu 25 arrangement de fleurs, avec une moyenne de 12 arrangements et un écart-type de 6.
- Georges a vendu 75 abonnements au journal de l'école, avec une moyenne de 47 abonnements et un écart-type de 10.

Qui mérite le prix ?

Exercice 6.67 Voici les âges de 20 personnes qui se présentent au permis de conduire :

18	19	19	23	36	21	57	23	22	19
18	18	20	21	19	26	32	19	21	20

a) Calculer la moyenne et la médiane de cette distribution. Quelle est la mesure de tendance centrale la plus appropriée ?

b) Quel est le pourcentage de personnes de 25 ans au plus qui se présentent à l'examen ?

c) Quelle est la cote Z du candidat le plus âgé ? Interpréter le résultat.

d) Quel âge aurait un candidat avec une cote $Z = -1$? Est-ce possible ?

Exercice 6.68 Voici la durée d'hospitalisation en jours de 40 bébés nés à terme :

2	1	7	1	33	2	2	3	4	3
4	3	3	10	9	2	5	4	3	3
20	6	2	4	5	2	1	3	3	4
4	2	3	4	3	2	3	4	2	3

a) Quelle est la cote Z du bébé qui est resté 20 jours à l'hôpital ?

b) Calculer le pourcentage des bébés dont l'écart à la moyenne n'excède pas un écart-type. Quelle a été la durée de leur hospitalisation ?

Solutions

4 Solutions - Trigonométrie dans le triangle quelconque

4.1

a) $\cos(\alpha) \approx 0,91$
$\sin(\alpha) \approx 0,42$
$\tan(\alpha) \approx 0,47$

b) $\cos(\alpha) \approx -0,64$
$\sin(\alpha) \approx 0,77$
$\tan(\alpha) \approx -1,19$

c) $\cos(\alpha) \approx -0,97$
$\sin(\alpha) \approx -0,26$
$\tan(\alpha) \approx 0,27$

4.2

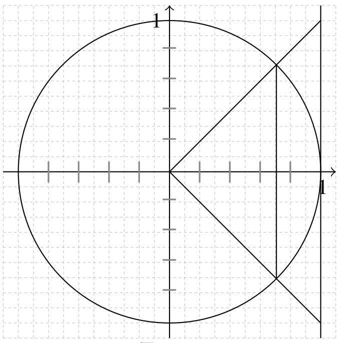
a) $\cos(\alpha) \approx 0,71$
$\sin(\alpha) \approx 0,71$
$\tan(\alpha) \approx 1$

b) $\cos(\alpha) \approx 0,87$
$\sin(\alpha) \approx -0,5$
$\tan(\alpha) \approx -0,58$

c) $\cos(\alpha) = -0,5$
$\sin(\alpha) \approx -0,89$
$\tan(\alpha) \approx 0,58$

4.3

a) $\alpha = 45°$

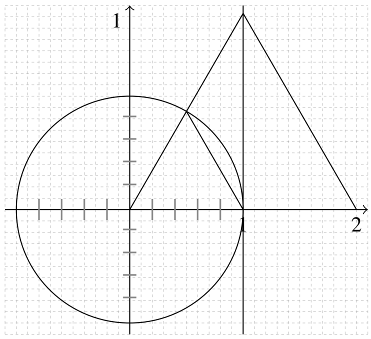


$\cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan(45°) = 1$

b) $\alpha = 60°$

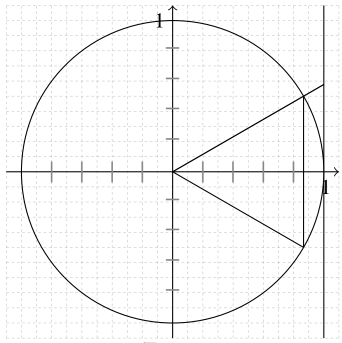


$\cos(60°) = \dfrac{1}{2}$

$\sin(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(60°) = \sqrt{3}$

c) $\alpha = 30°$



$\cos(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(30°) = \dfrac{1}{2}$

$\tan(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

4.4

a) $\cos(160°) = -\cos(20°) \approx -0,94$
$\sin(160°) = \sin(20°) \approx 0,34$
$\tan(160°) = -\tan(20°) \approx -0,36$
symétrie d'axe Oy

b) $\cos(340°) = \cos(20°) \approx 0,94$
$\sin(340°) = -\sin(20°) =\approx -0,34$
$\tan(340°) = -\tan(20°) \approx -0,36$
symétrie d'axe Ox

c) $\cos(200°) = -\cos(20°) \approx -0,94$
$\sin(200°) = -\sin(20°) =\approx -0,34$
$\tan(200°) = \tan(20°) \approx 0,36$
symétrie de centre O ou rotation de $180°$

d) $\cos(110°) = -\sin(20°) \approx -0,34$
$\sin(110°) = \cos(20°) =\approx 0,94$
rotation de $90°$

e) $\cos(70°) = \sin(20°) \approx 0,34$
$\sin(70°) = \cos(20°) =\approx 0,94$
symétrie d'axe $y = x$

f) $\cos(740°) = \cos(20°) \approx 0,94$
$\sin(740°) = \sin(20°) =\approx 0,34$
$\tan(740°) = \tan(20°) \approx 0,36$
rotation de 2 tours complets $(2 \cdot 360°)$

4.5

a) $c = 5,18$
$\alpha = 50,87°$
$\beta = 94,13°$

b) $\alpha = 97,26°$
$\beta = 45,90°$
$\gamma = 36,84°$

c) $c = 64,94$
$\alpha = 44,23°$
$\gamma = 128,51°$

4.6

a) impossible : Δ est négatif et le cercle ne coupe pas le 2ᵉ côté de l'angle.

b) $b = 5,20$, 1 solution : $\Delta = 0$ et le cercle est tangent au 2ᵉ côté de l'angle.

c) $b = 7,84$ ou $b = 2,55$, 2 solutions : Δ est positif et le cercle coupe le 2ᵉ côté de l'angle en 2 points.

d) $b = 10,39$, 1 solution : Δ est positif mais une des solutions est 0 et le cercle coupe le 2ᵉ côté de l'angle en 2 points dont un est A.

e) $b = 11,52$, 1 solution : Δ est positif mais une des solutions est négative et le cercle coupe le 2ᵉ côté de l'angle en 1 point.

4.7 $513,3$ m

4.8 a) $18,1$ b) $39,0$ c) $237,4$

4.9

a)	b)	c)
$\beta = 55°$	$\alpha = 32,28°$	$\gamma = 26,41°$
$b = 8,22$	$b = 134,26$	$a = 163,32$
$c = 6,45$	$c = 66,62$	$b = 176,13$
$\mathscr{A} = 26,4$	$\mathscr{A} = 2388,5$	$\mathscr{A} = 6397,6$

4.10 $690,30$ m

4.11

a)	b)	c)
$\alpha = 23,56°$	$\alpha = 20,76°$	$\alpha = 56,98°$
$\beta = 64,06°$	$\beta = 146,26°$	$\beta = 25,66°$
$\gamma = 92,38°$	$\gamma = 12,98°$	$\gamma = 97,36°$

4.12

a)	b)	c)	d)
$c = 41,92$	$\alpha = 82,37°$	$\alpha = 7,89°$	$b = 123,41$
$\alpha = 58,79°$	$b = 17,55$	$\gamma = 141,46°$	$\alpha = 37,95°$
$\beta = 90,52°$	$c = 13,10$	$c = 444,92$	$\gamma = 24,24°$
$\mathscr{A} = 1472$	$\mathscr{A} = 113,9$	$\mathscr{A} = 22'241,9$	$\mathscr{A} = 2173,9$

4.13 $27,61$ m

4.14 $AC = 26,46$ cm $BD = 43,59$ cm $\theta = 64,31°$

4.15

Le triangle BCD est isocèle en C.

$\beta = 101,26°$ $\gamma = 67,34°$ $\delta = 81,4°$ $\mathscr{A}_{ABCD} = 23,7$ cm^2

5 Solutions - Analyse combinatoire

5.1 24 tenues

5.2 720 commandes

5.3 $24+2880=2904$ programmes

5.4 a) 256 b) 64 c) 81 d) 108 e) 175 f) 24 g) 0 h) 4

5.5 a) $2'340'000$ b) $1'920'000$ c) $2'300'030$

5.6 a) $3!=6$ b) $\dfrac{3!}{2}=3$ c) $7!=5040$ d) $\dfrac{8!}{2!}=20'160$ e) $\dfrac{12!}{4!\cdot 2!}=9'979'200$ f) $\dfrac{11!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}=34650$

5.7 $3!\cdot 5!\cdot 3!\cdot 8!=174'182'400$

5.8 $6\cdot 30=180$

5.9 $4!=24$

5.10 a) $\dfrac{9!}{9}=40'320$ b) $2\cdot\dfrac{8!}{8}=10'080$ c) $40'320-10080=30'240$

5.11 a) $5!=120$ b) $5!=120$

5.12 a) $\dfrac{10!}{7!\cdot 3!}=120$ b) $\dfrac{10!}{5!\cdot 3!\cdot 2!}=2'520$

5.13 $4!=24$

5.14 $3\cdot\dfrac{4!}{2!}=36$

5.15 $3\cdot 4!+2\cdot 3!+2\cdot 2!+1+1=90$ ou $120-4!-3!=90$

5.16 a) $\dfrac{26!}{21!} = 7'893'600$ b) $26^5 = 11'881'376$

5.17 1680

5.18 $5'040$

5.19 $6'720$

5.20 $2^6 = 64$

5.21 a) $32'768$ b) $6'720$

5.22 a) 676 b) Au moins 677 habitants.

5.23 a) 6 b) 2

5.24 720

5.25 a) $4'080$ b) 1 c) 6 d) 5

5.26 a) $2^{40} = \sim 1'099$ milliards b) Parmi vos ancêtres, il y a des recoupements, ainsi plusieurs sont comptés à double (ou plus).

5.27 a) $\dfrac{36!}{30! \cdot 6!} = 1'947'792$ b) $\dfrac{32!}{30! \cdot 2!} = 496$ c) $1'041'600$

5.28 a) 32 b) $1'008$ c) $175'616$ d) $31'776$

5.29 Le nombre de tiercés non ordonnés sera $\dfrac{4'080}{6} = 680$.

5.30 $\dfrac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3!} = 2'024$

5.31 $\dfrac{12 \cdot 11}{2!} = 66$

5.32 $\dfrac{9 \cdot 8}{2!} = 36$

5.33 $\dfrac{31 \cdot 30 \cdot 29}{3!} = 4495$. Oui, c'est vrai !

5.34 $\dfrac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \dfrac{6 \cdot 5}{2!} = 252 \cdot 15 = 3'780$

5.35 a) $8'145'060$ b) $20 \cdot 9139 = 182'780$ c) 1

5.36 $\dfrac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$

5.37 a) $2^{20} = 1'048'576$ b) 20 c) $\dfrac{20!}{4! \cdot 16!} = 4'845$ d) $\dfrac{20!}{10! \cdot 10!} = 184'756$ e) 1

5.38 a) 220 b) $1'320$ c) $1'728$

5.39 a) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ b) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ c) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

5.40 a) $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 340$ b) $4 + (4 \cdot 3) + (4 \cdot 3 \cdot 2) + (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 64$

5.41 a) $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 13'440$ b) $4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 5'376$

5.42 $3^{13} = 1'594'323$

5.43 $4! \cdot 5! = 2880$

5.44 a) $\dfrac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$ b) $\dfrac{5!}{3! \cdot 2!} + \dfrac{5!}{2! \cdot 2!} = 40$

5.45 $\dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$

5.46 a) $8! = 40'320$ b) $2 \cdot 7! = 10'080$ c) $2{\cdot}4!{\cdot}4! = 1'152$ d) $4! \cdot 5! = 2'880$ e) $2^4 \cdot 4! = 384$

5.47 a) $\frac{12!}{9!} = 1320$ b) $\frac{12!}{9! \cdot 3!} = 220$

5.48 a) $C_2^3 \cdot C_3^3 = 3$ c) $\frac{6!}{2!} = 360$ e) $6^4 = 1296$

b) $6! = 720$ d) $C_4^6 = 15$ f) 72

5.49 a) $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ b) $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ c) $1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$

5.50 a) $C_8^{10} = 45$ b) $C_5^7 = 21$ c) $5 \cdot C_1^5 + C_2^5 = 35$

5.51 $\frac{4!}{2! \cdot 2!}$ = 6 chemins différents

5.52 a) $\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$ b) $\frac{3!}{2!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 30$

5.53 $C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + 1 = 31$

5.54 a) $1 \cdot 9^3 + 3 \cdot 8 \cdot 9^2 = 2673$ b) $8 \cdot 9^3 = 5832$ c) $8 + 3 \cdot 9 = 35$

6 Solutions - Statistiques descriptives

6.1

a) la population
b) un individu
c) caractère
d) quantitative
e) discrète
f) quantitative continue
g) qualitative / modalités
h) un échantillon
i) le produit
j) le prix / quantitative discrète (ou continue)
k) les voitures vendues
l) la couleur / qualitative
m) les élèves de la classe
n) la taille / quantitative continue
o) les collégiens
p) l'opinion / qualitative

6.2

a) Enfants de classes de troisième primaire
b) sport d'hiver préféré
c) {Hockey ; Patinage ; Ski ; Ski de fond ; Glissade ; Raquette}

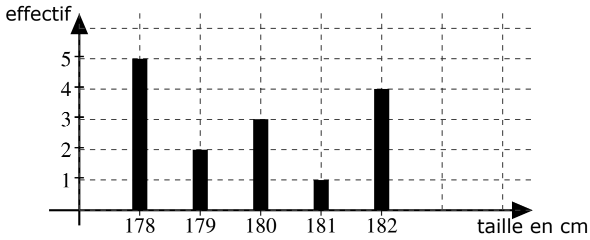
6.3

a) l'effectif
b) l'effectif de la population
c) fréquence / $\frac{\text{effectif}}{\text{effectif population}}$

6.4

Prix constater en Frs	35	36	37	38	39	40	Total
Nb de points de vente	5	8	5	3	2	2	25
Fréquence	0,2	0,32	0,2	0,12	0,08	0,08	1
Fréquence en %	20	32	20	12	8	8	100

6.5

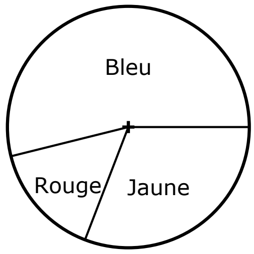


6.6

a)

Couleur	Effectif	Fréquence	Angle en °
Bleu	7	0,538	194
Rouge	2	0,154	55
Jaune	4	0,308	111
Total	13	1	360

b)



6.7

a) Population : Employés de l'entreprise

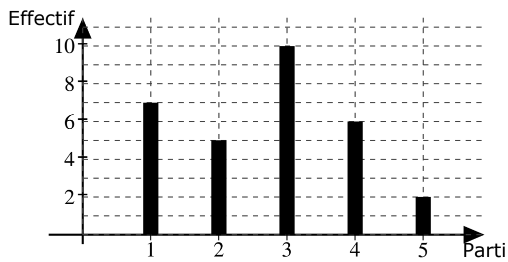
Variable statistique : parti politique

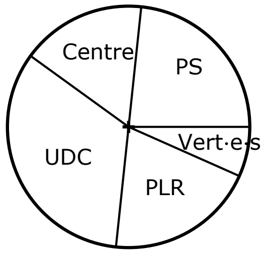
b) { PS, PLR, Centre, UDC, Vert·e·s }

c) Qualitative nominale

d) ***Répartition des employés selon le parti politique.***

Parti	Effectif	Fréquence en %
1. PS	7	23,3
2. PLR	6	20
3. Centre	5	16,7
4. UDC	10	33,3
5. Vert·e·s	2	6,7
Total	30	100



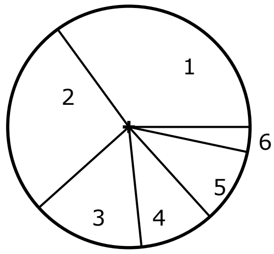


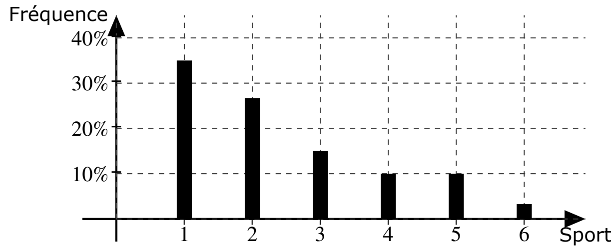
6.8

a) **Répartition des élèves selon leur sport d'hiver préféré.**

Sport	Effectif	Fréquence	Fréquence en %
1. Hockey	21	0,350	35,0
2. Ski	16	0,267	26,7
3. Patinage	9	0,150	15,0
4. Raquette	6	0,100	10,0
5. Glissade	6	0,100	10,0
6. Ski de fond	2	0,033	3,3
Total	60	1,000	100,0

b)





6.9

a) Population : étudiants

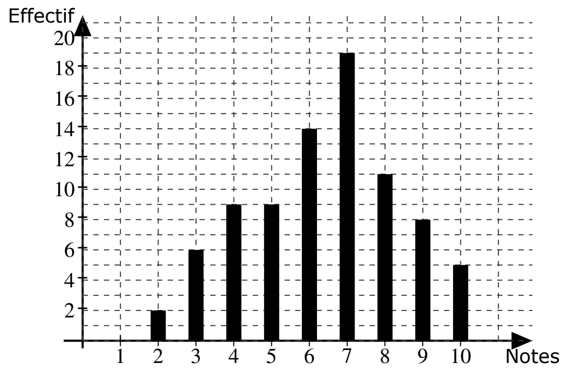
Variable statistique : note obtenue au test de statistiques

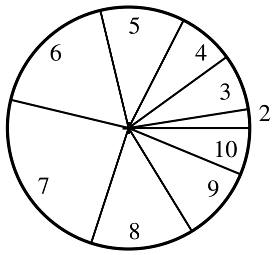
b) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

c) Quantitative discrète

d) ***Répartition des étudiants selon la note de statistiques.***

Note	Effectif	Fréquence en %
2	2	2,5
3	6	7,5
4	6	7,5
5	9	11,3
6	14	17,5
7	19	23,8
8	11	13,8
9	8	10
10	5	6,3
Total	80	100





6.10

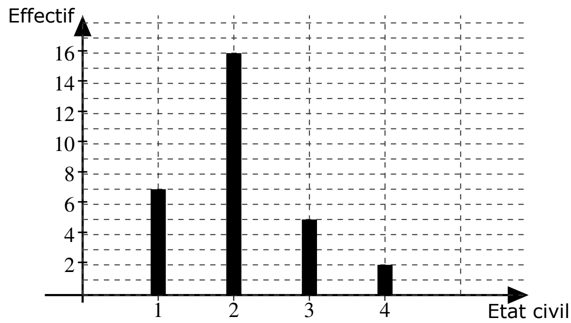
a) Population : employés d'une entreprise

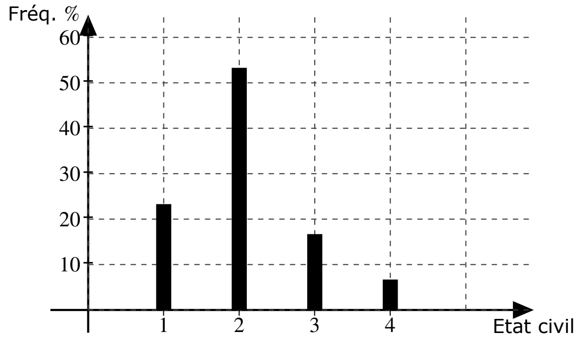
Variable statistique : état civil

b) { Célibataire, Marié·e, Divorcé·e, Veu·f·ve }

c) ***Répartition des employés selon leur état civil.***

État civil	n_i	f_i en %
1. Célibataire	7	23,3
2. Marié·e	16	53,3
3. Divorcé·e	5	16,7
4. Veu·f·ve	2	6,7
Total	30	100





f) Les deux diagrammes en bâtons sont identiques seules les échelles changent.

6.11 a) 44% b) 40%

6.12 a) Correcte b) Fausse. La hausse n'est que de $\frac{8}{4778} = 0,17\%$

6.13

a) Les voitures vendues pendant l'année.

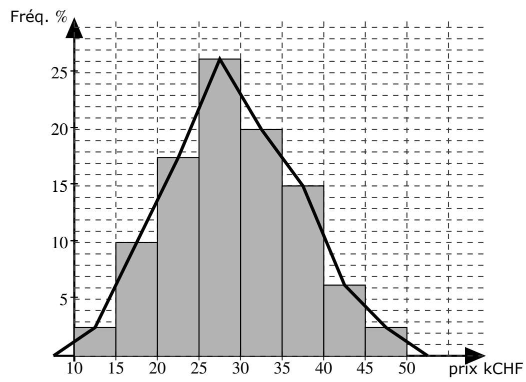
b) Le prix de vente des voitures.

c) Continue

d) **Répartition des voitures selon leur prix.**

$[b_{i-1};b_i[$	c_i	n_i	f_i
$[10'000;15'000[$	12'500	2	0,025
$[15'000;20'000[$	17'500	8	0,100
$[20'000;25'000[$	22'500	14	0,175
$[25'000;30'000[$	27'500	21	0,2625
$[30'000;35'000[$	32'500	16	0,200
$[35'000;40'000[$	37'500	12	0,150
$[40'000;45'000[$	42'500	5	0,0625
$[45'000;50'000[$	47'500	2	0,025
Total		80	1,000

e)

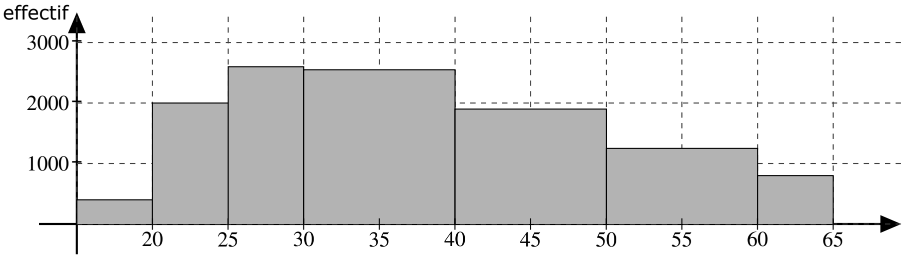


6.14

a) L'aire des colonnes n'est pas proportionnelle à l'effectif de chaque classe.

b)

Répartition des chômeurs par classe d'âge.



6.15

a) Les étudiants qui désirent faire partie de l'équipe de football du gymnase.

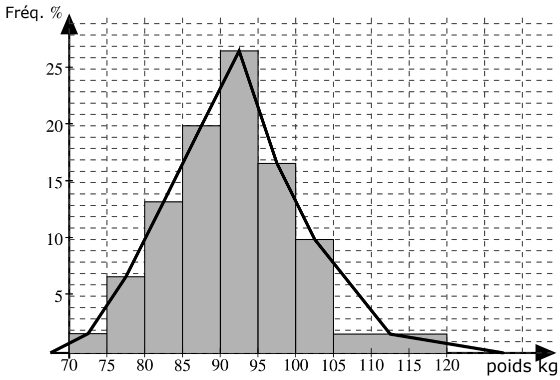
b) Le poids des étudiants qui désirent faire partie de l'équipe de football du gymnase.

c) Continue.

d) **Répartition des étudiants de l'équipe de foot selon leur poids.**

$[b_{i-1};b_i[$	c_i	n_i	f_i
$[70;75[$	72,5	1	0,017
$[75;80[$	77,5	4	0,067
$[80;85[$	82,5	8	0,133
$[85;90[$	87,5	12	0,200
$[90;95[$	92,5	16	0,266
$[95;100[$	97,5	10	0,167
$[100;105[$	102,5	6	0,100
$[105;120[$	112,5	3	0,050
Total		60	1,000

e)



6.16

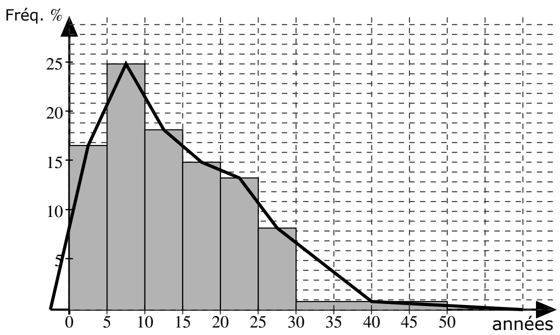
a) L'ensemble des ouvriers de l'usine PRO.

b) Le nombre d'années d'ancienneté des ouvriers.

c) **Répartition des ouvriers selon leur ancienneté.**

$[b_{i-1};b_i[$	c_i	n_i	f_i
$[0;5[$	2,5	10	0,167
$[5;10[$	7,5	15	0,250
$[10;15[$	12,5	11	0,183
$[15;20[$	17,5	9	0,150
$[20;25[$	22,5	8	0,134
$[25;30[$	27,5	5	0,083
$[30;50[$	40,0	2	0,033
Total		60	1,000

d)

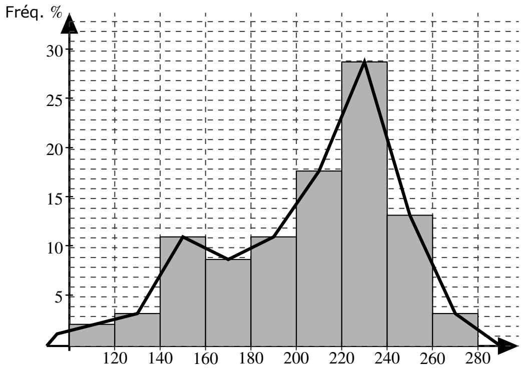


6.17

a) **Répartition des jours de l'été selon le nombre d'infractions constatées.**

Classe	c_i	n_i	f_i
[100 ; 120[	110	2	0,022
[120 ; 140[	130	3	0,033
[140 ; 160[	150	10	0,111
[160 ; 180[	170	8	0,088
[180 ; 2000[	190	10	0,111
[200 ; 220[	210	16	0,178
[220 ; 240[	230	26	0,289
[240 ; 260[	250	12	0,133
[260 ; 280[	270	3	0,033
	Totaux	90	1

b)



6.18

a) qualitative

b) qualitative

c) quantitative discrète

d) quantitative discrète

e) quantitative continue

f) qualitative

g) quantitative continue

h) qualitative

i) quantitative continue

j) qualitative

k) quantitative discrète

l) quantitative discrète

6.19

a) Quatitative continue

b) Les exploitations viticoles

c) Un nombre positif

d) 22%

e) $58,67\%$

6.20

a) Quantitative discrète

b) **Répartition des employés selon le nombre de jours d'absence.**

x_i	n_i	f_i	F_i
0	5	0,25	0,25
1	3	0,15	0,4
2	4	0,2	0,6
3	2	0,1	0,7
4	3	0,15	0,85
5	1	0,05	0,05
6	1	0,05	0,05
10	1	0,05	0,05
Totaux	20	1	

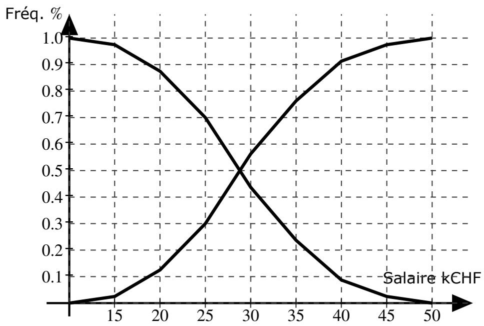
c) 85%, soit 17 employés

6.21

a) **Répartition des voitures selon leur prix.**

$[b_{i-1};b_i[$	f_i	F_i	F'_i
$[10'000;15'000[$	0,025	0,025	0,975
$[15'000;20'000[$	0,100	0,125	0,875
$[20'000;25'000[$	0,175	0,3	0,7
$[25'000;30'000[$	0,2625	0,563	0,437
$[30'000;35'000[$	0,200	0,763	0,237
$[35'000;40'000[$	0,150	0,913	0,087
$[40'000;45'000[$	0,0625	0,975	0,025
$[45'000;50'000[$	0,025	1	0
Total	1		

b)



6.22

1. a
2. c
3. d
4. b

6.23

a)

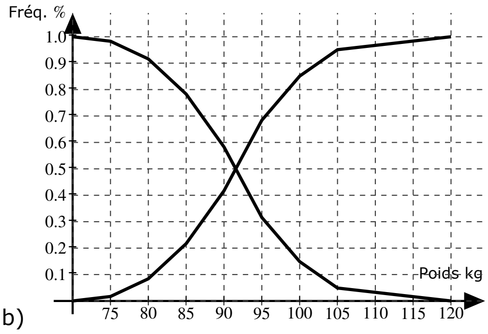
Taille(cm)	effectifs	fréq.cum.croiss.[%]
$[150;160[$	40	0,2
$[160;170[$	60	0,5
$[170;180[$	20	0,6
$[180;190[$	30	0,75
$[190;200[$	50	1

6.24

a)

$[b_{i-1};b_i[$	f_i	F_i	F'_i
$[70;75[$	0,017	0,017	0,983
$[75;80[$	0,067	0,084	0,916
$[80;85[$	0,133	0,217	0,783
$[85;90[$	0,200	0,417	0,583
$[90;95[$	0,266	0,684	0,316
$[95;100[$	0,167	0,851	0,149
$[100;105[$	0,100	0,951	0,049
$[105;120[$	0,050	1	0

b)



c) $14,9\%$

d) 60%

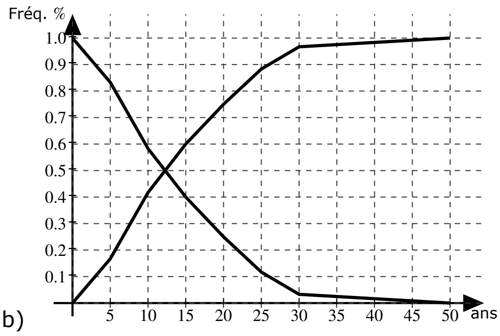
e) $P = 1,1 \cdot p$

6.25

a)

$[b_{i-1};b_i[$	f_i	F_i	F'_i
$[0;5[$	0,167	0,167	0,833
$[5;10[$	0,250	0,417	0,583
$[10;15[$	0,183	0,6	0,4
$[15;20[$	0,150	0,75	0,25
$[20;25[$	0,134	0,883	0,117
$[25;30[$	0,083	0,967	0,033
$[30;50[$	0,033	1	0

b)



c) $33,3\%$

d) 25%

e) $y = 100x + 500$

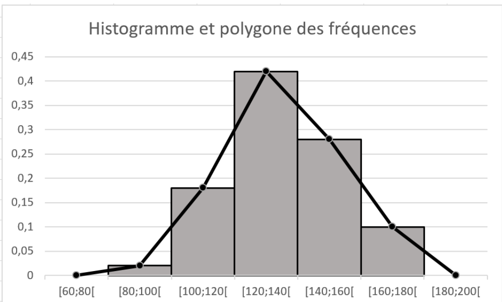
6.26

a) La population est l'ensemble des 50 véhicules passant sur l'autoroute de Fribourg un samedi soir et la variable statistique, leur vitesse.

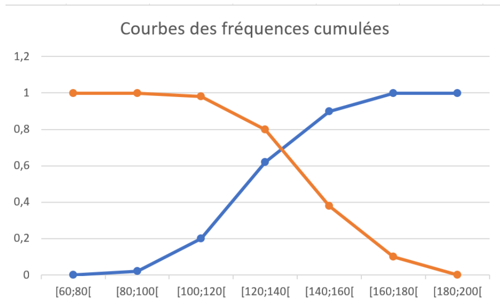
b)

Classes	c_i	n_i	f_i	F_i	F'_i
$[80;100[$	90	1	0,02	0,02	1
$[100;120[$	110	9	0,18	0,20	0,98
$[120;140[$	130	21	0,42	0,62	0,80
$[140;160[$	150	14	0,28	0,90	0,38
$[160;180[$	170	5	0,1	1	0,1
Totaux		50	1		

d)



e)



f) 20%

g) 10%

6.27

a) Les voitures particulières neuves immatriculées en 2015.

b) Le type d'énergie consommée par ces voitures.

c)

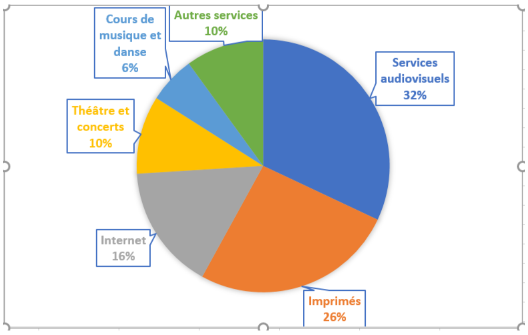
Type d'énergie	Milliers de voitures	f_i	F_i
Essence	1450	0,687	0,687
Diesel	630	0,298	0,985
Hybride	23	0,011	0,996
Autres	9	0,0043	1
Totaux	2112	1	

6.28

a) Non, qualitative. Car les modalités sont services audiovisuels, Imprimés, Internet, Théâtre et concerts, Cours de musique et danse, autres services.

b) Oui

c) Non, les dépenses culturelles représentent peut être 5% des dépenses totales des ménages suisses, mais toutes les dépenses culturelles doivent représenter 100%.



6.29

a) Quantitative discrète ou continue à vous de faire le choix suivants les questions posées.

b)

x_i	n_i	f_i	F_i
0	5	0.25	0.25
1	3	0.15	0.4
2	4	0.2	0.6
3	2	0.1	0.7
4	3	0.15	0.85
5	1	0.05	0.9
6	1	0.05	0.95
7	0	0	0.95
8	0	0	0.95
9	0	0	0.95
10	1	0.05	1
Totaux	20	1	

c) 85% des employés ont moins de 5 jours d'absence.

6.30

a) La modalité ou la classe qui a le plus grand effectif.

b) $X_0 = 36$

c) $M = 7$

d) $M = 8,5$

e) 35 35 35 35 35 36 36 36
36 36 36 36 36 37 37 37
37 37 38 38 38 39 39 40
40

f) 25 / 13e/ $M = 36$

g) $\bar{x} = \dfrac{5\cdot 35 + 8\cdot 36 + 5\cdot 37 + 3\cdot 38 + 2\cdot 39 + 2\cdot 40}{25}$
$= 0,2\cdot 35 + 0,32\cdot 36 + 0,2\cdot 37 + 0,12\cdot 38 + 0,08\cdot 39 + 0,08\cdot 40 = 36,8$

6.31 $X_0 = 14$ $M = 14$ $\bar{x} = 13,5$

6.32 $X_0 = [4;6[$ $M = 5,73$ $\bar{x} = 5,75$

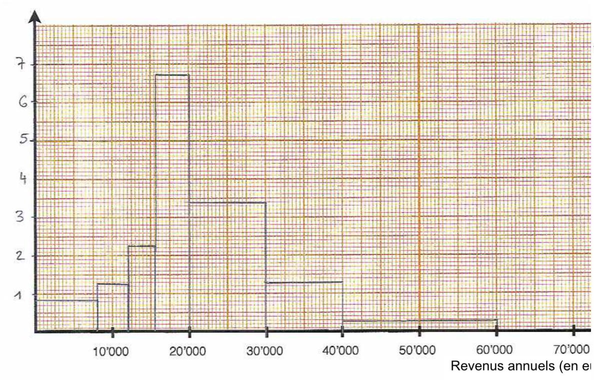
6.33 $X_0 = [170;180[$ $M = 172,7$ $\bar{x} = 170,2$

6.34

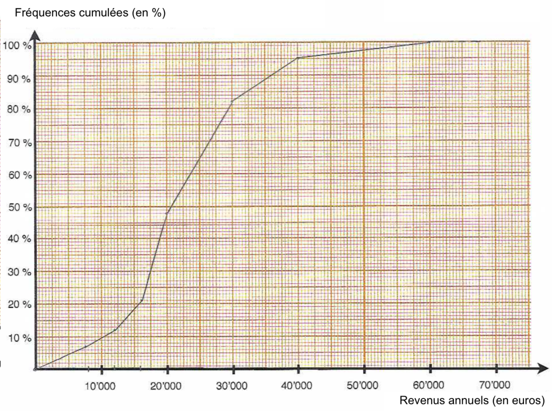
a)

Salaires (en milliers d'€)	[0 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 60[	Total
Fréquences en %	7	5	9	27	34	13	5	100
Amplitudes $a_i = x_{i+1} - x_i$	8	4	4	4	10	10	20	
Hauteurs $h_i = f_i / a_i$	0,875	1,25	2,25	6,75	3,4	1,3	0,25	
Fréquences cumulées %	7	12	21	48	82	95	100	

b)



c)



d) 65% $97,5\%$ e) $M = 20'588$

6.35

X :	$X_0 = 1$	$M = 2$	$\bar{x} = 2,7$
Y :	$Y_0 = [18;19[$	$M = 19$	$\bar{y} = 19,15$
W :	$W_0 = [0;400[$	$M = 1'266,67$	$\bar{w} = 1'370$

6.36 Les modalités ne sont pas des nombres. Par exemple, comment pourrait-on donner un sens à la moyenne des partis politiques pour lesquels on a voté.

6.37 Il faut déterminer à partir de la courbe des fréquences relatives cumulées la valeur de la variable statistique qui correspond à une fréquence relative cumulée croissante de $0,5$.

6.38 classe modale $= [40'000;45'000[$ $M = 41'000$ $\bar{x} = 41'250$

6.39

a) **Répartition des cannes des joueurs selon leur longueur en centimètres**

$[b_{i-1};b_i[$	n_i	f_i	F_i
$[120;130[$	6	0,0375	0,0375
$[130;140[$	21	0,013125	0,16875
$[140;150[$	45	0,28125	0,45
$[150;160[$	55	0,34375	0,79375
$[160;170[$	26	0,16125	0,95625
$[170;180[$	7	0,04375	1
Total	160	1,000	

b) $Q_3 = 158,72$

c) -

d) -

6.40

a) **Répartition des étudiants selon le nombre d'heures de classe le mardi**

x_i	n_i	f_i	F_i
1	2	0,05	0,05
2	3	0,075	0,125
3	7	0,175	0,3
4	9	0,225	0,525
5	10	0,25	0,775
6	6	0,1	0,925
7	2	0,25	0,975
8	1	0,1	1
Total	40	1,000	

b) $X_0 = 5$ $M = 4$ $\bar{x} = 4,325$

c) $Q_3 = 5$

6.41

a) **Répartition des étudiants selon leur âge lors de cette soirée spéciale**

$[b_{i-1};b_i[$	n_i	f_i	F_i
$[20;25[$	10	0,2	0,2
$[25;30[$	8	0,16	0,36
$[30;35[$	12	0,24	0,6
$[35;40[$	6	0,12	0,72
$[40;45[$	4	0,08	0,8
$[45;50[$	4	0,08	0,88
$[50;55[$	2	0,04	0,92
$[55;60[$	4	0,08	1
Total	50	1,000	

b) classe modale = $[30;35[$ $M = 32,92$
$\bar{x} = 35,1$

c) $Q_1 = 26,5625$

d) -

e) -

6.42

a) $E = 37'820$

b) $M = 27'860$

c) $\bar{x} = 29'187,5$

d) $Q_1 = 23'985$, $Q_3 = 34'620$, $I = 10'635$

6.43

a) $E = 46,1$

b) $M = 91,45$

c) $\bar{x} = 91,66$

d) $Q_1 = 86,55$, $Q_3 = 97,15$, $I = 10,6$

6.44

a) $E = 47,1$

b) $M = 12,05$

c) $\bar{x} = 13,82$

d) $Q_1 = 6,75$, $Q_3 = 19,05$, $I = 12,3$

6.45

a) $M = 6$, $Q_1 = 4$, $Q_3 = 10$
écart interquartile $I = 6$

b) 2 et 13

c) 6

d) 50%

6.46

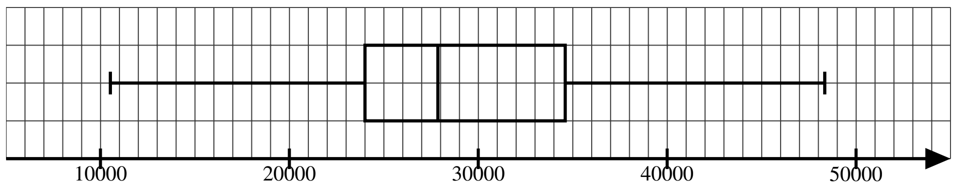
A : Valeurs concentrées au centre + symétriques $\Rightarrow 4$

B : Valeurs très étendues + symétriques $\Rightarrow 3$

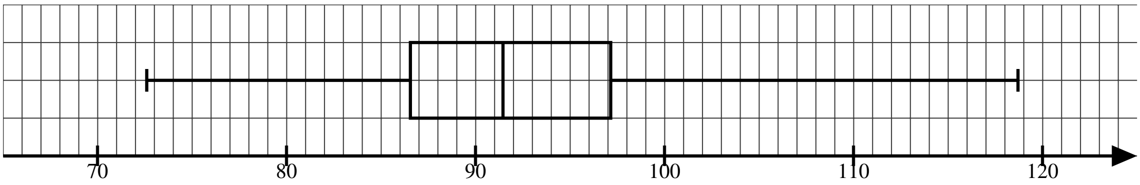
C : Étirement à gauche $\Rightarrow 1$

D : Étirement à droite $\Rightarrow 2$

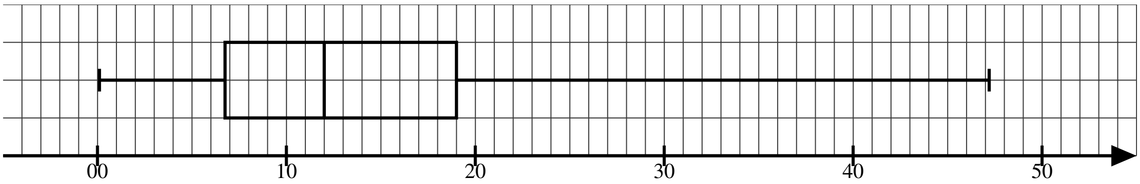
6.47



6.48



6.49



6.50

a) Ville Y : $M = 12$; $Q_1 = 3$; $Q_3 = 16$ Ville X : $M = 6$; $Q_1 = 3$; $Q_3 = 12$

b) La médiane et Q_3 sont plus élevés pour Y que pour X. Donc Y est plus consommatrice que X.

c) Non, le quart de la population fume moins de trois cigarettes par jour.

d) Non, la moitié des habitants de Y fument moins de douze cigarettes par jour.

6.51 Distribution (Y) : $Q_1 = 52$; $M = 56$; $Q_3 = 58$ Distribution (X) : $Q_1 = 64$; $M = 68$; $Q_3 = 72$

6.52

a) France : $M = 130{,}65$ $Q_1 = 115{,}725$ $Q_3 = 137{,}625$

Espagne : $M = 98{,}85$ $Q_1 = 98{,}05$ $Q_3 = 99{,}975$

b) -

a)

Classe A

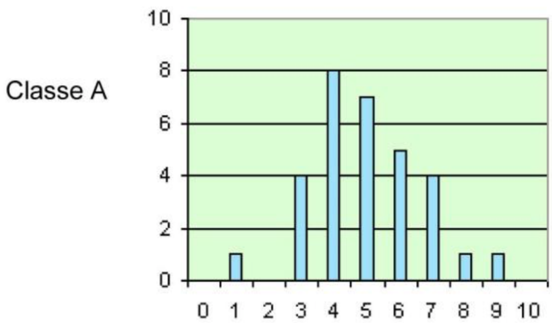
x_i	n_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	0	0	0	0
1	1	0,032	0,032	0,03
2	0	0	0	0
3	4	0,129	0,387	1,16
4	8	0,258	1,032	4,13
5	7	0,226	1,129	5,65
6	5	0,161	0,968	5,81
7	4	0,129	0,903	6,32
8	1	0,032	0,258	2,06
9	1	0,032	0,29	2,61
10	0	0	0	0
Total	31	1	5	27,77

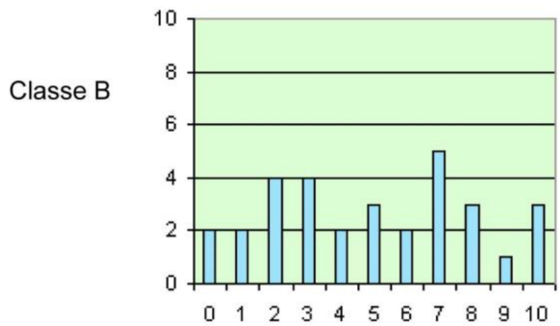
Classe B

x_i	n_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	2	0,065	0	0
1	2	0,065	0,065	0,06
2	4	0,129	0,258	0,52
3	4	0,129	0,387	1,16
4	2	0,065	0,258	1,03
5	3	0,097	0,484	2,42
6	2	0,065	0,387	2,32
7	5	0,161	1,129	7,90
8	3	0,097	0,774	6,19
9	1	0,032	0,29	2,61
10	3	0,097	0,968	9,68
Total	31	1	5	33,90

b) On obtient pour chacune des classes le diagramme à barres ci-dessous :

6.53





c) La moyenne de la classe A est donnée par $\bar{x}_A = 5$
La moyenne de la classe B est donnée par $\bar{x}_B = 5$

d) Pour la classe A, la variance et l'écart-type sont $\sigma^2(A) \approx 2,77$ et $\sigma_A \approx 1,67$
Pour la classe B, la variance et l'écart-type sont $\sigma^2(B) \approx 8,90$ et $\sigma_B \approx 2,98$

e) La classe A et la classe B ont la même moyenne, mais au vu de l'écart-type de chaque série, on peut dire que la classe A est une classe homogène alors que la classe B est une classe hétérogène.

f) Pour la classe A, la note du 16e élève est : 5. Pour la classe B, la note du 16e élève est : 5.

6.54 $\sigma^2(X) = 88,799$ $\sigma(X) = 9,423$

6.55 $\sigma^2(X) = 19,770$ $\sigma(X) = 4,446$

6.56 a) $\bar{x} = 2,7$ $M = 2$ $X_0 = 1$ b) $\sigma^2(X) = 3,01$ $\sigma(X) = 1,74.$

6.57 a) $V(x) = 913'881'250$ b) $\sigma(x) = 29'282,7$

6.58 a) $V(x) = 9'279,4$ b) $\sigma(x) = 92,99$

6.59 a) $V(x) = 273,04$ b) $\sigma(x) = 16,52$

6.60
a) $\bar{x} = 50,50$ $M = 50,45$ classe modale = $[49;51[$
b) $\sigma^2(X) = 9,35$ $\sigma(X) = 3,06$.

6.61 a) $X_0 = 11$ $M = 11$ $\bar{x} = 11,37$ b) $\sigma^2(X) = 3,632$ $\sigma(X) = 1,906$

6.62
a) Les 60 dernières courses d'entraînement de Claude. Le temps pour parcourir 1 km. La variable est continue.
b) -
c) -
d) classe modale = $[275;280[$ $M = 278$ $\bar{x} = 277,75$
e) $\sigma^2(X) = 71,188$ $\sigma(X) = 8,437$

6.63
a) $\bar{z} = 5,67$ $\sigma = 7,30$ $M = 5$
b) $t = 2,69$, donc la caféine augmente de façon significative la fréquence cardiaque 2 heures après son absorption
c) oui, les trois modes sont -2, 2 et 10

6.64 a) $-0,92$ b) $1,1$

6.65

x	10	40	60	76	104	120
z	$-2,5$	-1	0	$0,8$	$2,2$	3

6.66 Cotes z des 3 élèves : $Z_E \cong 2,54$ $Z_F \cong 2,17$ $Z_G = 2,8$ Georges obtiendra le prix.

6.67
a) $\bar{x} = 23,55$ $M = 20,5$
b) 80%
c) $3,75$: le candidat est une exception
d) $14,62$ non, la situation serait illégale

6.68 a) $2,77$ b) 95% des bébés sont restés entre 1 et 10 jours.

Références

[1] T. Besson : 2C Exercices de mathématiques, juin 2020.

[2] H. Bovet : Diplôme 2D. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2008.

[3] J.-P. Favre : Mathématiques pour la Matu pro. Promath Editions, 2019.

[4] J.-P. Javet : Mathématiques 2C. http://www.javmath.ch, 2021.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch

sarah.delmonico@eduvaud.ch

Version du 9 juin 2023