Les nombres $\mathbb{C}$omplexes

2 M_{renf}

Jean-Philippe Javet

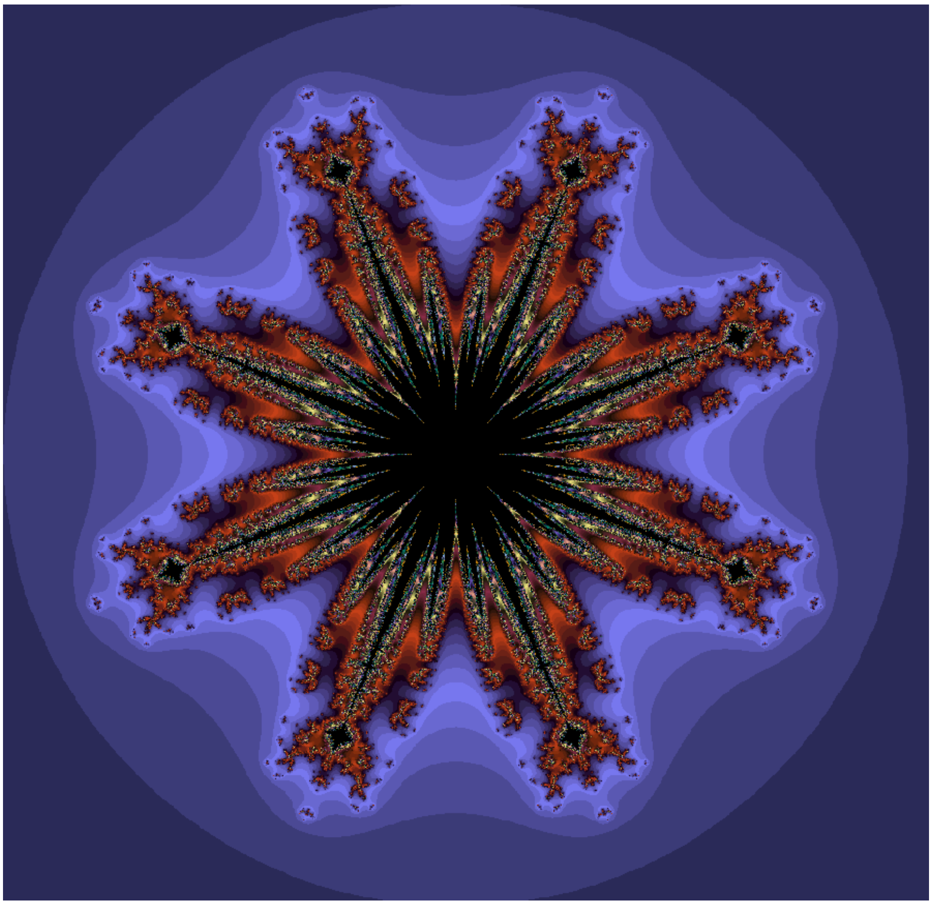
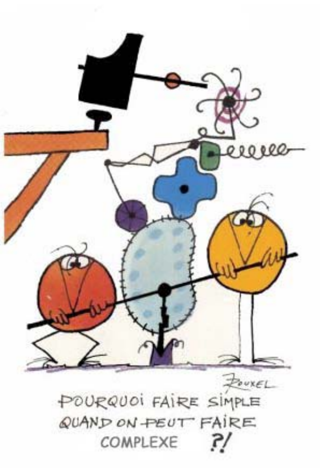


Image fractale (générée avec XaOS)

LES NOMBRES COMPLEXES

§1 À PROBLÈME SIMPLE, SOLUTION...« COMPLEXE »



Marcelle a 20 mètres de fil et a besoin de 40 mètres carrés pour faire paître paisiblement son éléphant mexicain à queue en tire-bouchon, mais à l'ouïe si sensible aux infrasons.

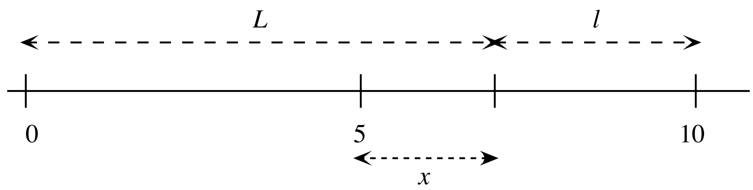
Où doit-elle planter ses piquets?

Soient L et l la longueur et la largeur du pré. Marcelle veut résoudre le système

$$\begin{cases} 2L + 2l = 20 \\ L \cdot l = 40 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Mais il y a un problème, lequel ?

Traduisons la condition L + l = 10 en un petit dessin :



Nous pouvons donc écrire les deux nombres cherchés sous la forme :

$$L = 5 + x \qquad l = 5 - x$$

N'oublions pas la deuxième condition

$40 = L \cdot l = (5 + x)(5 - x) \Rightarrow$

Nous en déduisons que x^2 = … *horreur ! Un carré négatif !*

Nous nageons en pleine mathématique-fiction, alors allons-y gaiement ! Introduisons une créature imaginaire :

Puisque $\qquad x^2 = (-1)\cdot(15)$

alors, extrayons la racine carrée de ce monstre :

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1)\cdot(15)} = \sqrt{-1}\sqrt{15} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1}\sqrt{15}$$

Fichtre, ce $\sqrt{-1}$ *nous inquiète, mais rassurons-nous, tout ceci n'est pas … réel.*
Revenons à notre problème simple en choisissant par exemple $x = \sqrt{-1}\sqrt{15}$ *,*

alors L + l vaut donc bien :

et L · l =

Donc, ces 2 *valeurs vérifient bien notre problème de départ.*

Les dimensions du pré seront de $5 + \sqrt{-1}\sqrt{15}$ *mètres de long et* $5 - \sqrt{-1}\sqrt{15}$ *mètres de large.*

Ce $\sqrt{-1}$ joue donc un rôle crucial. Donnons un nom à cette créature pour masquer son aspect monstrueux. Posons

$$\sqrt{-1} = \boldsymbol{i} \text{ soit encore } \boldsymbol{i}^2 = -1$$

Raphaël Bombelli
(1526-1572)

i ? Oui, ***i*** comme Imaginaire, car les savants italiens qui l'ont découvert au XVI[e] siècle ont été effarés par ce nombre venu d'ailleurs. On doit à Raphaël Bombelli la lumineuse idée de calculer avec ces nombres imaginaires en utilisant les règles usuelles du calcul, mais en tenant compte systématiquement du fait que $\boldsymbol{i}^2 = -1$.

Nous obtenons par exemple que :

$$(1 + \boldsymbol{i}) + (2 - 3\boldsymbol{i}) = 3 - 2\boldsymbol{i} \qquad \text{et}$$

$$(1 + \boldsymbol{i}) \cdot (2 - 3\boldsymbol{i}) = 2 - 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{i}^2 = 5 - \boldsymbol{i}$$

Giralomo Cardano
ou Jérôme Cardan
(1501- 1576)

En fait, historiquement, les nombres imaginaires ont été introduits pour être utilisés « momentanément » pour résoudre des problèmes réels : on fait apparaître ce qui nous manque puis on le fait disparaître pour retrouver l'équilibre.

Giralomo Cardano a en effet établi en 1547 qu'une solution de l'équation $x^3 = px + q$ est :

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Utilisons cette formule pour trouver une solution de (E_1) :

$$x^3 = 36x + 91$$

Faites de même avec (E_2) : $x^3 = 15x + 4$

Un léger problème apparaît. Pour s'en débarrasser, vérifier que

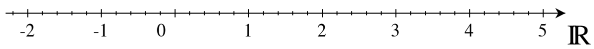
$(2 + i)^3 = 2 + 11i$ $(2 - i)^3 = 2 - 11i$ $(11i)^2 = -121$

En déduire alors une solution a de (E_2), puis deux autres en factorisant par $(x - a)$ à l'aide d'une division de polynômes.

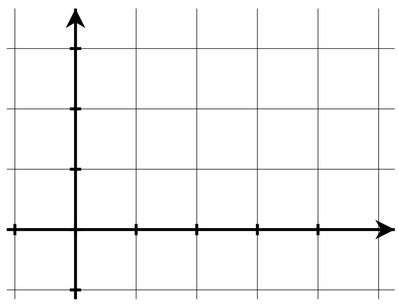
Exercice 1 : **a)** Calculer $(4 + \boldsymbol{i})^3$ et $(4 - \boldsymbol{i})^3$
b) En déduire, en appliquant la formule de Cardan, les solutions de l'équation $x^3 = 51x + 104$

§2 Représentation d'un nombre complexe et règles de calculs

Le monde réel est simple : c'est une droite où tous les nombres viennent se ranger "à la queue leu leu"



Mais alors où placer le nombre $3 + 2\boldsymbol{i}$? Ce nombre ne peut pas se placer sur cette même droite, faute de place. Ce nombre contient une partie réelle 3 mais également une partie imaginaire $2\boldsymbol{i}$. Ainsi, seule la partie réelle va y prendre place. Quant à la partie imaginaire, il faut la placer "dans les airs", dans une nouvelle dimension : un second axe.



Il a fallu attendre trois siècles pour mettre au point cette interprétation géométrique : les nombres complexes vivent donc dans un monde à deux dimensions. On les identifie à des points repérés par leurs coordonnées dans un système d'axes orthonormés.

Définitions :

- L'**ensemble des nombres complexes** noté $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres de la forme $z = a + b\boldsymbol{i}$ ou a et b sont des réels quelconques et $\boldsymbol{i}$ un nouveau nombre tel que $\boldsymbol{i}^2 = -1$.
- Le nombre a est appelé **partie réelle de z** et noté parfois $\mathrm{Re}(z)$
- Le nombre b est appelé **partie imaginaire de z** et noté parfois $\mathrm{Im}(z)$.
- La forme $z = a + b\boldsymbol{i}$ est appelée **forme algébrique de z**.

Règles de calculs :

Terminologie	Définition
Somme	$(a + b\boldsymbol{i}) + (c + d\boldsymbol{i}) = (a + c) + (b + d)\boldsymbol{i}$
Produit	$(a + b\boldsymbol{i}) \cdot (c + d\boldsymbol{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\boldsymbol{i}$
Différence	$(a + b\boldsymbol{i}) - (c + d\boldsymbol{i}) = (a - c) + (b - d)\boldsymbol{i}$
Multiplication par un réel k	$k(a + b\boldsymbol{i}) = ka + (kb)\boldsymbol{i}$

Devinette: Pourquoi la vie est-elle complexe ?

Elle a des composantes réelles et imaginaires

Remarque : Il n'est pas nécessaire de mémoriser les définitions ci-dessus. En fait, nous pouvons traiter ces symboles comme ayant les propriétés des nombres réels, à une exception près : nous remplaçons $\boldsymbol{i}^2$ par -1. Ainsi, pour le produit $(a + b\boldsymbol{i})(c + d\boldsymbol{i})$, nous utilisons simplement la distributivité et le fait que

$$(b\boldsymbol{i})(d\boldsymbol{i}) = bd\boldsymbol{i}^2 = bd(-1) = -bd.$$

Exemples :

a) $(3 + 4\boldsymbol{i}) + (2 - 5\boldsymbol{i}) =$

b) $(3 + 4\boldsymbol{i}) \cdot (2 - 5\boldsymbol{i}) =$

c) $4(2 + 3\boldsymbol{i}) - (2 - \boldsymbol{i}) =$

d) $\boldsymbol{i}(3 - 2\boldsymbol{i})^2 =$

e) $\boldsymbol{i}^{51} =$

Exercice 2 : Exprimer sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$

a) $(5 - 2\boldsymbol{i}) + (-3 + 6\boldsymbol{i})$
b) $(7 - 6\boldsymbol{i}) - (-11 - 3\boldsymbol{i})$
c) $(3 + 5\boldsymbol{i})(2 - 7\boldsymbol{i})$
d) $(1 - 3\boldsymbol{i})(2 + 5\boldsymbol{i})$
e) $(5 - 2\boldsymbol{i})^2$
f) $\boldsymbol{i}(3 + 4\boldsymbol{i})^3$
g) $(3 + 4\boldsymbol{i})(3 - 4\boldsymbol{i})$
h) $\boldsymbol{i}^{43}$
i) $\boldsymbol{i}^{73}$

Exercice 3 : Déterminer les valeurs de x et y, où x et y sont des nombres réels.

a) $8 + (3x + y)\boldsymbol{i} = 2x - 4\boldsymbol{i}$
b) $(3x + 2y) - y^3\boldsymbol{i} = 9 - 27\boldsymbol{i}$
c) $2x^2 + y + (x - 2y)\boldsymbol{i} = 5 + 8\boldsymbol{i}$

Définition : Le **nombre** complexe **conjugué** d'un nombre complexe $z = a + b\boldsymbol{i}$ est : $\bar{z} = a - b\boldsymbol{i}$

Exemple : Le nombre conjugué de $z = 3 + 7\boldsymbol{i}$ est :

Propriétés du conjugué	Illustration
$(a + b\boldsymbol{i}) + (a - b\boldsymbol{i}) = 2a$	$(4 + 3\boldsymbol{i}) + (4 - 3\boldsymbol{i}) = 4 + 4 = 8$
$(a + b\boldsymbol{i})(a - b\boldsymbol{i}) = a^2 + b^2$	$(4 + 3\boldsymbol{i}) \cdot (4 - 3\boldsymbol{i}) = 16 + 9 = 25$

Notons que la somme et le produit d'un nombre complexe et de son conjugué sont des nombres réels. Le conjugué sera utile pour définir le quotient de deux nombres sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$.

Exemple : Exprimer sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$

a) $\dfrac{7 - \boldsymbol{i}}{3 - 5\boldsymbol{i}} =$

b) $\dfrac{1}{9 + 2\boldsymbol{i}} =$

Exercice 4 : Exprimer sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$

a) $\dfrac{3}{2+4\boldsymbol{i}}$ **b)** $\dfrac{1-7\boldsymbol{i}}{6-2\boldsymbol{i}}$ **c)** $(4-2\boldsymbol{i})\div(-5\boldsymbol{i})$

Mise en garde : Lors des manipulations de racines de nombres négatifs, il s'agit d'être prudent afin de ne pas tomber dans la difficulté suivante :
Que vaut $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-3}$?

• *Un premier élève applique une formule connue depuis longtemps:*

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$$

Il propose donc : $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{(-3)(-3)}=\sqrt{9}=\mathbf{3}$

• *Un deuxième élève voulant utiliser ce qu'il vient d'apprendre propose :*

$$\begin{aligned}\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-3} &= \left(\sqrt{3\cdot\boldsymbol{i}^2}\right)\cdot\left(\sqrt{3\cdot\boldsymbol{i}^2}\right)=\left(\sqrt{3}\cdot\boldsymbol{i}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cdot\boldsymbol{i}\right)\\ &=\left(\sqrt{3}\right)^2\boldsymbol{i}^2=3(-1)=\mathbf{-3}\end{aligned}$$

Lequel a raison et pourquoi ??

Exemple : Exprimer sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$

$\left(5-\sqrt{-9}\right)\left(-1+\sqrt{-4}\right)=$

Exercice 5 : Exprimer sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$

a) $\left(2-\sqrt{-4}\right)\left(3-\sqrt{-16}\right)$ **b)** $\left(-3+\sqrt{-25}\right)\left(8-\sqrt{-36}\right)$

c) $\dfrac{\sqrt{-36}\sqrt{-49}}{\sqrt{-16}}$ **d)** $\dfrac{4+\sqrt{-81}}{7-\sqrt{-64}}$

Exercice 6 : Soit z et w deux nombres complexes, vérifier les propriétés suivantes

a) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ **b)** $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$

c) $\overline{z/w}=\overline{z}/\overline{w}$ **d)** $\overline{z^2}=\left(\overline{z}\right)^2$

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

a) $\boldsymbol{i}z+2(z-\boldsymbol{i})=0$ **b)** $\left(z+2\boldsymbol{i}\right)\left((2+\boldsymbol{i})z-3+\boldsymbol{i}\right)=0$

c) $\dfrac{2}{z-\boldsymbol{i}}=1-\boldsymbol{i}$ **d)** $z+2\overline{z}=9+2\boldsymbol{i}$

Théorème : Toute équation polynomiale à coefficients réels admet **un nombre pair de solutions complexes non réelles**. Ces solutions sont alors **conjuguées** deux à deux.

Preuve : En exercice ci-dessous

Exercice 8 : Compléter la preuve du théorème ci-dessus:

- *Posons* $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *, et considérons l'équation* $P(z) = 0$.
- *On suppose que* z_0 *est une solution de l'équation précédente*.
- *Montrons alors que* .... *est aussi une solution c'est-à-dire:*

$$P(z_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; P(\text{.........}) = 0$$

- *En effet:*

$$\begin{aligned}
P(z_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{P(z_0)} = \overline{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{...........} + \text{...........} + \text{...........} + \text{...........} + \text{...........} = \text{...........} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{...........} + \text{...........} + \text{...........} + \text{...........} + \text{...........} = \text{...........}
\end{aligned}$$

- *Comme les coefficients et exposants sont* ...., *on a:*

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n\},\ \overline{a_k} = \text{........},\quad \overline{z^n} = \text{........} \text{ et } \overline{0} = \text{........}$$

- Ainsi:

$$\begin{aligned}
P(z_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{...........} + \text{...........} + \text{...........} + \text{...........} + \text{...........} = \text{...........} \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{z}_0 \textit{ est une } \text{...} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{..}
\end{aligned}$$

CQFD.

Exercice 9 : On considère l'équation $z^3 - 7z^2 + 16z - 10 = 0$.

a) Montrer que cette équation admet $z = 1$ et $z = 3 + \boldsymbol{i}$ comme solution.

b) En déduire et vérifier la 3ème solution de cette équation.

Définition : soit z un nombre complexe donné, on appelle **racines carrées complexes** de z tout nombre complexe r tel que $r^2 = z$

Mise en garde : Cette notion n'est surtout pas à confondre avec la racine carrée dans $\mathbb{R}$ qui est unique contrairement à celle qui vient d'être définie.

Les écritures suivantes $\sqrt{3+4\boldsymbol{i}}$ et $\sqrt{-1}$ sont fortement déconseillées pour éviter justement l'amalgame entre les deux racines carrées : racine carrée d'un réel positif et racines carrées d'un nombre complexe.

Exercice 10 : Montrer que $z = 15 + 8\boldsymbol{i}$ admet les deux nombres complexes suivants $r_1 = 4 + \boldsymbol{i}$ et $r_2 = -4 - \boldsymbol{i}$ comme racine carrée.

Exemple : Déterminer les racines carrées de $z = 3 + 4\boldsymbol{i}$

Exercice 11 : Déterminer les racines carrées de

a) $z = 15 - 8\boldsymbol{i}$ **b)** $z = -8 - 6\boldsymbol{i}$
c) $\boldsymbol{i}$ **d)** -4

Exercice 12 : Montrer qu'un nombre complexe non nul $z = a + b\boldsymbol{i}$ admet deux racines carrées opposées.

§3 Équations du 2$^{\text{ème}}$ degré

Utilisons maintenant ce que nous avons développé pour résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du 2$^{\text{ème}}$ degré n'admettant pas de solution réelle, mais 2 solutions complexes :

Exemple : Résoudre l'équation $z^2 + z + 1 = 0$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 1 = 0$

Exercice 13 : Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $z^2 - 6z + 13 = 0$ **b)** $z^2 - 5z + 20 = 0$
c) $4z^2 + z + 3 = 0$ **d)** $z^3 + 125 = 0$
e) $z^4 = 256$ **f)** $4z^4 + 25z^2 + 36 = 0$
g) $z^3 + 3z^2 + 4z = 0$ **h)** $8z^3 - 12z^2 + 2z - 3 = 0$

Constatation : Lorsque son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif, l'équation du second degré à **coefficients réels** $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}i$$

Ces deux solutions complexes sont les conjuguées l'une de l'autre.

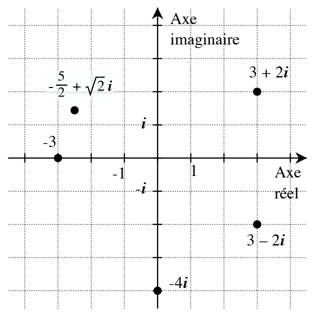
Exercice 14 : Dans $\mathbb{C}$, factoriser : **a)** $z^2 + 1$ **b)** $z^4 - 16$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(8 - 8\boldsymbol{i})z^2 + (8 + 8\boldsymbol{i})z + (-1 - 5\boldsymbol{i}) = 0$

Exercice 15 : Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $(1 + \boldsymbol{i})z^2 + (\boldsymbol{i} - 6)z + (2 - 3\boldsymbol{i}) = 0$
b) $2\boldsymbol{i}z^2 + 3(1 + \boldsymbol{i})z + (3 - \boldsymbol{i}) = 0$
c) $z^2 - (1 + 12\boldsymbol{i})z - (13 + 9\boldsymbol{i}) = 0$
d) $z^4 + 2(2\boldsymbol{i} - 1)z^2 - (3 - 4\boldsymbol{i}) = 0$

§4 Forme trigonométrique des nombres complexes



Nous avons déjà mentionné qu'un nombre complexe $z = a + \boldsymbol{b}\boldsymbol{i}$ pouvait être représenté dans un système d'axes. On nomme **plan complexe** le plan de coordonnées dans lequel chaque nombre complexe $z = a + \boldsymbol{b}\boldsymbol{i}$ est associé à un point $P(a\ ;\ b)$. L'axe des x est appelé **axe réel** et l'axe des y est appelé **axe imaginaire**. Sur la figure ci-contre, nous avons représenté géométriquement quelques nombres complexes. On notera que les points correspondants à $z = a + \boldsymbol{b}\boldsymbol{i}$ et à son conjugué $\overline{z} = a - \boldsymbol{b}\boldsymbol{i}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.

Exercice 16:

a) Représenter géométriquement les nombres complexes $z = 2 + \boldsymbol{i}$ et $w = 1 - 2\boldsymbol{i}$.

b) Représenter également $z + w$.
Quelle analogie peut-on faire entre l'addition de nombres complexes et la géométrie vectorielle ?

c) Représenter le nombre $t = -2z$. Qu'en déduisez-vous ?

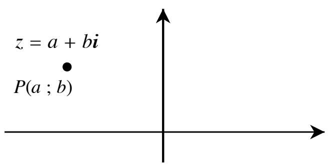
Définitions :

- Le **module** d'un nombre complexe z, noté $|z|$, est la norme du vecteur $\overrightarrow{OP}$.
- L'**argument** d'un nombre complexe z, noté $\arg(z)$, est égal à l'angle (en radian) entre l'axe des réels et le vecteur $\overrightarrow{OP}$.

Calculs :

Le module r du nombre complexe z se calcule à l'aide de la relation de Pythagore :

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



L'argument θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ d'un nombre complexe peut se calculer à l'aide des relations trigonométriques :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{r}.$$

Exercice 17 :

Représenter géométriquement les nombres complexes puis calculer leur module et leur argument.

a) $-2 - 2\boldsymbol{i}$ **b)** $\sqrt{3} + \boldsymbol{i}$ **c)** $-2\boldsymbol{i}$ **d)** $2 - 2\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}$

Remarque : Les points correspondants à tous les nombres complexes qui ont le même module k , sont situés sur un cercle de rayon k dont le centre est à l'origine du plan complexe. Par exemple, les points correspondants aux nombres complexes z avec $|z|=1$ sont sur le cercle unitaire (ou cercle trigonométrique).

Définition : Nous appellerons **forme trigonométrique du nombre complexe** z l'expression suivante :

$$z = a + b\boldsymbol{i} = \left(r\cos(\theta)\right) + \left(r\sin(\theta)\right)\boldsymbol{i} = r\left(\cos(\theta) + \boldsymbol{i}\sin(\theta)\right)$$

ou sous une forme abrégée : $z = r\ \mathrm{cis}(\theta)$.

Exemple : Exprimer le nombre complexe sous forme trigonométrique avec $0 \leq \theta < 2\pi$:

a) $-4 + 4\boldsymbol{i}$ **b)** $2\sqrt{3} - 2\boldsymbol{i}$ **c)** $2 + 3\boldsymbol{i}$

Exemple : Montrer que $-2 + 7\boldsymbol{i} = \sqrt{53}\,\text{cis}\left(\pi - \tan^{-1}(7/2)\right)$

Exercice 18 : Exprimer les nombres complexes sous forme trigonométrique avec $0 \leq \theta < 2\pi$

a) $1 - \boldsymbol{i}$ **b)** $-4\sqrt{3} + 4\boldsymbol{i}$ **c)** $2\sqrt{3} + 2\boldsymbol{i}$ **d)** $-4 - 4\boldsymbol{i}$
e) $-20\boldsymbol{i}$ **f)** 12 **g)** $2 + \boldsymbol{i}$ **h)** $-5 - 3\boldsymbol{i}$

Exercice 19 : Exprimer sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$

a) $4\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$ **b)** $6\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

c) $5\left[\cos(\pi) + \boldsymbol{i}\sin(\pi)\right]$ **d)** $\sqrt{34}\ \text{cis}\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

e) $\sqrt{5}\ \text{cis}\left(\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

§5 Théorème sur les produits et les quotients de nombres complexes

Exercice 20 : **a)** Représenter géométriquement les nombres complexes
$z = 2 + \boldsymbol{i}$ et $w = 2\boldsymbol{i}$.

b) Calculer $z \cdot w$ puis le représenter géométriquement.
Peut-on observer un lien géométrique entre ces 3 nombres ?

c) Qu'en est-il de $\frac{z}{w}$?

Formules : Si des nombres complexes sont exprimés sous forme trigonométrique, on peut les multiplier ou les diviser comme le montre le théorème suivant. Mais commençons par rappeler 2 formules trigonométriques:

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

Théorème : Si les formes trigonométriques de deux nombres complexes z_1 et z_2 sont:

$$z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + \boldsymbol{i}\sin(\theta_1)) \quad \text{et} \quad z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + \boldsymbol{i}\sin(\theta_2)),$$

alors:

a) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \boldsymbol{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \boldsymbol{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$

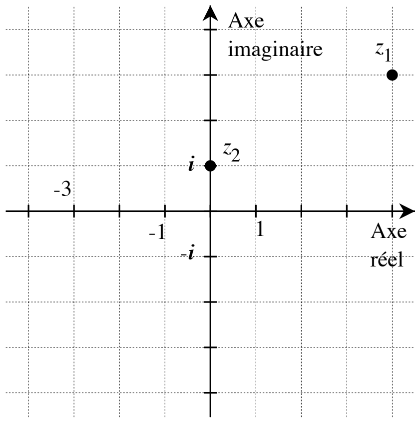
Démonstration de a) :

La première partie du théorème précédent énonce que *le module du produit de deux nombres complexes est le produit de leurs modules* et que *son argument est la somme de leurs arguments*. On peut énoncer de la même manière la deuxième partie du théorème.

Exemple : si $z_1 = 2\sqrt{3} - 2\boldsymbol{i}$ et $z_2 = 2\boldsymbol{i}$, utiliser les formes trigonométriques pour calculer $z_1 \cdot z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Vérifier vos réponses en utilisant la forme algébrique.

Exercice 21 : **a)** Sur la figure ci-dessous, **construire** $z_1 \cdot z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$



b) Sachant que $z_1 = 4 + 3\boldsymbol{i}$ et $z_2 = \boldsymbol{i}$, contrôler, par un calcul, les 2 constructions précédentes.

Exercice 22 : Utiliser les formes trigonométriques pour calculer $z_1 \cdot z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$

a) $z_1 = -1 + \boldsymbol{i}$ et $z_2 = 1 + \boldsymbol{i}$ **b)** $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\boldsymbol{i}$ et $z_2 = 5\boldsymbol{i}$
c) $z_1 = -10$ et $z_2 = -4$ **d)** $z_1 = 4$ et $z_2 = 2 - \boldsymbol{i}$

Exercice 23 : Soit les nombres complexes $z_1 = 1 + \boldsymbol{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = \dfrac{1}{2}(1 - \boldsymbol{i})$.

On pose $Z = z_1 \cdot z_2$.

a) Déterminer l'écriture algébrique et géométrique de Z.

b) En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 24 : Soit $z = \dfrac{-\sqrt{3} + \boldsymbol{i}}{2 + 2\boldsymbol{i}}$. Déterminer la forme trigonométrique de z.

Exercice 25 : Une application en électricité :

En électricité, on utilise souvent la forme trigonométrique des nombres complexes pour décrire le courant I, la tension U et l'impédance Z d'un circuit à courant alternatif. L'impédance exprime l'opposition du circuit électrique au passage du courant électrique. La plupart des appareils électriques utilisent une tension efficace de 220V et du courant alternatif. La relation entre ces trois quantités est Z = U/I.

Calculer les quantités inconnues en exprimant les résultats sous forme $a + b\boldsymbol{i}$ arrondis à deux décimales près.

a) Calculer la tension sachant que $I = 10 \text{ cis}(35°)$ et $Z = 3 \text{ cis}(20°)$
b) Calculer l'impédance sachant que:

$$I = 8 \text{ cis}(5°) \text{ et } U = 115 \text{ cis}(45°)$$

Le module de l'impédance Z représente l'opposition totale d'un circuit au passage du courant électrique L'unité d'impédance est l'Ohm.

c) Si $Z = 14 - 13\boldsymbol{i}$, calculer $|Z|$

La partie réelle de U représente la tension instantanée fournie à un instrument électrique en Volts.

d) Calculer cette tension si $I = 4 \text{ cis}(90°)$ et $Z = 18 \text{ cis}(-78°)$.

§6 Formule de Moivre et racine $n^{\text{ième}}$ des nombres complexes

Si z est un nombre complexe et n est un entier positif, alors un nombre complexe w est **une racine $n^{\text{ième}}$ de z** si $w^n = z$.

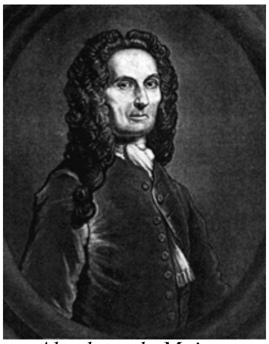
Nous allons montrer que tout nombre complexe non nul possède n racines $n^{\text{ièmes}}$ différentes. Étant donné que $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, il s'ensuit que tout nombre réel non nul possède n racines $n^{\text{ièmes}}$ (complexes).

Si a est un nombre réel positif et $n = 2$, nous savons déjà que les racines sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ en effet :

Généralisons ceci pour tout $n > 2$.

Formule de Moivre : $z^n = \left[r\left(\cos(\theta) + \boldsymbol{i}\sin(\theta)\right)\right]^n = r^n(\cos(n\theta) + \boldsymbol{i}\sin(n\theta)) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

Preuve :



Abraham de Moivre (1667-1754)

Exemple : Utiliser la formule de Moivre pour écrire l'expression $(1 + \boldsymbol{i})^{20}$ sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$.

Il aurait été laborieux de calculer $(1 + \boldsymbol{i})^{20}$ en utilisant une méthode algébrique. Par conséquent, nous voyons l'avantage d'introduire sa forme trigonométrique et d'utiliser la formule de Moivre.

Exercice 26 : Utiliser la formule de Moivre pour écrire le nombre complexe donné sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$.

a) $(3+3\boldsymbol{i})^5$ **b)** $(1-\boldsymbol{i})^{10}$ **c)** $(1-\sqrt{3}\,\boldsymbol{i})^3$

d) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right)^{15}$ **e)** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)^{20}$ **f)** $(\sqrt{3}+\boldsymbol{i})^7$

§7 Théorème sur les racines $n^{\text{ièmes}}$

Théorème : Si $z = r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$ est un nombre complexe non nul quelconque et si n est un entier positif quelconque, alors z a exactement n racines $n^{\text{èmes}}$ différentes $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ qui sont donnés par la formule suivante :

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+\boldsymbol{i}\sin\left(\frac{\theta}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right] \qquad \text{où } k = 0, 1, \ldots\, n-1$$

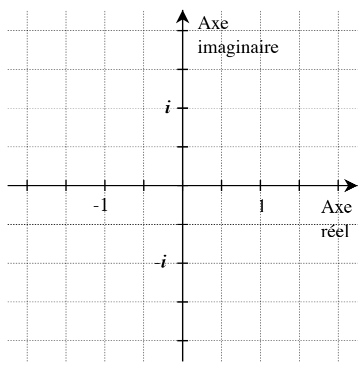
Preuve :

Devinette: Qu'est-ce qu'un homme complexe propose à une femme réelle?

"Viens danser !"

Remarque : Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z dans ce théorème ont toutes le même module de $\sqrt[n]{r}$, donc leurs représentations géométriques sont sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$ centré en O.
De plus, elles sont équidistantes sur le cercle, puisque la différence des arguments des racines $n^{\text{ièmes}}$ successives est de $2\pi/n$.

Exemple : Calculer les 4 racines quatrièmes de $-8-8\sqrt{3}\boldsymbol{i}$, puis les représenter géométriquement.



Exercice 27 : **a)** Calculer les deux racines carrées de $1 + \sqrt{3}\,\boldsymbol{i}$, puis les représenter géométriquement.
b) Calculer les trois racines cubiques de $-27\boldsymbol{i}$, puis les représenter géométriquement.
c) Calculer les cinq racines cinquième de $1 + \boldsymbol{i}$, puis les représenter géométriquement.

Exercice 28 : Calculer $\sqrt[6]{-1}$, puis représenter géométriquement la situation.

Remarque : Le cas spécial où $z = 1$ est particulièrement intéressant. Les n racines distinctes sont appelées **les racines $\boldsymbol{n}^{\text{ièmes}}$ de l'unité**. Dans le cas où $n = 3$, nous appelons ces racines les **racines cubiques de l'unité**.

Exercice 29 : Sans aucun calcul, représenter les trois racines cubiques de l'unité.

Exercice 30 : Construire les huit racines huitièmes de l'unité puis déterminer sans calcul w_1 et w_2.

Exercice 31 : Déterminer les solutions des équations suivantes :

a) $z^4 - 16 = 0$ **b)** $z^6 + 64 = 0$ **c)** $z^3 + 8\boldsymbol{i} = 0$ **d)** $z^5 - 243 = 0$

§7 Pour aller un petit peu plus loin

Exercice 32 : On considère le polynôme à coefficients complexes:

$$g(z) = \left(az + 1 - \boldsymbol{i}\right)\left(z^2 + (-3 + i)z + 4 - 3\boldsymbol{i}\right).$$

Déterminer le nombre complexe a tel que $g(1) = 4 - 4\boldsymbol{i}$.

Source: Examen de Maturité (Piccard) - 2012

Exercice 33 : On donne la fonction complexe $f(z) = z^3 - 3\boldsymbol{i}z^2 - 2z + 9\boldsymbol{i}$.

a) Résoudre l'équation $f(z) = 9\boldsymbol{i}$ et montrer que les trois solutions sont sur une même droite du plan complexe.
b) Prouver que le nombre $w_1 = 3\boldsymbol{i}$ est un point fixe de cette fonction *f*, c'est-à-dire qu'il satisfait l'équation $f(z) = z$.
c) Déterminer w_2 et w_3, les autres points fixes de *f*.
d) Démontrer par un calcul que les trois points fixes w_1, w_2 et w_3 de *f* sont les sommets d'un triangle équilatéral.
e) Montrer que si un nombre z est sur l'axe imaginaire, son image $f(z)$ sera également sur l'axe imaginaire.
f) Trouver les nombres réels dont les images par *f* sont sur l'axe imaginaire.

Source: Examen Suisse de Maturité - 2010

Annexe: Formules d'addition des angles:

Montrer que $\forall \alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}$,	① $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
	② $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

Éléments de réponses:

Exercice 1 : **a)** $(4+\boldsymbol{i})^3 = 52 + 47\boldsymbol{i}$; $(4-\boldsymbol{i})^3 = 52 - 47\boldsymbol{i}$

b) $S = \left\{ 8\ ;\ -4 \pm \sqrt{3} \right\}$

Exercice 2 : **a)** $2 + 4\boldsymbol{i}$ **b)** $18 - 3\boldsymbol{i}$ **c)** $41 - 11\boldsymbol{i}$

d) $17 - \boldsymbol{i}$ **e)** $21 - 20\boldsymbol{i}$ **f)** $-44 - 117\boldsymbol{i}$

g) 25 **h)** -i **i)** $\boldsymbol{i}$

Exercice 3 : **a)** $x = 4$ et $y = -16$ **b)** $x = 1$ et $y = 3$

c) $x = 2$ et $y = -3$ ou $x = -9/4$ et $y = -41/8$

Exercice 4 : **a)** $\frac{3}{10} - \frac{3}{5}i$ **b)** $\frac{1}{2} - i$ **c)** $\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

Exercice 5 : **a)** $-2 - 14\boldsymbol{i}$ **b)** $6 + 58\boldsymbol{i}$ **c)** $\frac{21}{2}i$ **d)** $-\frac{44}{113} + \frac{95}{113}i$

Exercice 6 : Il s'agit de constituer des chaînes d'égalités après avoir posé $z = a + b\boldsymbol{i}$ et $w = c + d\boldsymbol{i}$

Exercice 7 : **a)** $S = \left\{ \frac{2\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{i}+2} \right\}$ ou plutôt $S = \left\{ \frac{2}{5} + \frac{4}{5}\boldsymbol{i} \right\}$

b) $S = \left\{ 1 - \boldsymbol{i}\ ;\ -2\boldsymbol{i} \right\}$ **c)** $S = \left\{ 1 + 2\boldsymbol{i} \right\}$ **d)** $S = \left\{ 3 - 2\boldsymbol{i} \right\}$

Exercice 8 : Pourra être vu ensemble à votre demande

Exercice 9 : **b)** La $3^{\text{ème}}$ solution est le conjugé de la solution complexe, donc $z_3 = 3 - \boldsymbol{i}$

Exercice 10 : Il suffit de montrer que $r_1^2 = r_2^2 = z$.

Exercice 11 : **a)** $\pm(4 - \boldsymbol{i})$ **b)** $\pm(1 - 3\boldsymbol{i})$ **c)** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \boldsymbol{i})$ **d)** $\pm 2\boldsymbol{i}$

Exercice 12 : Pourra être vu ensemble à votre demande.

Exercice 13 : **a)** $S = \left\{ 3 \pm 2\boldsymbol{i} \right\}$ **b)** $S = \left\{ \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{55}}{2}\boldsymbol{i} \right\}$ **c)** $S = \left\{ -\frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{47}}{8}\boldsymbol{i} \right\}$

d) $S = \left\{ -5\ ;\ \frac{5}{2} \pm \frac{5\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} \right\}$ **e)** $S = \left\{ \pm 4\ ;\ \pm 4\boldsymbol{i} \right\}$ **f)** $S = \left\{ \pm 2\boldsymbol{i}\ ;\ \pm \frac{3}{2}\boldsymbol{i} \right\}$

g) $S = \left\{ 0\ ;\ -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\boldsymbol{i} \right\}$ **h)** $S = \left\{ \frac{3}{2}\ ;\ \pm \frac{1}{2}\boldsymbol{i} \right\}$

Exercice 14 : **a)** $z^2 + 1 = (z + \boldsymbol{i})(z - \boldsymbol{i})$ **b)** $z^4 - 16 = (z + 2)(z - 2)(z + 2\boldsymbol{i})(z - 2\boldsymbol{i})$

Exercice 15 : **a)** $S = \left\{ 2 - 3\boldsymbol{i}\ ;\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{i} \right\}$ **b)** $S = \left\{ \boldsymbol{i}\ ;\ -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i} \right\}$

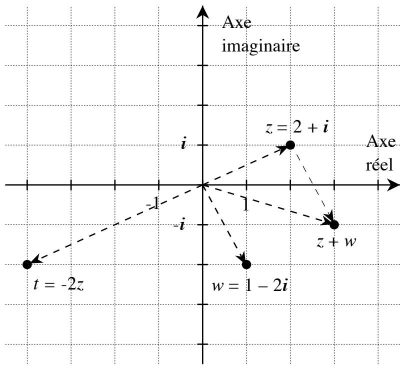
c) $S = \left\{ -1 + \boldsymbol{i}\ ;\ 2 + 11\boldsymbol{i} \right\}$ **d)** $S = \left\{ \pm \boldsymbol{i}\ ;\ \pm (2 - \boldsymbol{i}) \right\}$

Exercice 16 : **a)** $z + w = 3 - \boldsymbol{i}$

Analogie entre l'addition deux nombres complexes et l'addition vectorielle.

b) $t = -4 - 2\boldsymbol{i}$

On peut observer la même analogie avec la multiplication d'un vecteur par un nombre.

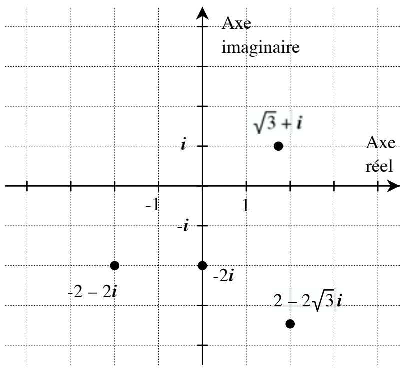


Exercice 17 : **a)** $\left| -2 - 2\boldsymbol{i} \right| = 2\sqrt{2}$; $\theta = 5\pi/4$

b) $\left| \sqrt{3} + \boldsymbol{i} \right| = 2$; $\theta = \pi/6$

c) $\left| -2\boldsymbol{i} \right| = 2$; $\theta = 3\pi/2$

d) $\left| 2 - 2\sqrt{3}\boldsymbol{i} \right| = 4$; $\theta = 5\pi/3$



Exercice 18 : **a)** $\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ **b)** $8\ \text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ **c)** $4\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

d) $4\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ **e)** $20\ \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ **f)** $12\ \text{cis}(0)$

g) $\sqrt{5}\ \text{cis}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ **h)** $\sqrt{34}\ \text{cis}\left(\pi + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

Exercice 19 : **a)** $2\sqrt{2}\ +2\sqrt{2}\boldsymbol{i}$ **b)** $-3\ +3\sqrt{3}\boldsymbol{i}$ **c)** -5

d) $5 + 3\boldsymbol{i}$ ou $-5 - 3\boldsymbol{i}$ **e)** $2 - \boldsymbol{i}$ ou $-2 + \boldsymbol{i}$

Exercice 20 : **b)** En comparant les modules et les arguments de z, w et $z \cdot w$, on observe que :

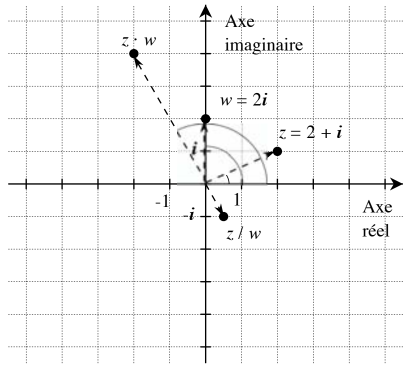
$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \text{ et}$$

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$$

c) Même démarche :

$$|z/w| = |z|/|w| \text{ et}$$

$$\arg(z / w) = \arg(z) - \arg(w)$$



Exercice 21 : **a)** Pour construire $z_1 \cdot z_2$, on évalue $|z_1 \cdot z_2|$ et $\arg(z_1 \cdot z_2)$ en fonction des modules et des arguments de z_1 et z_2. Même démarche pour z_1/z_2.

b) $z_1 \cdot z_2 = -3 + 4\boldsymbol{i}$, $z_1/z_2 = 3 - 4\boldsymbol{i}$

Exercice 22 : **a)** $z_1 \cdot z_2 = 2\ \text{cis}(\pi) = -2 + 0\boldsymbol{i}$ $\quad z_1/z_2 = 1\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \boldsymbol{i}$

b) $z_1 \cdot z_2 = 20\ \text{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 10\sqrt{3} - 10\boldsymbol{i}$ $\quad z_1/z_2 = \frac{4}{5}\ \text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{2}{5}\boldsymbol{i}$

c) $z_1 \cdot z_2 = 40\ \text{cis}(2\pi) = 40 + 0\boldsymbol{i}$ $\quad z_1/z_2 = \frac{5}{2}\ \text{cis}(0) = \frac{5}{2} + 0\boldsymbol{i}$

d) $z_1 \cdot z_2 = 8 - 4\boldsymbol{i}$ $\quad z_1/z_2 = \frac{8}{5} + \frac{4}{5}\boldsymbol{i}$

Exercice 23 : **a)** $Z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\boldsymbol{i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\boldsymbol{i}\right]$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$

Exercice 24 : $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

Exercice 25 : **a)** $U = 17{,}21 + 24{,}57\boldsymbol{i}$ **b)** $Z = 11{,}01 + 9{,}24\boldsymbol{i}$

c) $|Z| = 19{,}1$ ohm **d)** $\text{Re}(U) = 70{,}43$ volt

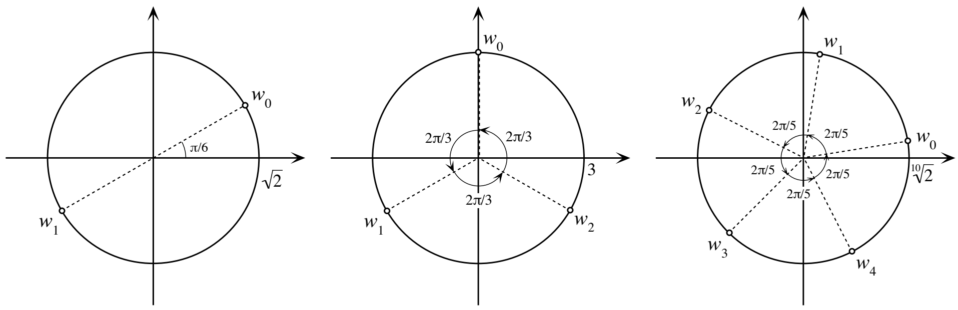
Exercice 26 : **a)** $-972 - 972\boldsymbol{i}$ **b)** $-32\boldsymbol{i}$ **c)** -8

d) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$ **e)** $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$ **f)** $-64\sqrt{3} - 64\boldsymbol{i}$

Exercice 27 : **a)** $w_0 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$; $w_1 = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$

b) $w_0 = 3\boldsymbol{i}$; $w_1 = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\boldsymbol{i}$; $w_2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\boldsymbol{i}$

c) $w_k = \sqrt[10]{2}\ \text{cis}\,(\theta)$ avec $\theta = \dfrac{\pi}{20} + k \cdot \dfrac{2\pi}{5}$, $k \in \{0\,;\ldots;4\}$

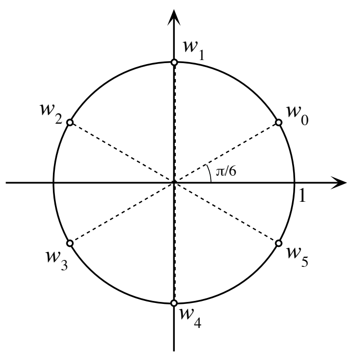


a) **b)** **c)**

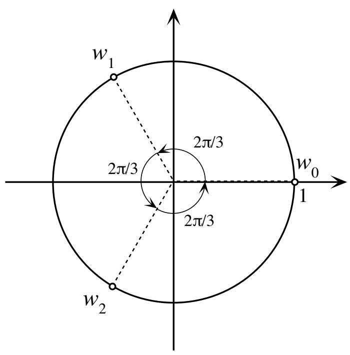
Exercice 28 : $w_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{i}$; $w_1 = \boldsymbol{i}$,

$w_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{i}$; $w_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{i}$,

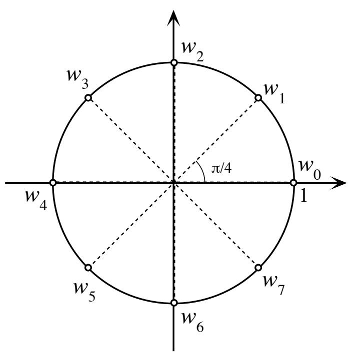
$w_4 = -\boldsymbol{i}$; $w_5 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{i}$



Exercice 29 :



Exercice 30 :



$w_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$

$w_2 = \boldsymbol{i}$

Exercice 31 : **a)** $S = \{ 2 ; 2\boldsymbol{i} ; -2 ; -2\boldsymbol{i} \}$

b) $S = \{ \sqrt{3} + \boldsymbol{i} ; 2\boldsymbol{i} ; -\sqrt{3} + \boldsymbol{i} ; -\sqrt{3} - \boldsymbol{i} ; -2\boldsymbol{i} ; \sqrt{3} - \boldsymbol{i} \}$

c) $S = \{ 2\boldsymbol{i} ; -\sqrt{3} - \boldsymbol{i} ; \sqrt{3} - \boldsymbol{i} \}$

d) $S = \left\{ 3 \operatorname{cis}\left(\frac{k \cdot 2\pi}{5}\right) \middle| k = 0 \ldots 4 \right\}$

Exercice 32 : $a = 1 + \boldsymbol{i}$

Exercice 33 : **a)** $S = \{ \boldsymbol{i} ; 2\boldsymbol{i} ; 0 \}$. Les 3 points $A(0 ; \boldsymbol{i})$, $B(0 ; 2\boldsymbol{i})$ et $C(0 ; 0)$ sont alignés sur l'axe imaginaire.

b) On a bien $f(3\boldsymbol{i}) = 3\boldsymbol{i}$

c) $w_2 = \sqrt{3}$ et $w_3 = -\sqrt{3}$

d) Les 3 points $A(0 ; 3\boldsymbol{i})$, $B(\sqrt{3} ; 0)$ et $C(-\sqrt{3} ; 0)$ sont bien les sommets d'un triangle équilatéral.

e) $f(b \cdot \boldsymbol{i}) = (-b^3 + 3b^2 - 2b + 9) \cdot \boldsymbol{i}$ avec $b \in \mathbb{R}$.

f) Il s'agit de $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{2}$ et $w_2 = -\sqrt{2}$