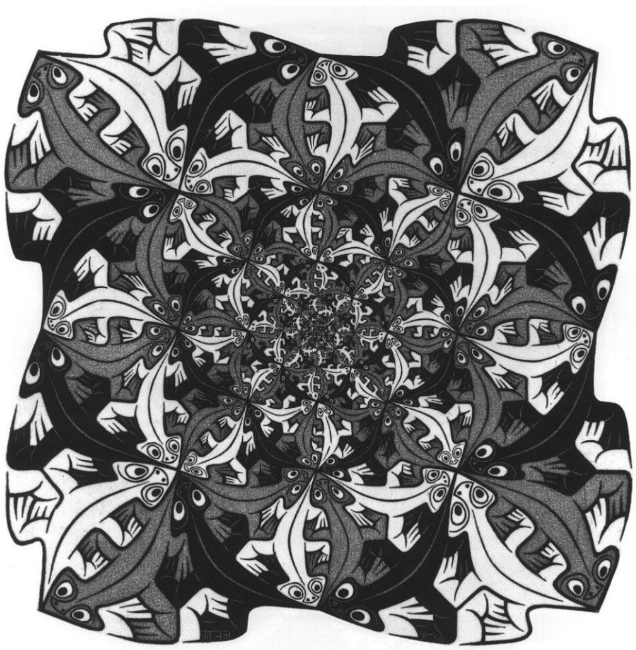
Analyse I

$2M_{\text{Renf}}$

Jean-Philippe Javet



De plus en plus petit (xylogravure, 1956)
M.C. Escher

www.javmath.ch

Table des matières

Quelques éléments de solutions I

Malgré le soin apporté lors de sa conception, le polycopié que vous avez entre les mains contient certainement quelques erreurs et coquilles. Merci de participer à son amélioration en m'envoyant un mail :

`javmath.ch@gmail.com`

Merci ;-)

0

Suites de nombres réels

0.1 Définitions de base et premiers exemples

Introduction: *Les **suites réelles** sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite réelle est l'équivalent discret d'une fonction réelle). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des **procédés illimités** de calcul. On en trouve, par exemple, dans la mathématique babylonienne, chez Archimède, "spécialiste" des procédés illimités d'approximation pour des **calculs d'aires** et de **volumes**, ou encore en Égypte au 1er siècle après Jésus-Christ, dans le procédé d'**extraction d'une racine carrée** par la méthode de Héron d'Alexandrie.*
Dans la seconde moitié du XX^{e} siècle, le développement des calculateurs et des ordinateurs donne un second souffle à l'étude des suites en analyse numérique grâce à la méthode des éléments finis. On en retrouve l'usage aussi dans les mathématiques financières.
*Parallèlement à l'étude de **la convergence** des suites (lorsque la suite va toujours en s'approchant de plus en plus d'une quantité finie), se développe un certain goût pour l'étude de **son terme général**. C'est le cas par exemple d'un grand nombre de suites d'entiers comme **la suite de Fibonacci** ou, plus récemment, celle de **Syracuse**.*

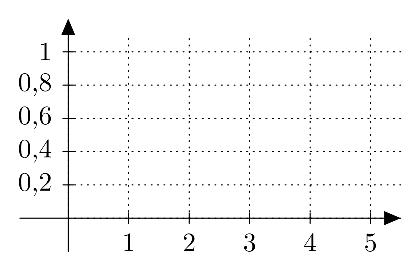
Définition: Une **suite réelle** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

L'expression u_n est appelé **terme général** de la suite, à ne pas confondre avec la suite elle-même notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple 1: Considérons la suite $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Déterminer son terme général, les cinq premiers termes de cette suite, puis représenter le graphe de cette suite.



Exercice 0.1: Calculer les 5 premiers termes ainsi que le 9e terme des suites proposées, puis les représenter graphiquement.

a) $(12-3n)_{n\in\mathbb{N}}$ **b)** $\left(\dfrac{3n-2}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **c)** $(9)_{n\in\mathbb{N}}$

d) $\left(2+(-0{,}8)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **e)** $\left(\dfrac{2^n}{n^2+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

f) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où u_n est le nombre de décimales de $(0{,}1)^n$

Remarque: Dans les exemples précédents, la suite était définie par une formule permettant de calculer directement n'importe quel terme d'indice n. Ce ne sera pas toujours le cas. Dans l'exemple qui suit, nous indiquerons le premier terme u_0, ainsi qu'une formule permettant d'obtenir n'importe quel terme u_{n+1} à partir du terme précédent u_n quel que soit $n \geqslant 0$. Une telle suite sera appelée **suite définie par récurrence.**

Exemple 2: Calculer les quatre premiers termes et tenter de deviner le terme général de la suite définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

Il ne sera pas toujours aussi facile de déterminer le terme général d'une suite définie par récurrence.

Définition: Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **définie par récurrence** par la donnée de son premier terme u_0 ainsi que $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 0.2: Calculer les cinq premiers termes des suites définies par récurrence, puis les représenter graphiquement :

a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} u_0 = -3/4 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = -nu_n \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = (u_n)^{-n+3} \end{cases}$

Exemple 3: Quel est le terme général de la suite suggérée par :

$$1\,;-\tfrac{1}{2}\,;\tfrac{1}{4}\,;-\tfrac{1}{8}\,;\ldots$$

a) Où le premier terme est u_0

b) Où le premier terme est u_1

Définition: Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **alternée** si ses termes sont alternativement positifs et négatifs.
Le terme général d'une suite alternée peut s'écrire sous la forme :

$$u_n = (-1)^n \cdot |u_n| \qquad \text{ou} \qquad u_n = (-1)^{n+1} \cdot |u_n|$$

Exercice 0.3: Quel est le terme général des suites *suggérées* par :
(*on considérera, dans chaque cas, u_0 puis u_1 comme premier terme.*)

a) $-1\,;-2\,;-3\,;-4\,;\ldots$

b) $1{,}1\,;1{,}01\,;1{,}001\,;1{,}0001\,;\ldots$

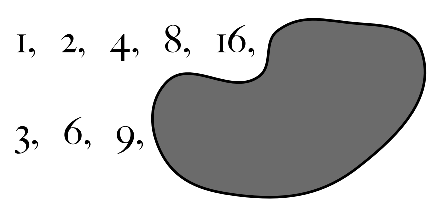
c) $1\,;0\,;1\,;0\,;1\,;\ldots$

d) $1\,;-2\,;3\,;-4\,;5\,;-6\,;\ldots$

e) $1{,}1\,;0{,}99\,;1{,}001\,;0{,}9999\,;\ldots$

f) $-2\,;\frac{4}{3}\,;-\frac{8}{9}\,;\frac{16}{27}\,;\ldots$

Exercice 0.4: Dans un cahier d'élève, on a trouvé le début de deux suites, le restant étant illisible :



À quelle activité peuvent-elles correspondre ?

Mise en garde: Si seuls quelques-uns des premiers termes d'une suite sont connus, il est impossible de prévoir les termes suivants. Par exemple, si on nous donne 3, 6, 9, ... et que l'on nous demande de calculer le quatrième terme, nous ne pouvons pas continuer sans informations supplémentaires.

La suite dont le n^{e} terme est :

$$u_n = 3n + (1-n)^3(2-n)^2(3-n)$$

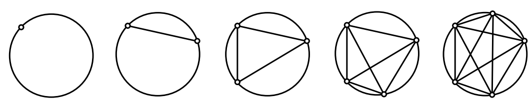
admet 3, 6, 9 et 120 comme quatre premiers termes.

Il est possible de décrire des suites dont les trois premiers termes sont 3, 6 et 9 et le quatrième terme est *n'importe quel* nombre donné. Cela montre que lorsque nous avons affaire à des suites, il est essentiel d'avoir des informations précises à propos du n^{e} terme (terme général) ou une formule permettant d'obtenir chaque terme à partir du précédent.

Exercice défi: Pouvez-vous retrouver le terme général de la suite :

$$1 \ ; \ 2 \ ; \ 4 \ ; \ 8 \ ; \ 16 \ ; \ \ldots$$

dont voici une figure d'étude pour vous guider :



$\cdots ? \cdots$

Exercice 0.5: La suite ci-dessous peut-être utilisée pour calculer des valeurs rapprochées du nombre π.

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - \tan(u_n) \end{cases}$$

a) Calculer les cinq premiers termes de cette suite.
(après avoir mis votre calculatrice en mode radian)

b) Qu'advient-il des termes de cette suite lorsque $u_0 = 6$?

Exercice 0.6: La suite de Bode, définie par $\begin{cases} u_1 = 0{,}4 \\ u_n = 0{,}1\left(3 \cdot 2^{n-2} + 4\right) \text{ pour } n \geqslant 2 \end{cases}$

peut être utilisée pour évaluer les distances entre des planètes et le soleil. Ces distances sont mesurées en unités astronomiques (UA), avec 1 UA $= 1{,}49597870 \cdot 10^{11}$ m.
Par exemple, le troisième terme correspond à la Terre.

a) Calculer les 8 premiers termes de la suite.

b) Comparer ces valeurs aux distances indiquées dans votre *Formulaire et tables*.

c) À quel astre correspond la distance u_5 ?

Exercice 0.7: Quelques calculatrices utilisent un algorithme semblable à celui qui suit pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{N}$ pour un nombre réel positif N :

$$\begin{cases} u_1 = N/2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{N}{u_n}\right) \end{cases}$$

Utiliser cette suite pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à six décimales près.

Exercice 0.8: **La suite de Fibonacci**

Leonardo Pisano
1170-1250

La suite de Fibonacci est une des suites mathématiques les plus connues. Elle doit son nom au mathématicien italien Leonardo Pisano, plus connu sous le pseudonyme de Fibonacci . Dans un problème récréatif posé dans un de ses ouvrages, le *Liber Abaci*, Fibonacci décrit la croissance d'une population de lapins :

« Possédant initialement un couple de lapins, combien de couples obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ? »

Ce problème est à l'origine de la suite dont le n^{e} terme correspond au nombre de couples de lapins au n^{e} mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :

- le premier mois, il y a juste un couple de lapereaux ;
- les lapereaux ne peuvent procréer qu'à partir du 2^{e} mois ;
- chaque mois, tout couple susceptible de procréer engendre effectivement un nouveau couple de lapereaux ;
- les lapins ne meurent jamais.

En notant F_n le nombre de couples de lapins au mois n, on aura :

$$F_1 = 1 \ , \ F_2 = 1 \ , \ F_3 = 2 \ , \ \ldots$$

a) Déterminer F_4 , F_5 , F_6 puis F_{12} ,

b) Cette suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ peut être définie par récurrence, compléter la relation ci-dessous :

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+1} = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

c) Mais elle peut également être définie par son terme général :

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n}$$

Ici, il ne s'agit pas de démontrer cette formule, mais de contrôler, à la calculatrice, la correspondance des valeurs obtenues pour F_1, F_2, F_3 et F_{12}.

La suite de Syracuse: Cette suite ressemble à un jeu de calcul. On prend n'importe quel nombre entier plus grand que 1 (2, 3, 73, 153, ...) ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En réitérant l'opération plusieurs fois, on obtient une suite de nombres... qui finit toujours par aboutir à la même séquence.
Cette **suite de Syracuse** se définit de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_1 = N \text{ (valeur initiale entière)} \\ u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est paire} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impaire} \end{cases} \end{cases}$$

La **conjecture** affirme que, quel que soit le terme initial n de la suite, celle-ci finit inexorablement par boucler sur 4, 2, 1. Par exemple, en commençant par $n = 6$, nous obtenons la suite :

$$6 ; 3 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; \dots$$

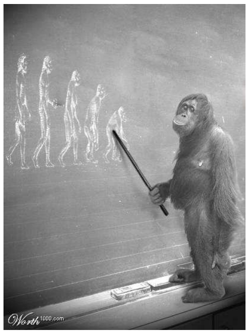
Sous son apparente simplicité, elle défie encore les mathématiciens actuels.

La naissance de ce problème semble se situer autour des années 1950 ; il fut proposé aux étudiants de l'université américaine de Syracuse. Celui-ci remporta un vif succès. Cette conjecture mobilisa tant les mathématiciens durant les années 60, en pleine guerre froide, qu'une blague courut selon laquelle ce problème serait l'œuvre d'un complot soviétique pour ralentir la recherche américaine. Plus sérieusement, le mathématicien Paul Erdös dit à propos de cette conjecture : « les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes ». Il proposa une offre de 500 $ à quiconque lui donnerait une solution.

On cherche encore ...

0.2 Croissance et décroissance des suites

Définitions:



- Une suite est **croissante** si chaque terme est supérieur ou égal à son précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \geqslant u_n$$

- Une suite est **décroissante** si chaque terme est inférieur ou égal à son précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \leqslant u_n$$

- Une suite est **monotone** si elle est croissante ou si elle est décroissante.
- De manière analogue, on définit une suite **strictement croissante**, **strictement décroissante** ou **strictement monotone** lorsque l'inégalité qui lie ses termes est stricte.
- Une suite est **constante** si tous ses termes sont égaux.

Exemple 4:

a) La suite $1\,;2\,;2\,;3\,;3\,;3\,;4\,;4\,;4\,;4\,;5;\ldots$ est une suite croissante.

b) La suite $1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{4}\,;\ldots$ est une suite strictement décroissante.

c) Observer la croissance de la suite $u_n = |n-4|$, $n \in \mathbb{N}^*$

Cette suite n'est ni croissante ni décroissante. On dira cependant que cette suite est strictement croissante à partir de son terme de rang 4.

d) La croissance ou la décroissance d'une suite (u_n) peut être déterminée par **l'étude du signe** de $u_{n+1} - u_n$.

La suite (u_n) donnée par $u_n = n^2 - n + 3$ est strictement croissante, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$u_{n+1} - u_n =$

Exemple suite: **e)** La suite (u_n) donnée par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 3}{2} \end{cases}$ est décroissante, car :

$u_{n+1} - u_n =$

Exercice 0.9: Les suites (u_n) suivantes sont-elles croissantes ? Décroissantes ?

a) $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

b) $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

c) $u_n = \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$

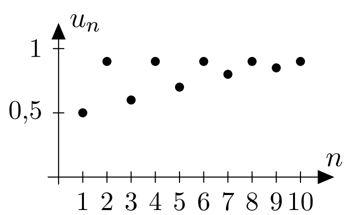
d) $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

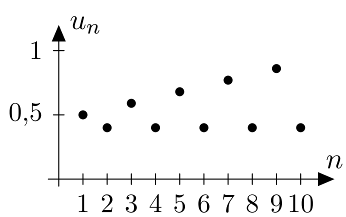
e) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{3} \end{cases}$

Exemple 5: La suite : 1 ; 1,1 ; 1,11 ; 1,111 ; 1,1111 ; ... est une suite strictement croissante qui n'atteindra jamais la valeur 2.

Elle est dite **majorée par 2**. Trouver d'autres majorants de cette suite et quel pourrait être **le plus petit de tous les majorants** ?

Définitions:





- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que chaque terme de la suite est inférieur ou égal à ce nombre. Dans ce cas, le nombre M est appelé un **majorant** de la suite.
- La **borne supérieure** de la suite est le plus petit majorant de cette suite.
- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que chaque terme de la suite est supérieur ou égal à ce nombre. Dans ce cas, le nombre m est appelé un **minorant** de la suite.
- La **borne inférieure** de la suite est le plus grand minorant de cette suite.
- Une suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème: Toute suite majorée possède un plus petit majorant. De même, toute suite minorée admet un plus grand minorant.

Preuve: *Nous admettons ce théorème sans démonstration. Vous le démontrerez qu'une fois votre maturité en poche.*

Exercice 0.10: Reprendre les suites de l'exercice précédent ; sont-elles majorées ? Minorées ? Indiquer les éventuelles bornes.
Indication : esquisser rapidement ces suites.

Exercice 0.11: On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{2n-7}{3n+2}$

a) Montrer que (u_n) est strictement croissante.

b) Démontrer que cette suite admet -1 pour minorant.

c) Quelle est la borne inférieure de la suite ?

Exercice 0.12: Démontrer que $1/2$ est un minorant de la suite $\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 0.13: On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$$

a) Écrire les quatre premiers termes de cette suite, puis les exprimer en puissance de 2.

b) Exprimer u_n, u_{n+1} puis $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n.

c) En déduire que cette suite est croissante et majorée.

Exercice 0.14: On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général :

$$s_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$$

a) Calculer s_1, s_2, s_3 et s_4.

b) Déterminer le plus petit terme figurant dans la somme définissant s_n.

c) Déterminer le plus grand terme figurant dans la somme définissant s_n.

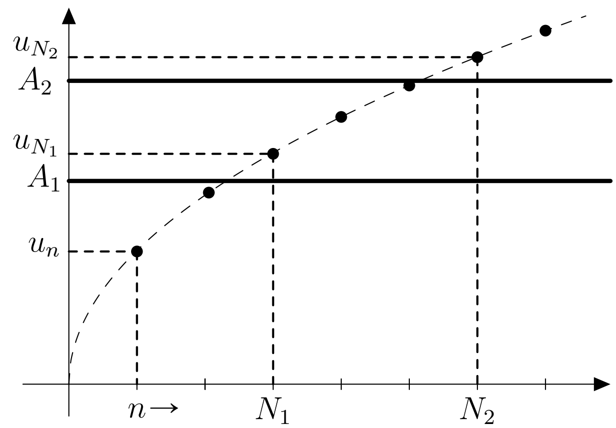
d) En déduire l'encadrement suivant : $\dfrac{n}{n+1} \leqslant s_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$

0.3 "Convergence" d'une suite vers $+\infty$ ou $-\infty$

Exemple d'intro: Considérons la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $h_n = 5\sqrt{n}$.

Existe-t-il une valeur que h_n ne puisse dépasser ? Disons un milliard pour se fixer les idées.

Graphiquement, on observe :



Il semblerait que quelle que soit la hauteur A de la "barre", à partir d'un certain indice N, on observe que les termes de la suite seront toujours au-dessus de A. Remarquons que la valeur de N dépend de la hauteur A que l'on veut dépasser.

Exemple 6: On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{2n^2}{n+1}$.
Calculer le plus petit entier naturel N tel que :

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad u_n > 1'000$$

Exercice 0.15: On considère la suite $(u_n)_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ n > 1}}$ définie par $u_n = \dfrac{3n^2}{n-1}$.
Calculer le plus petit entier naturel N tel que :

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad u_n > 1 \cdot 10^{10}$$

Exercice 0.16: Déterminer un nombre entier naturel N tel que :

a) $n \geqslant N \implies (1{,}1)^n > 1'000$

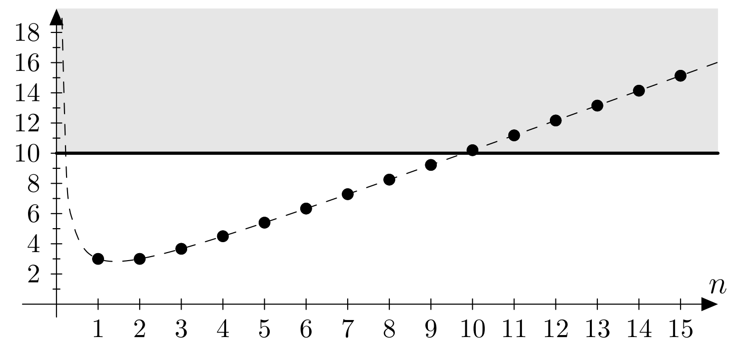
b) $n \geqslant N \implies (0{,}5)^n < 0{,}05$

Exercice 0.17: On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{n^2+2}{n}$.

a) Calculer les 5 premiers termes de la suite et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b) Montrer que cette suite est monotone croissante.

c) En observant la représentation de la suite, quelle conjecture peut-on faire sur sa limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?



d) On considère la bande $]10\,;+\infty[$.

Montrer qu'à partir d'un certain indice N à déterminer, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle.

e) On considère maintenant la bande $]A\,;+\infty[$ avec $A > 10$.

Montrer qu'à partir d'un certain indice N à déterminer en fonction de A, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle.

Définition: Une suite (u_n) est dite **"convergente" vers $+\infty$** si et seulement si, pour tout réel positif A, il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur ou égal à N, on a $u_n > A$.

On dit aussi que cette suite (u_n) **tend vers plus l'infini**.

Traduite en *langage symbolique*, la définition précédente devient :

Définition:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall A \in \mathbb{R}_+ \text{ , } \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \geqslant N \implies u_n > A$$

Exemple 7: Montrer que la suite (h_n) de terme général $h_n = 5n^2$ est "convergente" vers $+\infty$.

Exercice 0.18: Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{3n^2-5}{4}$ est "convergente" vers $+\infty$.

Définition: Une suite (u_n) est dite **"convergente" vers $-\infty$** si ses termes deviennent et restent inférieurs à tout nombre négatif donné arbitrairement.

Exercice 0.19: Donner la définition précédente en *langage symbolique* en l'accompagnant d'une figure d'étude convaincante.

Exercice 0.20: On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*-\{1\}}$ définie par $u_n = \dfrac{n^2}{1-n}$.

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Calculer le plus petit entier naturel N tel que :

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad u_n < -1'000$$

c) Calculer le plus petit entier naturel N tel que :

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad u_n < A$$

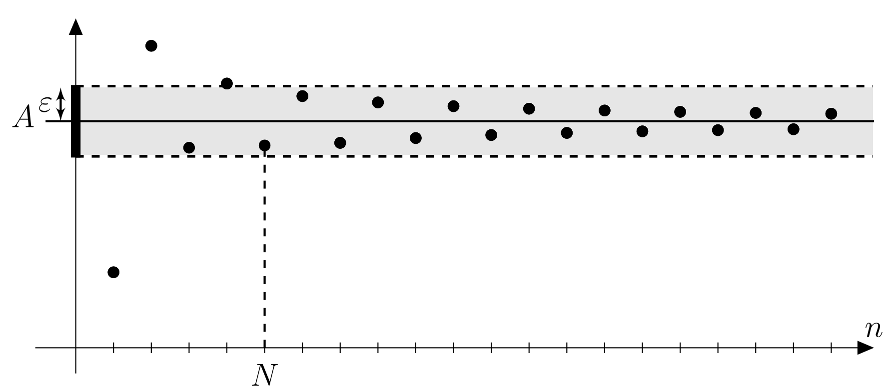
0.4 Convergence d'une suite

Exemple d'intro: Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $u_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

a) Calculer les termes d'indice $n = 1, 2, 3, 10, 100, 1'000$.
Quelle conjecture peut-on effectuer ?

b) Déterminer les indices n pour lesquels la différence entre $1/2$ et u_n est inférieure à $1/100$, $1/1000$, puis 10^{-9}.

Définition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite. Un nombre réel A est appelé **limite de la suite** (u_n) et on note $A = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, si u_n est arbitrairement proche de A dès que n est suffisamment grand. Lorsqu'une suite admet un nombre limite A, on dit qu'elle **converge** vers ce nombre.



Déf. équivalente: On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge vers le réel $\boldsymbol{A}$** si et seulement si tout intervalle ouvert contenant A contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Traduites en *langage symbolique*, les définitions précédentes deviennent :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = A$$

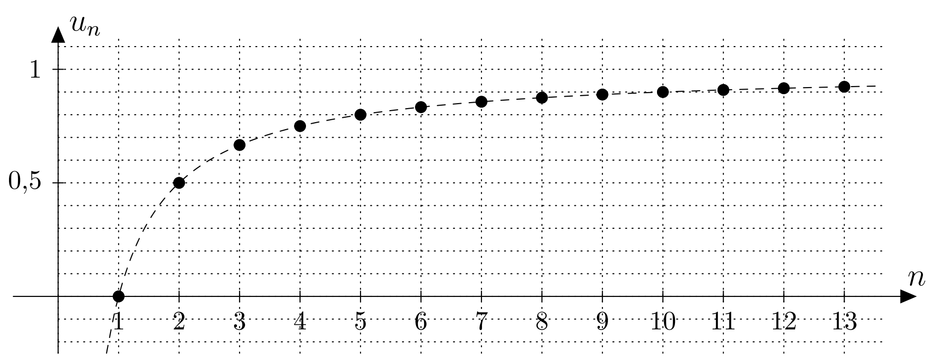
$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \ \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad A-\varepsilon < u_n < A+\varepsilon$$

Le nombre ε est un nombre strictement positif, il est arbitrairement petit. L'entier N indique un rang à partir duquel ($n \geqslant N$) tous les termes u_n sont « dans la bande » de demi-largeur ε centrée en A.

Définition: Une suite qui n'est *pas "convergente" vers* $+\infty$ ou $-\infty$ et qui n'est *pas convergente* est appelée une **suite divergente**.

Exercice 0.21: On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ représentée ci-dessous.



a) Vers quelle valeur cette suite semble-t-elle tendre ?

Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, déterminer N tel que :

b) $\forall n \geqslant N \implies$ les u_n sont compris dans une bande de demi-largeur $\varepsilon = 0{,}4$.

c) $\forall n \geqslant N \implies$ les u_n sont compris dans une bande de demi-largeur $\varepsilon = 0{,}2$.

Exemple 8: Le terme général de la suite de l'exercice précédent est $u_n = \dfrac{n-1}{n}$.
Sachant que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$, déterminer N tel que :

a) $\forall n \geqslant N \implies$ les u_n sont compris dans une bande de demi-largeur $\varepsilon = 10^{-9}$.

b) $\forall n \geqslant N \implies$ les u_n sont compris dans une bande de demi-largeur ε.

Exercice 0.22: On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont le terme général est :

$$u_n = \frac{-n+3}{n}$$

a) Vers quelle valeur cette suite semble-t-elle tendre ?

Sachant que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$, déterminer N tel que :

b) $\forall n \geqslant N \implies$ les u_n sont compris dans une bande de demi-largeur $\varepsilon = 0{,}1$.

c) $\forall n \geqslant N \implies$ les u_n sont compris dans une bande de demi-largeur ε.

Exemple 9: On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général est donné par :

$$u_n = \frac{2n-1}{n}.$$

a) Vers quelle valeur semble converger cette suite ?

b) En utilisant la définition symbolique de la convergence d'une suite, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Exercice 0.23: On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{3n-1}{4n+5}$

a) Écrire sous forme décimale les 1$^{\text{er}}$, 10$^{\text{e}}$, 1'000$^{\text{e}}$ et 10'000$^{\text{e}}$ termes de la suite. En déduire la valeur probable de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

b) En utilisant la définition de convergence en langage symbolique, déterminer $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geqslant N,\ \ A-\varepsilon < u_n < A+\varepsilon \quad \text{pour un } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$$

Théorème: La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général est $u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0.

Exercice 0.24: Démontrer le théorème précédent.

Exercice 0.25: Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général :

$$u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

Et si vous considériez la suite : $v_n = |u_n|$

Exercice 0.26: Étudier la convergence de la suite $\left((-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 0.27: Dans la littérature, la définition symbolique de la convergence d'une suite (u_n) est :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a$$

$$\Updownarrow$$

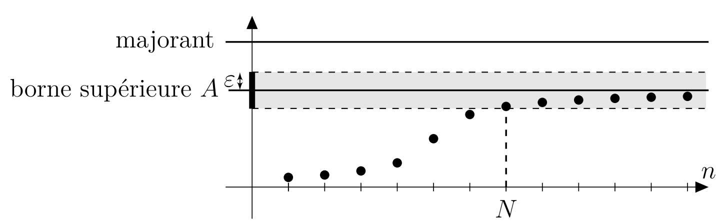
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n > p \implies |u_n - a| < \varepsilon$$

Montrer que cette définition est équivalente à celles proposées dans le cadre de ce cours.

0.5 Critères de convergence

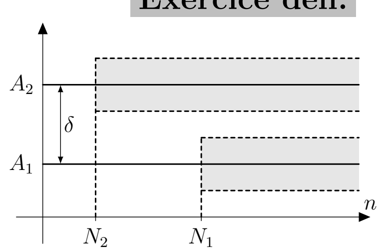
Théorème:
- Une suite croissante et majorée converge.
- Une suite décroissante et minorée converge.
- Une suite monotone et bornée converge.

Preuve:



Théorème: Si une suite (u_n) converge vers A alors A est unique. On l'appelle donc **la** limite de la suite (u_n).

Exercice défi: Démontrer le théorème précédent en supposant par l'absurde qu'elle puisse converger vers 2 nombres différents A_1 et A_2 et en construisant une contradiction à l'aide de la figure ci-contre.



Théorème: (u_n) converge vers 0 $\iff$ $(|u_n|)$ converge vers 0.

Exercice défi: Démontrer le théorème précédent.

Théorème: Les puissances successives d'un nombre réel strictement positif et inférieur à 1 forment une suite convergente.

Preuve:

Théorème: Une suite convergente est bornée.

Preuve:

Remarque: Du théorème précédent, on en déduit un critère de divergence :

Une suite qui n'est pas bornée diverge.

Cette deuxième affirmation s'appelle la **contraposée** du théorème ci-dessus.

D'une implication, on peut toujours en proposer une deuxième qui s'appelle la contraposée :

$$\text{Si } A \Longrightarrow B \qquad \text{alors} \qquad \text{non}B \Longrightarrow \text{non}A$$

Si A implique B   alors   non B implique non A

Exemple 10: *Proposez la contraposée des affirmations suivantes au sujet d'un quadrilatère $ABCD$:*

- *Si $ABCD$ est un rectangle alors il admet un angle droit.*
- *Si $ABCD$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.*

Théorème: Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.

Exercice 0.28:

a) Proposer une figure d'étude permettant de visualiser le théorème précédent.

b) Que pouvez-vous affirmer au sujet de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = (-1)^n$?

c) L'affirmation suivante est-elle exacte :

$$(u_n) \text{ bornée} \Longleftrightarrow (u_n) \text{ convergente}$$

Théorème: Si (u_n) et (v_n) sont deux suites qui convergent respectivement vers u et v, et si λ est un nombre réel, alors :

- la suite de terme général $u_n + v_n$ converge vers $u + v$.
- la suite de terme général λu_n converge vers λu.
- la suite de terme général $u_n \cdot v_n$ converge vers $u \cdot v$.
- la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers $\dfrac{u}{v}$,
  si $v \neq 0$ et $v_n \neq 0$ pour tout n.

Exercice 0.29:

a) Si (u_n) converge vers u et (v_n) converge vers v, montrer que $(u_n + v_n)$ converge vers $u + v$.

b) Si (u_n) est bornée et (v_n) converge vers 0, montrer que $(u_n \cdot v_n)$ converge vers 0

c) En déduire que :

Si (u_n) converge vers u et (v_n) converge vers v, alors $(u_n \cdot v_n)$ converge vers $u \cdot v$.

Indication : Commencer par montrer que :

$$u_n \cdot v_n - u \cdot v = u_n(v_n - v) + (u_n - u) \cdot v$$

afin d'en déduire que $(u_n \cdot v_n - u \cdot v)$ *converge vers...*

Exercice 0.30: Montrer que la proposition suivante est fausse :

$$(u_n) \text{ bornée et } (v_n) \text{ convergente } \implies (u_n \cdot v_n) \text{ convergente.}$$

Rappel: Rappelons que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et que toute suite constante $(u_n = \lambda)$ converge vers λ.

Exemple 11: Vers quelles valeurs convergent les suites dont on donne le terme général :

a) $u_n = \dfrac{3n+1}{n}$

b) $u_n = \dfrac{3}{n^2}$

c) $u_n = \dfrac{3n^2 - 5n + 6}{2n^2 - 3}$

d) $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^2 - 3}}{3n - 1}$

Exercice 0.31: Étudier la convergence des suites (u_n) définies par leur terme général :

a) $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$ **b)** $u_n = \dfrac{5-n^2}{n+2}$

c) $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ *Indication : montrer que* $2^n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d) $u_n = n^k\ ,\ \ k \in \mathbb{R}$ **e)** $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

f) $u_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n+1}{n}$ **g)** $u_n = \dfrac{\sqrt{2n^2+3}}{n+1}$

h) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$

Exercice 0.32: Déterminer si les suites suggérées ci-dessous convergent ou divergent. Si elles convergent, trouver vers quelle valeur.

a) $\dfrac{7}{11}\ ;\ \dfrac{9}{21}\ ;\ \dfrac{11}{31}\ ;\ \dfrac{13}{41}\ ;\ \dfrac{15}{51}\ ;\ \ldots$

b) $1\ ;\ \dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{9}{5}\ ;\ \dfrac{16}{7}\ ;\ \dfrac{25}{9}\ ;\ \ldots$

c) $-\dfrac{5}{6}\ ;\ \dfrac{25}{36}\ ;\ -\dfrac{125}{216}\ ;\ \ldots$

Exercice 0.33: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par son terme général :

$$u_n = \sqrt{n^2+6n} - n$$

a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer l'éventuelle limite de la suite.

b) Montrer que $u_n = \dfrac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1}$ puis en déduire la limite.

Théorème: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que $u_n < v_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Preuve: *cf. exercice qui suit.*

Exercice 0.34: Compléter ci-dessous la preuve du théorème précédent :

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$.

Par l'absurde, supposons que $\ldots < \ldots$ et posons $\varepsilon = \dfrac{u-v}{4} > 0$.

- Comme u_n est ...., il existe $N_1 \geqslant 0$ tel que :

$$|u_n - u| < \ldots, \text{ pour tout } n \geqslant \ldots$$

  En d'autres termes, on a $\ldots < u_n - u < \varepsilon$ et donc $u_n > u - \varepsilon$ pour tout $n \geqslant \ldots$

- Comme v_n est ...., il existe $N_2 \geqslant 0$ tel que :

$$|v_n - v| < \ldots, \text{ pour tout } n \geqslant \ldots$$

  En d'autres termes, on a $\ldots < v_n - v < \varepsilon$ et donc $v_n > v + \varepsilon$ pour tout $n \geqslant \ldots$

- Soit $N = \max\{N_1 ; N_2\}$. Pour tout $n \geqslant N$, on a ainsi :

$$v_n < \ldots\ldots = v + \frac{\ldots - \ldots}{\ldots\ldots} < v + \frac{u-v}{2} =$$

$$\frac{\ldots + \ldots}{2} = u - \frac{u-v}{2} < u - \frac{u-v}{4} = u - \ldots < u_n \ \lightning$$

  Ainsi, on a $\ldots \leqslant \ldots$ (et donc .... $\leqslant$ ....)

Théorème: des deux gendarmes

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers la même limite L et (w_n) une suite telle que $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n \quad \forall n$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = L$$

Figure d'étude:

Exercice 0.35: Compléter la preuve du théorème précédent ci-dessous :

Soit $\epsilon > 0$.

- Comme u_n est ……………, il existe $N_1 \geqslant 0$ tel que :

  $$|u_n - L| < \dots, \text{ pour tout } n \geqslant \dots$$

  En d'autres termes, on a $\dots < u_n - L < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant \dots$

- Comme v_n est ……………, il existe $N_2 \geqslant 0$ tel que :

  $$|v_n - L| < \dots, \text{ pour tout } n \geqslant \dots$$

  En d'autres termes, on a $\dots < v_n - L < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant \dots$

- Soit $N = \max\{N_1 ; N_2\}$. Pour tout $n \geqslant N$, on a ainsi :

  $$-\epsilon < u_n - L \leqslant \dots - L \leqslant v_n - L < \epsilon$$

  Ce qui implique $|w_n - L| < \dots$ qui assure donc bien la convergence souhaitée.

Exemple 12: Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin(n)}{n} = 0$

Exercice 0.36: À l'aide du théorème des deux gendarmes, déterminer :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\cos(n)}{n^2}$ **b)** $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n}$

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Introduction au concept de fonction

Introduction: Le terme mathématique *fonction* apparaît à la fin du XVII^{e} siècle, quand le calcul différentiel et intégral en était aux premiers stades de son développement. Cet important concept est maintenant l'épine dorsale des cours de mathématiques et il est indispensable dans tous les domaines scientifiques.

Exemple 1: Vous achetez des timbres à 90 centimes. Le prix que vous paierez à la caisse dépendra du nombre de timbres que vous achetez. On dira alors que le prix *est fonction du* nombre de timbres.

Définition: Lorsqu'on met en relation des éléments d'un ensemble A avec des éléments d'une partie B, on obtient **une application f de A vers B**, si les **2 règles** suivantes sont respectées :

- tout élément de A est mis en relation avec un élément de B ;
- aucun élément de A n'est mis en relation avec plusieurs éléments de B.

Une application d'une partie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est appelée **fonction**.
Si x est mis en relation avec y par la fonction f, on dit que **y est l'image de x par f**.
On dira également que x est une **préimage** de y.

On rencontre différentes façons de représenter une fonction :

Expression de la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : A & \to & B \\ x & \mapsto & 0{,}9x \end{array}$$

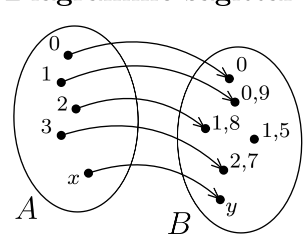
ou $\quad f(x) = 0{,}9x$

ou $\quad y = 0{,}9x$

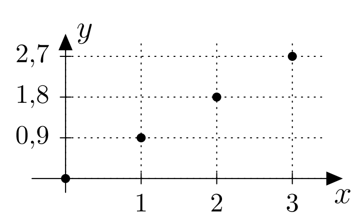
Tableau de valeurs

x	$f(x)$
0	0
1	0,9
2	1,8
3	2,7

Diagramme sagittal

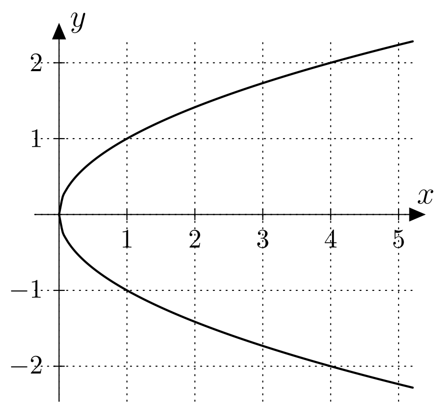


Représentation graphique

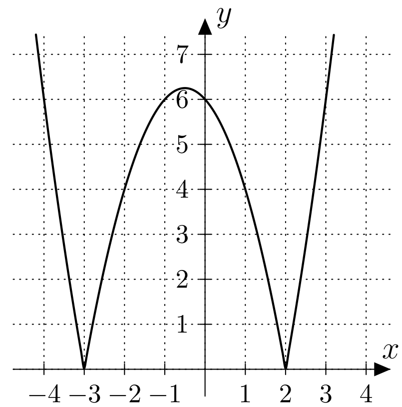


Exercice 1.1: Les courbes représentées ci-dessous sont-elles des représentations de fonctions ?

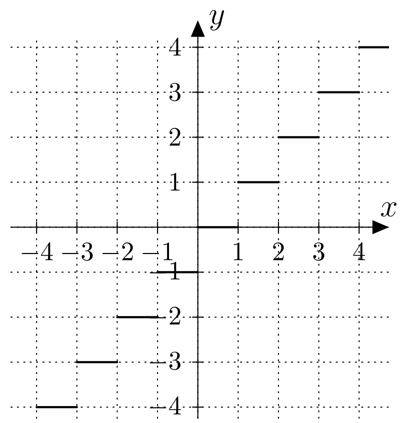
a)



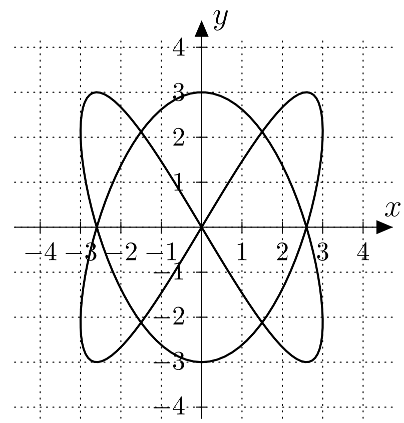
b)



c)



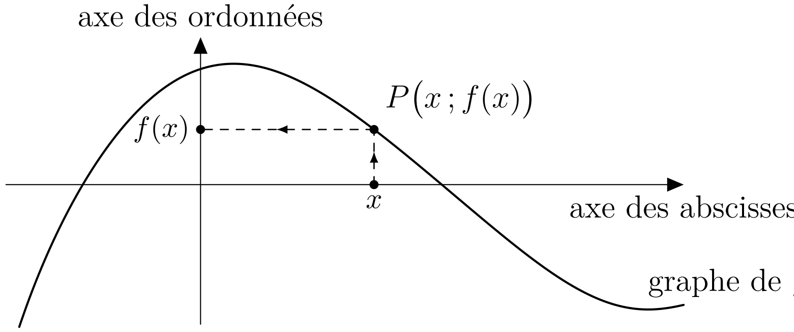
d)



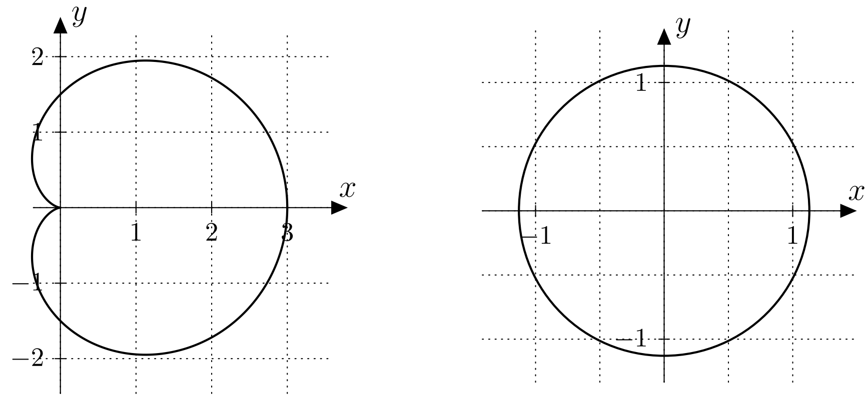
Définition: Le **graphe** d'une fonction f est l'ensemble de **tous les couples de la forme** $\big(x\,;f(x)\big)$ où x est un élément de l'ensemble de départ (ou ensemble de définition).

On représente en général le graphe d'une fonction dans le système d'axes Oxy, en traçant l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont de la forme $\big(x\,;f(x)\big)$.

On dit alors que le graphe de f est la **courbe d'équation** $y = f(x)$.



Attention: Toute courbe n'est pas forcément associée au graphe d'une fonction



Test de la droite verticale: *Il est facile de vérifier si une courbe est bien le graphe d'une fonction. Une droite verticale balayant le plan de gauche à droite doit partout croiser le graphe au plus une fois (zéro ou une fois).*

Exercice 1.2: Tracer le graphique des fonctions f suivantes pour $x \in [-3\,;3]$

a) $f(x) = 2x - 1$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ **c)** $f(x) = x^2 - 2x$

d) $f(x) = -x^2 + 4$ **e)** $f(x) = |x|$ **f)** $f(x) = \sqrt{x+2}$

Exercice 1.3: Un certain nombre d'exercices ou de compléments théoriques vous sont proposés sur mon site dont l'adresse est :

`www.javmath.ch`

Cliquez ensuite sur les liens 2e année : Maturité standard ou Maturité renforcée. Vous repérerez ces compléments dans ce polycopié à l'aide du logo représenté ci-contre.
L'exercice 1.3 vous attend donc à l'adresse ci-dessus.

Exercice 1.4: Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$.

a) Déterminer les abscisses des points où la courbe $y = f(x)$ coupe l'axe Ox.

b) Déterminer l'ordonnée du point où la courbe $y = f(x)$ coupe l'axe Oy.

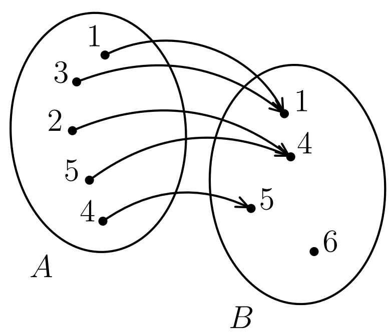
1.2 Image et image réciproque

Définition: Soit f une fonction de l'ensemble A dans l'ensemble B.

- L'**image** de l'application f, notée $\mathbf{Im}(\boldsymbol{f})$ est le sous-ensemble de B constitué de toutes les images des éléments de l'ensemble de départ A.
- L'**image réciproque** (ou préimage) d'un élément y de l'ensemble d'arrivée B, notée ${}^{r}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$, est l'ensemble des éléments de A dont l'image par l'application f est y.
- L'**image réciproque** d'une partie P de l'ensemble d'arrivée B, notée ${}^{r}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P})$, est l'ensemble des éléments de A dont l'image par l'application f est contenue dans P.

Exemple 2:

- On considère le diagramme sagittal suivant. Compléter :



$f(1) = \ldots\ldots$

${}^{r}f(1) = \ldots\ldots$

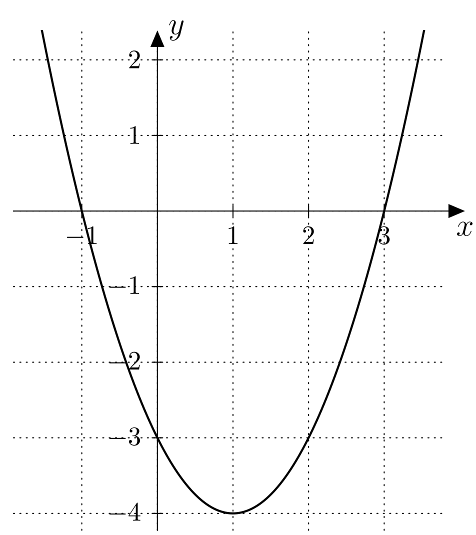
$f(\{1\,;2\,;3\}) = \ldots\ldots$

${}^{r}f(\{1\,;4\}) = \ldots\ldots$

${}^{r}f(6) = \ldots\ldots$

$\mathrm{Im}(f) = \ldots\ldots$

- Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x - 3$ représentée ci-dessous. Compléter :



$f(1) = \ldots\ldots$

${}^{r}f(0) = \ldots\ldots$

$f([0\,;3]) = \ldots\ldots$

${}^{r}f([-4\,;0]) = \ldots\ldots$

${}^{r}f(-5) = \ldots\ldots$

$\mathrm{Im}(f) = \ldots\ldots$

- Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2$, compléter les relations

  $f(0) = \ldots\ldots$

  ${}^{r}f(6) = \ldots\ldots$

  $\mathrm{Im}(f) = \ldots\ldots$

  ${}^{r}f([11\,;27]) = \ldots\ldots$

www.javmath.ch

Exercice 1.5: Soit f la fonction donnée par $f(x) = 3x^2 + x - 5$

a) Calculer les images de 0 et de -3.

b) Calculer les préimages (ou image réciproque) de 5 et de -6.

Exercice 1.6: On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Effectuer un tableau de valeurs pour $x \in [-4\,;4]$.

b) Représenter le graphique de cette fonction.

c) À l'aide du graphique déterminer :

$f(\{-1\,;0\,;2\})$	${}^{r}f(\{-6\,;0\,;4\})$	$f(\mathbb{R})$	$f([3\,;6[)$
$f([1\,;2])$	${}^{r}f([-3\,;-2])$	${}^{r}f([1\,;2])$	${}^{r}f([2\,;4[)$

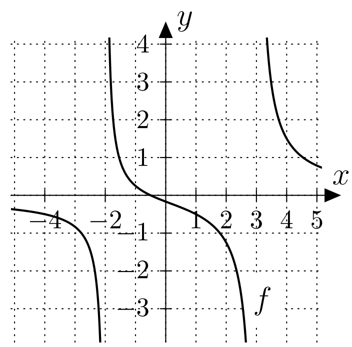
Exercice 1.7: **a)** Soit la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 6$. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

b) Même question pour la fonction g définie par $g(x) = x^2 + 2x + 6$.

Exercice 1.8: Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$. Déterminer

a) $f(4)$	**b)** $f(3)$	**c)** $4f(x)$	**d)** $f(4x)$
e) $f(x+4)$	**f)** $f(4) + f(x)$	**g)** $f(-x)$	**h)** $-f(x)$

1.3 Ensemble de définition



Soit la fonction f représentée ci-contre et définie par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2 - x - 6}$$

Déterminer $f(-2)$ puis $f(3)$

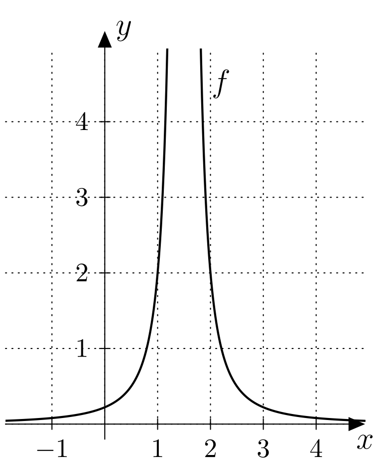
Lorsque l'on cherche l'ensemble de définition, on se souviendra des **commandements** suivants :

- Il est interdit de *diviser par zéro.*
- Il est interdit de prendre *la racine carrée d'un nombre négatif.*
- Il est interdit de calculer *le logarithme d'un nombre négatif ou nul.*

Nous aurons l'occasion d'étudier plus précisément le pourquoi de ces commandements au chapitre suivant en introduisant le calcul de limites.

Définition: L'**ensemble de définition** d'une fonction f est l'ensemble des nombres x pour lesquels $f(x)$ existe.
On note $\mathrm{E_D}(f)$ cet ensemble (ou simplement $\mathrm{E_D}$).

Exemple 3: Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{4x^2 - 12x + 9}$ représentée ci-contre. Déterminer $E_{\mathrm{D}}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$



Exercice 1.9: Déterminer $\mathrm{E_D}(f)$ des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = 4 - \dfrac{1}{2}x$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$

c) $f(x) = \dfrac{2+x}{x-1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+5x+9}{x^2-18}$

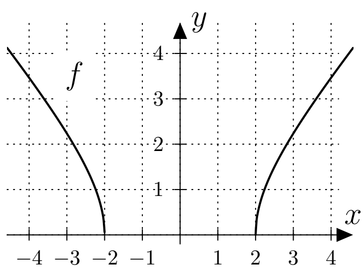
e) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+x}$

f) $f(x) = \dfrac{5}{3x^2-19x-14}$

g) $f(x) = \dfrac{5}{-2x^2+4x-7}$

h) $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2+4x-18}$

Exemple (suite):



- On a représenté la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2-4}$.

  Déterminer $\mathrm{E_D}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f donnée par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f donnée par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$$

Exercice 1.10: Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f définies par :

a) $f(x) = \sqrt{6-3x}$

b) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+5}$

d) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+5)}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-5}}$

f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x-5}}$

1.4 Le tableau de signes, un outil pour les esquisses

Lorsqu'une fonction f est donnée par son expression, une bonne esquisse graphique peut permettre de mieux l'appréhender. La recherche de l'$\mathrm{E_D}(f)$, des zéros de f ainsi que du tableau de signes nous sera le plus souvent suffisante.

Exemple 4: **a)** Effectuer une bonne esquisse de la fonction f définie par :

$$f(x) = (x^2-9)(x+1)^2$$

b) Effectuer une bonne esquisse de la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{5\,(9 - x^2)}{x^2 + 2x + 1}$$

Exercice 1.11: Déterminer $\mathrm{E_D}(f)$, les zéros, le tableau de signes ainsi qu'une esquisse des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = 4 - 5x$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$

c) $f(x) = (x+4)^2(2+x)$

d) $f(x) = -6x^3 + 11x^2 - 3x$

e) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

f) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 36$

g) $f(x) = \dfrac{x(x+4)}{3-2x}$

h) $f(x) = \dfrac{2x}{16 - x^2}$

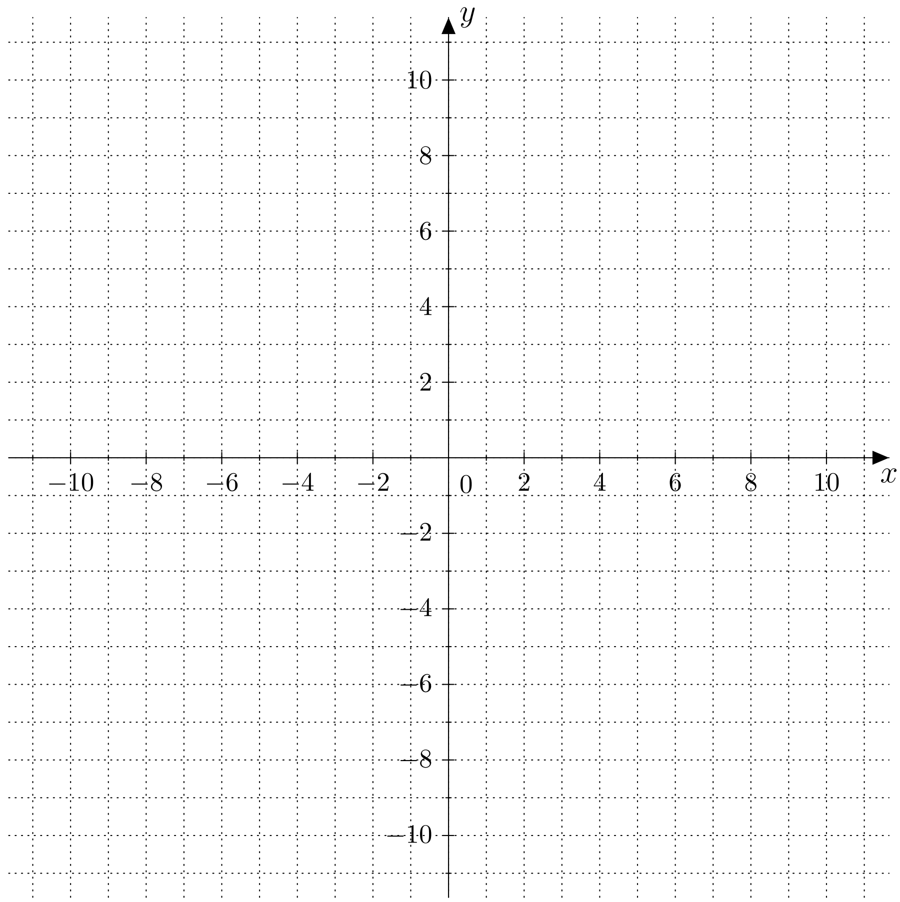
i) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2(x+1)}{x^2 + x}$

j) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

k) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x+1}$

Exercice 1.12: **a)** Représenter sur le graphe ci-dessous les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \sqrt{81 - x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = -\sqrt{81 - x^2}$$



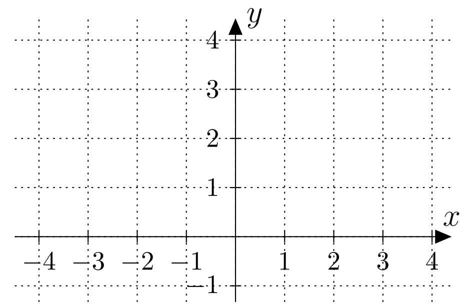
b) Que constatez-vous ?

1.5 Quelques fonctions et le nom de leur courbe :

Fonction constante $f(x) = c$

Son graphe est une droite horizontale "à la hauteur" c

Exemple : $f(x) = 3$

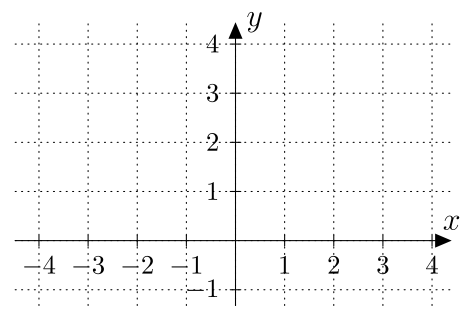


Fonction linéaire $f(x) = m \cdot x$

Son graphe est une droite qui passe par l'origine et dont la pente vaut m

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{diff. de hauteur}}{\text{diff. de longueur}}$$

Exemple : $f(x) = -2x$

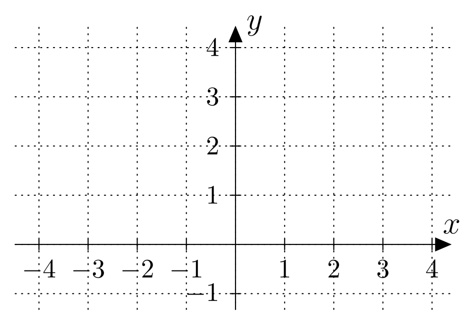


Fonction affine $f(x) = m \cdot x + h$

Son graphe est une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine h

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{diff. de hauteur}}{\text{diff. de longueur}}$$

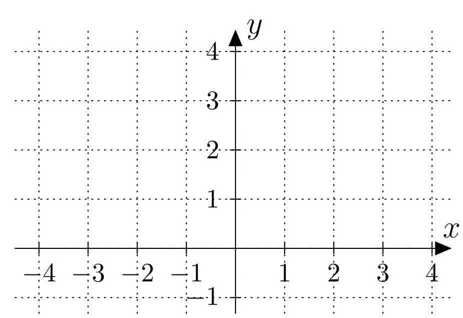
Exemple : $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$



Fonction quadratique (a > 0)
$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$

- Son graphe est une parabole tournée en $\cup$
- L'intersection avec l'axe Ox s'obtient en cherchant les solutions de l'équation
$$ax^2 + bx + c = 0$$
- Les coord. du sommet : $S\left(\frac{-b}{2a} \,;\, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Exemple : $f(x) = x^2 - 1$



Fonction quadratique (a < 0)

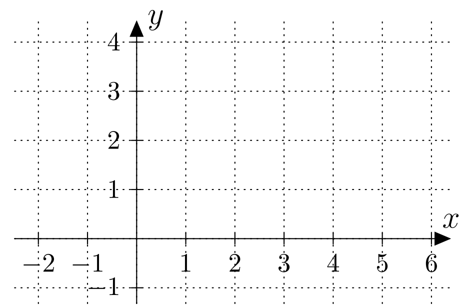
$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a < 0$

- Son graphe est une parabole tournée en $\cap$
- L'intersection avec l'axe Ox s'obtient en cherchant les solutions de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Les coord. du sommet : $S\left(\frac{-b}{2a}\,;f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Exemple : $f(x) = -x^2 + 4x$



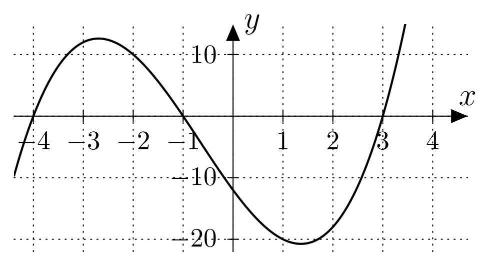
Fonction du troisième degré

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- Son graphe est une courbe admettant au plus "2 virages"
- L'intersection avec l'axe Ox s'obtient en cherchant les solutions de l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$f(x) = (x+4)(x+1)(x-3)$

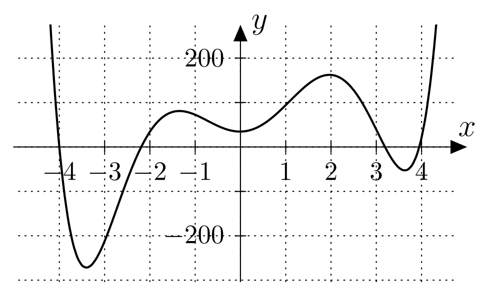


Fonction polynomiale de degré *n*

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

- Son graphe est une courbe admettant au plus "$n-1$ virages"
- Une bonne esquisse de son graphe s'obtiendra en factorisant la fonction et en effectuant un tableau de signes

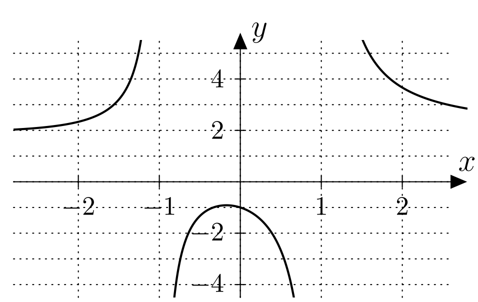
fonction de degré 6

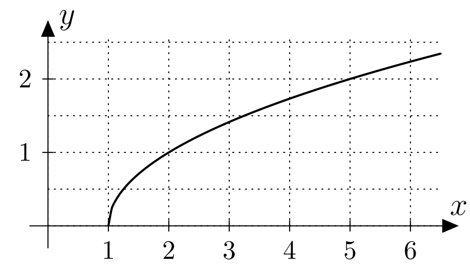


Fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{\text{polynôme } P(x)}{\text{polynôme } Q(x)}$

- Il s'agit du quotient de deux polynômes
- Son graphe admet des singularités pour les valeurs annulant le dénominateur $Q(x)$

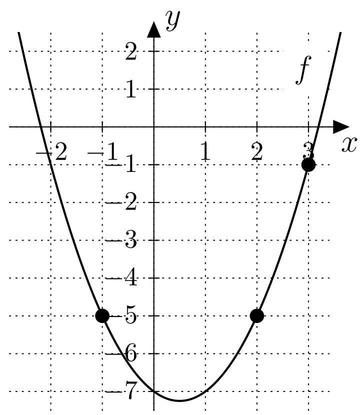
Exemple : $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{(x+1)(x-1)}$



<table>
<tr><td>Fonction racine $f(x) = \sqrt{P(x)}$
Il s'agit de la racine d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle
Il faut particulièrement être attentif à son ensemble de définition !!!</td><td>Exemple : $f(x) = \sqrt{x-1}$
</td></tr>
</table>

1.6 Quelques compléments sur les fonctions quadratiques :

Exemple 5: Déterminer la fonction quadratique f dont on donne la représentation graphique ci-contre :



Exercice 1.13: Déterminer la fonction quadratique f dont le graphe passe par les points :

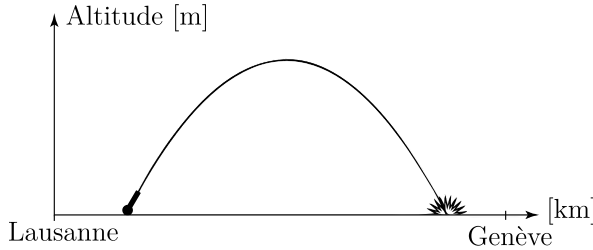
a) $A(-2\,;11)$ $B(1\,;-4)$ $C(3\,;6)$

b) $A(1\,;-2)$ $B(-1\,;-6)$ $C(0\,;-3)$

c) $A(1\,;4)$ $B(-1\,;10)$ $C(2\,;7)$

Exercice 1.14: Un peu d'artillerie !!!

La trajectoire d'un obus est assimilée une parabole



Distance par rapport à Lausanne	altitude de l'obus
20 km	700 m
30 km	1000 m
40 km	900 m

Connaissant 3 points de la trajectoire, saurez-vous retrouver :

a) La position du canon.

b) La position de la cible si elle est à la même altitude que le canon.

c) La flèche de la trajectoire de l'obus (jetez un coup d'oeil dans le dico !).

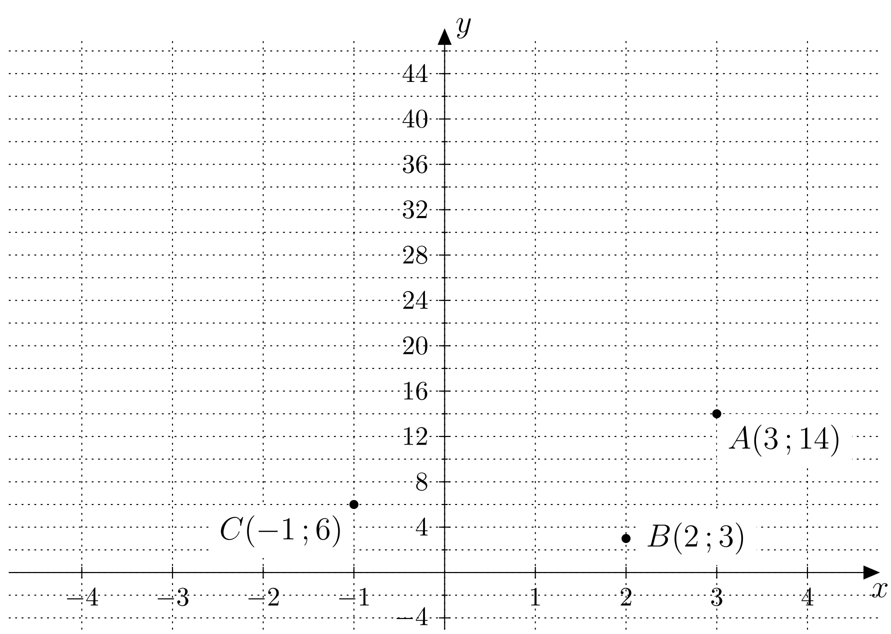
d) Si la cible est à une altitude de 400 m plus élevée que le canon, quelle est sa distance par rapport à Lausanne ?

Exercice 1.15: Les 3 points A, B et C appartiennent à une parabole.

a) Déterminer la fonction passant par ces 3 points.

b) Compléter le plus précisément possible la parabole sur le graphique ci-dessous.

c) Pour quelles valeurs de x la parabole coupe-t-elle l'axe des x ?



Exercice 1.16: Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 12x + 4$.

a) Montrer que pour tout réel k : $f(6-k) = f(6+k)$

b) En déduire que la parabole admet un axe de symétrie dont on précisera l'équation.

Exercice 1.17: Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Montrer que pour tout réel k : $f\left(-\frac{b}{2a} - k\right) = f\left(-\frac{b}{2a} + k\right)$

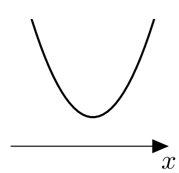
b) En déduire que la parabole admet un axe de symétrie dont on précisera l'équation.

Exercice 1.18: Calculer les zéros, les coordonnées du sommet puis esquisser la parabole des fonctions quadratiques f suivantes :

a) $f(x) = x^2 + x + 1$ **b)** $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

c) $f(x) = (x-2)(5-x)$ **d)** $f(x) = x^2 - 9x$

Exercice 1.19: Compléter dans les 5 cases restantes les esquisses des paraboles d'équations $y = ax^2 + bx + c$ admettant les propriétés indiquées.

	$b^2 - 4ac < 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

1.7 Opérations sur les fonctions

Définition: Soit deux fonctions f et g. On définit leurs **somme**, **différence**, **produit** et **quotient** en posant que :

$$\big(f+g\big)\big(x\big) = f(x) + g(x)$$
$$\big(f-g\big)(x) = f(x) - g(x)$$
$$\big(f \cdot g\big)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- L'ensemble de définition des fonctions $f+g$, $f-g$ et $f \cdot g$ est l'intersection des ensembles de définition de f et de g
- L'ensemble de définition de la fonction $\dfrac{f}{g}$ est l'intersection des ensembles de définition de f et de g, à quoi on enlève encore les valeurs annulant g

Remarque: En toute généralité, on peut définir des nouvelles fonctions selon ce même principe. Par exemple :

Soit deux fonctions f et g. On définit l'opération $\star$ en posant que :

$$\big(f \star g\big)(x) = f^2(x) + g^2(x)$$

Exemple 6: Soit les fonctions f et g définies par : $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x}$ et admettant respectivement les ensembles de définitions $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$. Compléter :

- $\big(f+g\big)(x) =$

  $\mathrm{E_D}(f+g) =$

- $\big(f-g\big)(x) =$

  $\mathrm{E_D}(f-g) =$

- $\big(f \cdot g\big)(x) =$

  $\mathrm{E_D}(f \cdot g) =$

- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) =$

  $\mathrm{E_D}(f/g) =$

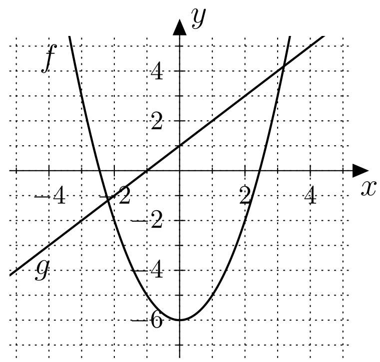
Exercice 1.20: Déterminer dans chaque cas les fonctions :

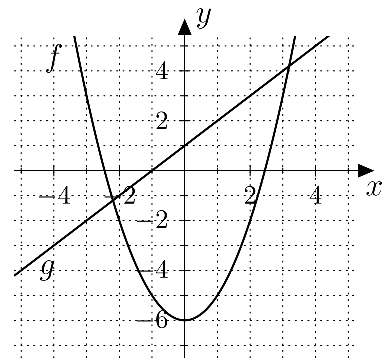
$$\big(f+g\big)(x),\ \big(f-g\big)(x),\ \big(f\cdot g\big)(x),\ \left(\frac{f}{g}\right)(x).$$

Préciser ensuite leur ensemble de définition.

a) $f(x)=3x \quad g(x)=\dfrac{1}{x+2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2x}{x-4} \quad g(x)=\dfrac{x}{x+5}$

Exercice 1.21: On a représenté sur les 2 graphiques suivants les fonctions f et g.

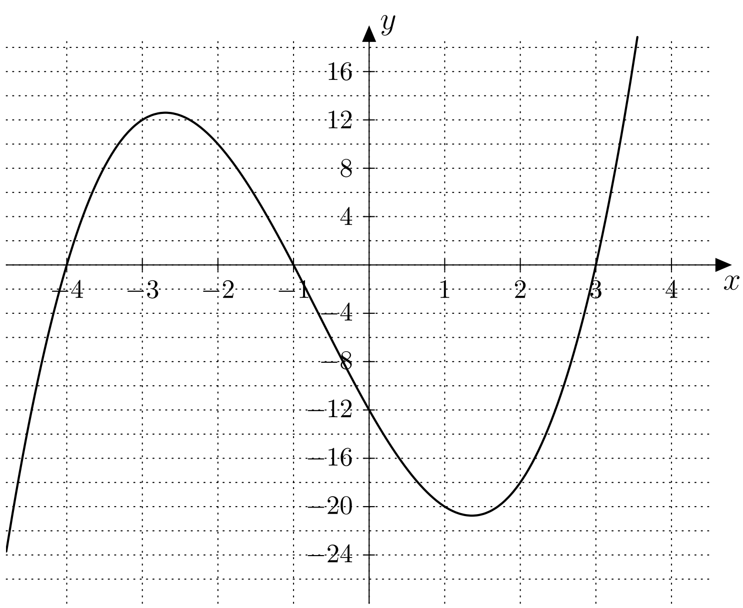




Avec un minimum de calcul, représenter à gauche $(f+g)$.
Avec un minimum de calcul, représenter à droite $(f-g)$.

Exercice 1.22: Soit la fonction f définie par $f(x)=x^3+2x^2-11x-12$ représentée ci-dessous.

a) À l'aide du tableau de valeurs, tracer la fonction g définie par $g(x)=f(x)+5$.

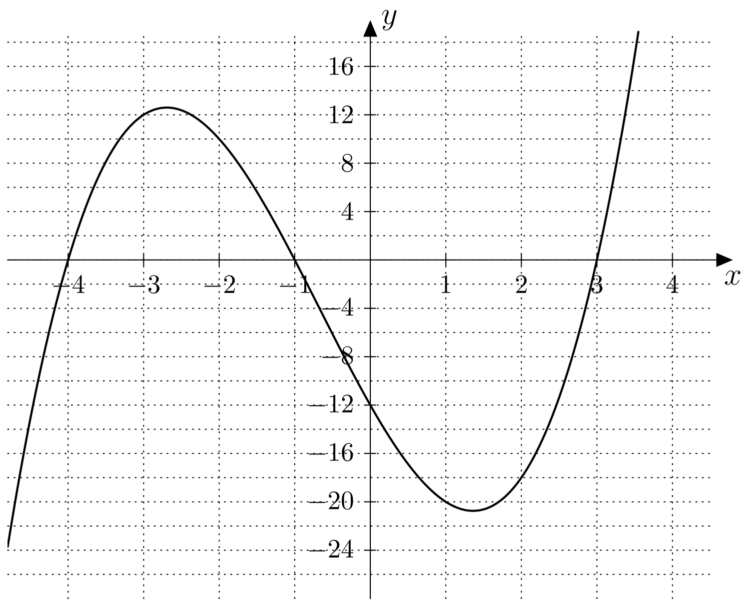


x	$f(x)$	$f(x)+5$
-4	0	
-3	12	
-2	10	
-1	0	
0	-12	
1	-20	
2	-18	
3	0	
4	40	

On obtient la courbe $y=f(x)+c$ par ....

....

b) Même consigne pour la fonction h définie par $h(x) = f(x+1)$

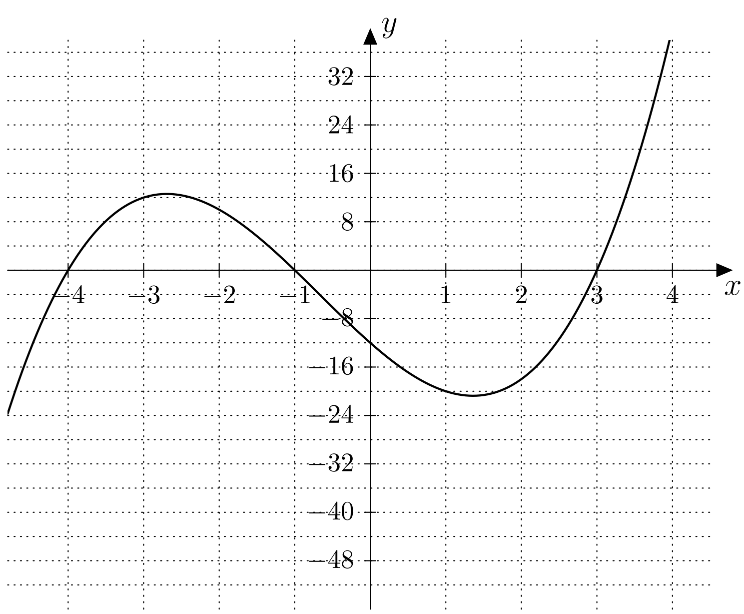


x	$f(x)$	$f(x+1)$
-4	0	
-3	12	
-2	10	
-1	0	
0	-12	
1	-20	
2	-18	
3	0	
4	40	

On obtient la courbe $y = f(x+c)$ par ....

....

c) Même consigne pour la fonction j définie par $j(x) = 2 \cdot f(x)$

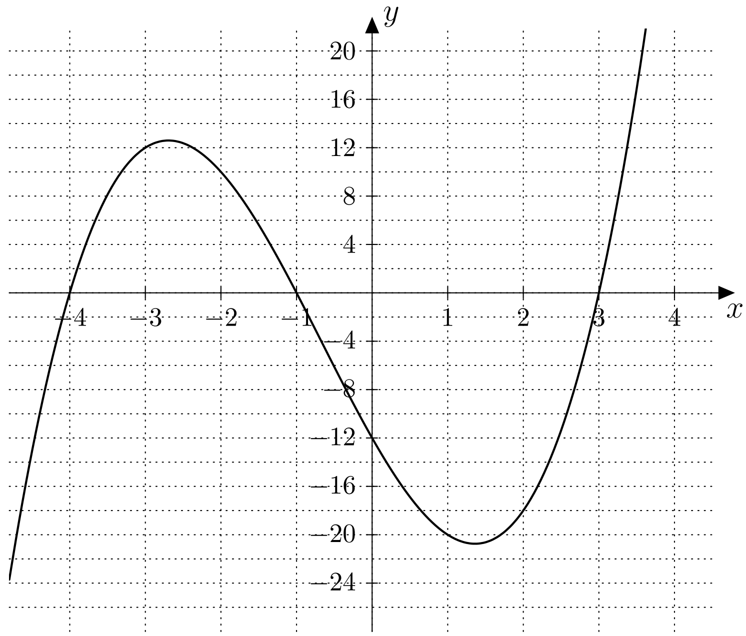


x	$f(x)$	$2 \cdot f(x)$
-4	0	
-3	12	
-2	10	
-1	0	
0	-12	
1	-20	
2	-18	
3	0	
4	40	

On obtient la courbe $y = c \cdot f(x)$ par ....

....

d) Même consigne pour la fonction k définie par $k(x) = -f(x)$

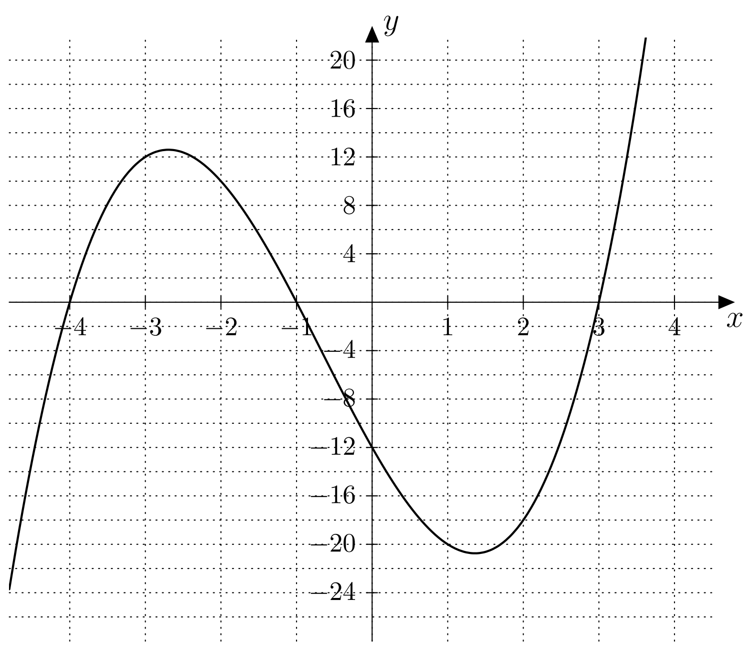


x	$f(x)$	$-f(x)$
-4	0	
-3	12	
-2	10	
-1	0	
0	-12	
1	-20	
2	-18	
3	0	
4	40	

On obtient la courbe $y = -f(x)$ par ....

....

e) Même consigne pour la fonction m définie par $m(x) = |f(x)|$



x	$f(x)$	$\|f(x)\|$
-4	0	
-3	12	
-2	10	
-1	0	
0	-12	
1	-20	
2	-18	
3	0	
4	40	

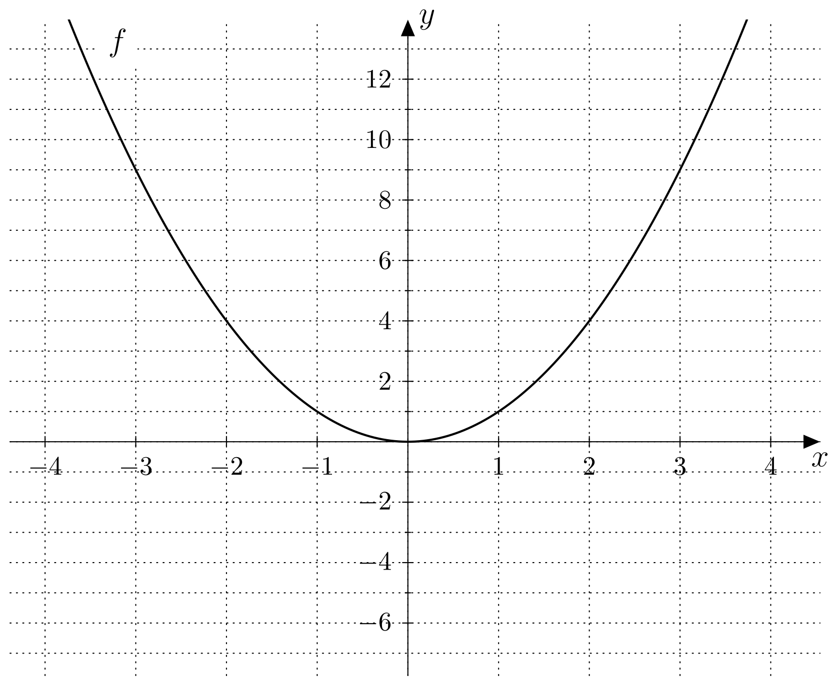
On obtient la courbe $y = |f(x)|$ par ....

....

Exercice 1.23: On a représenté la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

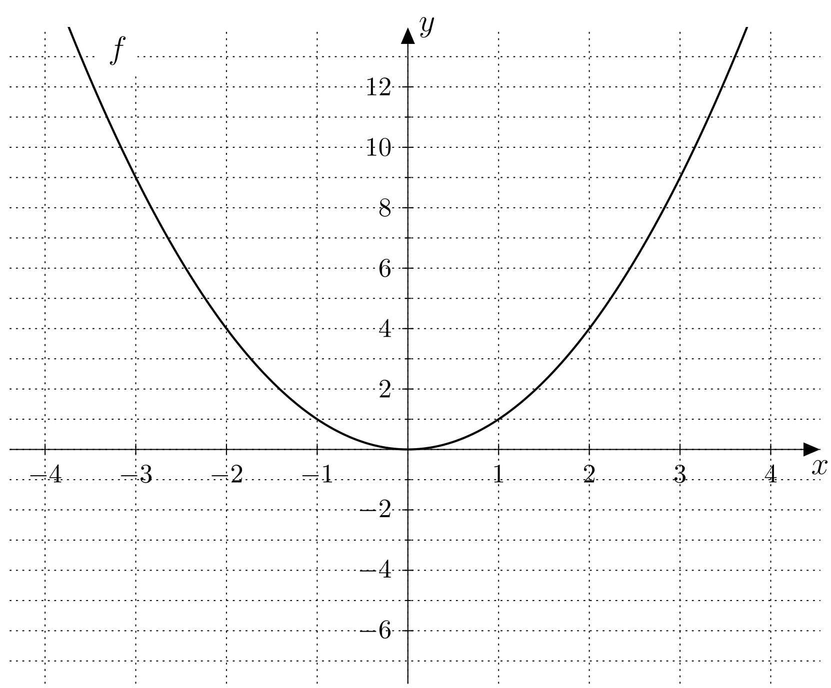
a) Tracer sur le graphique les fonctions g et h définies par :

$$g(x) = f(x) - 4 \qquad \text{puis} \qquad h(x) = |f(x) - 4|$$



b) Tracer sur le graphique les fonctions g et h définies par :

$$g(x) = 2 \cdot f(x) \qquad \text{puis} \qquad h(x) = -\frac{1}{2}f(x)$$



1.8 La composition de fonctions

Les fonctions composées, un exemple préliminaire :

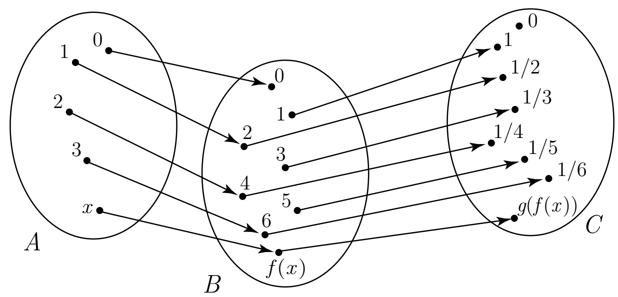
Considérons les trois ensembles suivants : $A = \{0\,;1\,;2\,;3\}$

$B = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ $\qquad C = \{0\,;1\,;1/2\,;1/3\,;1/4\,;1/5\,;1/6\}$

et les applications :

$$f : \begin{array}{rcl} A & \to & B \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \qquad\qquad g : \begin{array}{rcl} \ldots & \to & C \\ y & \mapsto & 1/y \end{array}$$

On peut représenter les diagrammes sagittaux des applications f et g en ne figurant qu'une seule fois l'ensemble B :



On applique successivement f puis g. On fait donc correspondre aux éléments de l'ensemble A, un élément de l'ensemble C par une nouvelle fonction définie par :

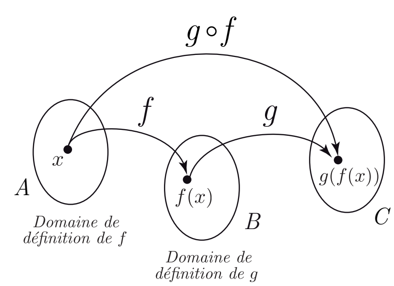
$$\ldots\ldots : \begin{array}{rcl} A - \{0\} & \to & C \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2x} \end{array}$$

Cet exemple nous amène naturellement à la définition suivante :

Définition: La **fonction composée** $g \circ f$ de deux fonctions f et g est définie par :

$$\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Le **domaine de définition** de $g \circ f$ est l'ensemble de tous les x du domaine de définition de f tels que $f(x)$ est dans le domaine de définition de g.



Remarque:

- Attention à ne pas confondre composition et multiplication !
- Remarquez bien l'ordre des opérations est l'inverse de l'ordre d'écriture.

Exemple 7: **a)** $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1$ alors

$(f \circ g)(x)$:

$(f \circ g)(x) =$

$(g \circ f)(x)$:

$(g \circ f)(x) =$

b) $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ alors

$g(f(x))$:

$g(f(x)) =$

$f(g(x))$:

$f(g(x)) =$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 2x - 6$ alors

$(f \circ g)(x) =$

$(g \circ f)(x) =$

Propriété: La composition des fonctions n'est en général **pas commutative** :

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Exercice 1.24: Soit les fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = 3x \qquad g(x) = x - 2 \qquad h(x) = 2x - 3.$$

Déterminer :

a) $f\big(g(x)\big)$ **b)** $g\big(f(x)\big)$ **c)** $f\big(f(x)\big)$

d) $f\big(g(h(x))\big)$ **e)** $g\big(f(h(x))\big)$ **f)** $h\big(g(h(x))\big)$

Exercice 1.25: On donne les fonctions :

$f_0(x) = x$

$f_1(x) = 1 - x$

$f_2(x) = \frac{1}{x}$

$f_3(x) = \frac{1}{1-x}$

$f_4(x) = \frac{x-1}{x}$

$f_5(x) = \frac{x}{x-1}$

Compléter le tableau :

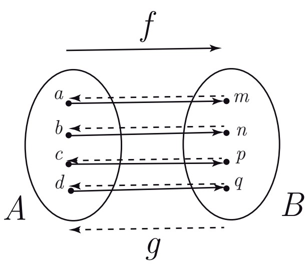
$\circ\nearrow$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0						
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						

Exercice 1.26: Les fonctions f suivantes sont des fonctions composées.
Déterminer deux fonctions g et h tels que $f = g \circ h$.

a) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ **c)** $f(x) = (x+3)^2$

d) $f(x) = \log(x^2+4)$ **e)** $f(x) = 3^{2x}$ **f)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$

1.9 Bijection et fonction réciproque



Soit une fonction f d'un ensemble A vers un ensemble B. On aimerait définir la fonction g de l'ensemble B vers l'ensemble A tel que :

- pour tout x de A : $(g \circ f)(x) = x$
- pour tout y de B : $(f \circ g)(y) = y$

Une telle fonction g s'appelle la **fonction réciproque** de f.

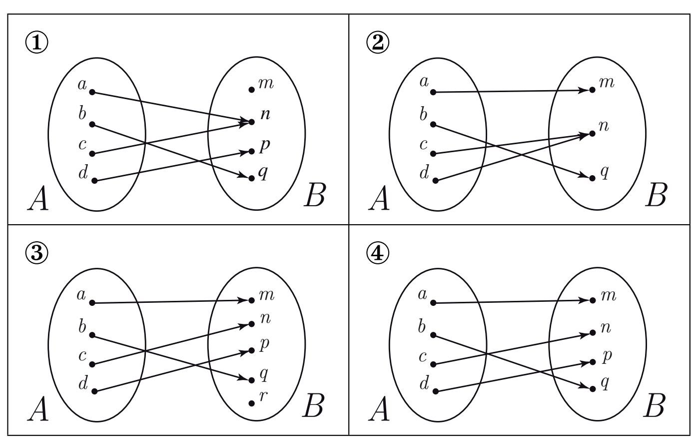
On rappelle que la définition d'une fonction f n'impose aucune condition sur les éléments de l'ensemble d'arrivée. Un élément de l'ensemble d'arrivée peut donc être image d'un ou de plusieurs éléments ou, au contraire, n'être l'image d'aucun élément de l'ensemble de départ.
Mais alors comment peut-on définir cette fonction réciproque ?

Avant de répondre aux questions suivantes, recopier ci-dessous les **2 règles** définissant une application (cf. page 1).

....

....

....

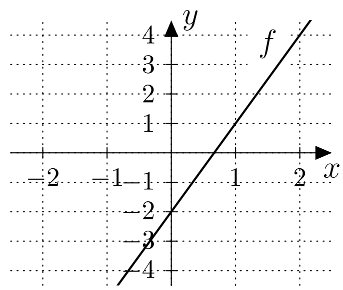
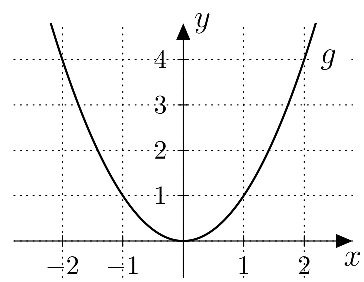
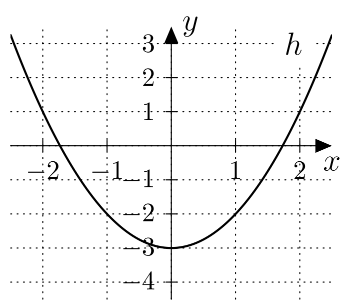
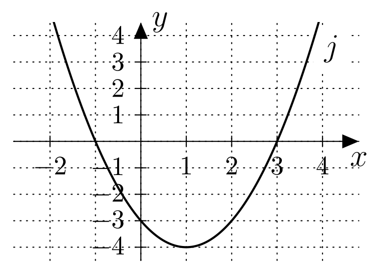


Dans les quatre cas précédents, la fonction proposée admet-elle une fonction réciproque ?

Définition: Une fonction de A vers B est **bijective** (est une **bijection**) si à chaque élément de A correspond un et un seul élément de B, et vice-versa.

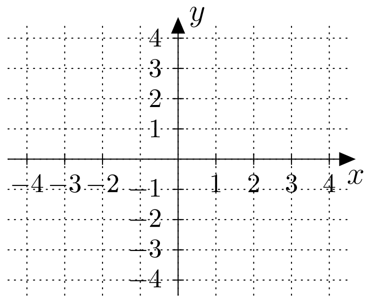
Exemple 8: *Quand petit, vous comptiez jusqu'à 5 sur vos doigts, vous faisiez une bijection entre vos doigts levés et un nombre entier (pouce ↔1, pouce-index ↔ 2, ...). Mais attention, cette gestuelle risque d'être mal interprétée si vous l'utilisez en présence d'une personne issue d'une autre culture.*

Exemple 9:

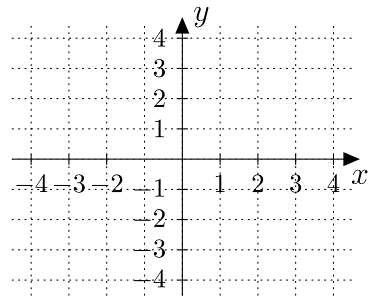
<table>
<tr>
<td>① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto .....$

f est une fonction bijective</td>
<td>② $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto .....$

g n'est pas bijective car ......
....
....
..............................</td>
</tr>
<tr>
<td>③ $h : \mathbb{R} \to [-3\,;+\infty[$
$x \mapsto x^2 - 3$

h n'est pas bijective car ......
....
....
..............................</td>
<td>④ $j : [1\,;+\infty[\to [-4\,;+\infty[$
$x \mapsto x^2 - 2x - 3$

j est une bijection car ....
....
....
..............................</td>
</tr>
</table>

Exercice 1.27: Après avoir représenté les fonctions, déterminer si elles sont bijectives.

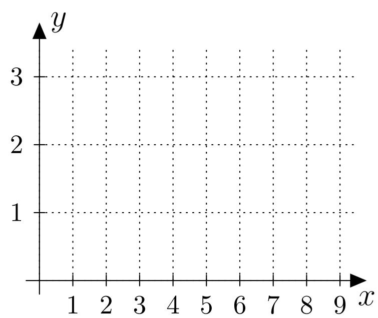
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -2x+3$



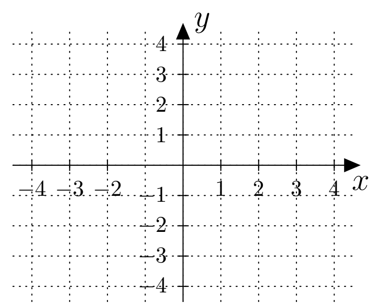
b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 3$



c) $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$



d) $j : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto 1/x$



Définition: Si f est une bijection de A vers B, il existe une fonction de B vers A appelée **fonction réciproque**, notée ${}^r\!f$, telle que :

$$y = f(x) \iff x = {}^r\!f(y)$$

Exemple 10: Reprenons une dernière fois l'exemple des timbres (cf. page 1).
La réciproque de $y = 0{,}9x$ est $x = \dfrac{y}{0{,}9}$.

Cette fonction nous donne *le nombre de timbres* en fonction du *prix payé*.

Exemple 11: Un dernier "exemple" :

Remarque:

- la fonction réciproque d'une bijection est une bijection ;
- la notation ${}^r f$ est fréquemment remplacée par f^{-1} ;
- pour déterminer l'application réciproque, on doit résoudre l'équation $y = f(x)$ en fonction de x.

Exemple 12: Déterminer les fonctions réciproques des fonctions suivantes :

a) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x+1 \end{array}$

b) $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} - \{-5\} & \to & \mathbb{R} - \{\dots\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+3}{x+5} \end{array}$

c) $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & [3\,;+\infty[\\ x & \mapsto & x^2+3 \end{array}$

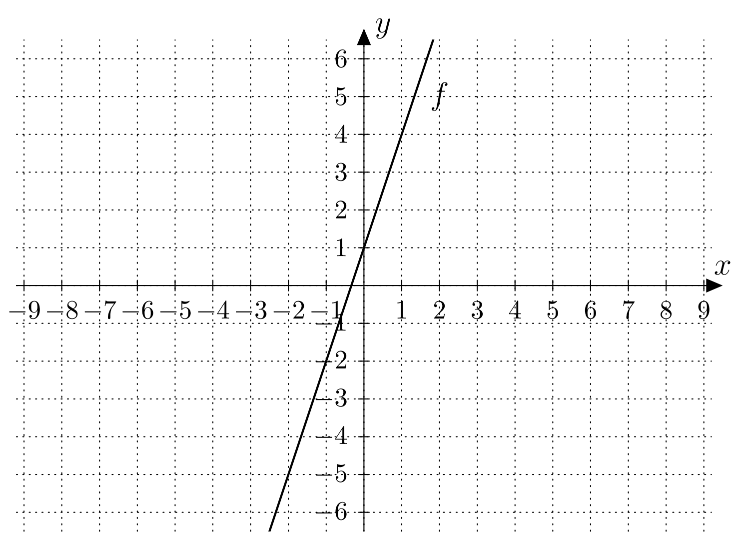
Exercice 1.28: Déterminer l'application réciproque des huit bijections suivantes (en précisant les ensembles de départ et d'arrivée) :

- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$
- $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x$
- $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x+3$
- $f_4 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
- $f_5 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$
- $f_6 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$
- $f_7 : \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}-\{\dots\}$, $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$
- $f_8 : \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}-\{\dots\}$, $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$

1.10 Graphe de deux fonctions réciproques

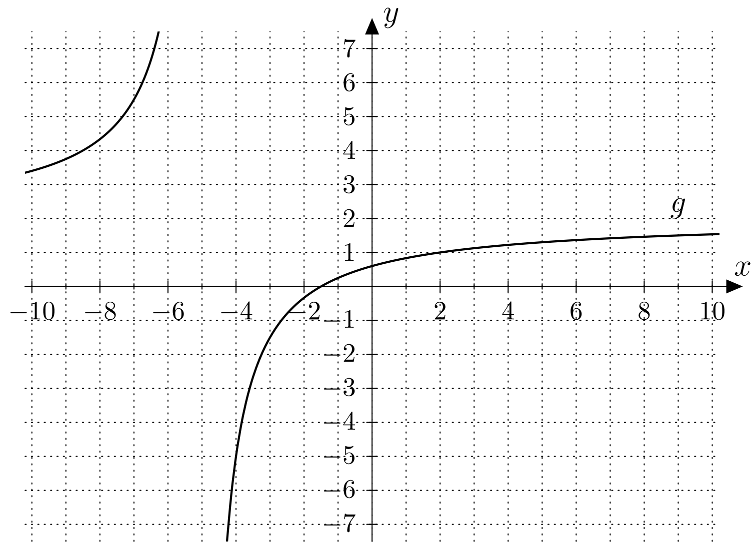
Dans les exemples précédents, nous avons déterminé des fonctions réciproques.
On a représenté sur les trois graphiques suivants les fonctions f, g et h. Ajouter respectivement à ces trois graphiques les courbes représentatives de ${}^r f$, ${}^r g$, et ${}^r h$.

1^er cas : $f(x) = 3x + 1$ ${}^r f(x) = \dots\dots\dots\dots$



2ᵉ cas : $g(x) = \dfrac{2x+3}{x+5}$ ${}^r g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

x	${}^r g(x)$



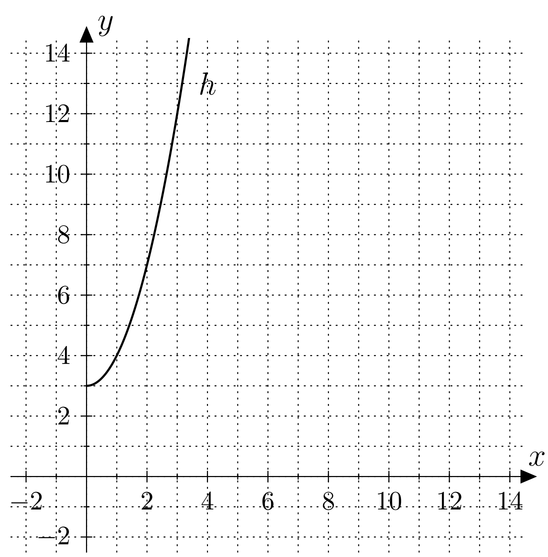
Constatations : ....

....

....

Vérifier sur un 3ᵉ cas si vos constatations sont confirmées.

3ᵉ cas : $h(x) = x^2 + 3$ ${}^r h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

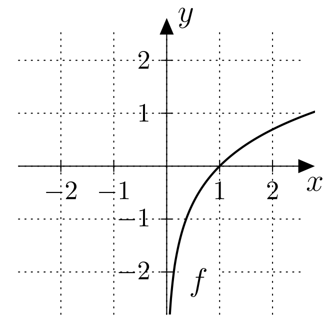


Compléter la phrase :
Soit f une fonction bijective représentée sur un graphique. Alors le graphe de sa fonction réciproque ${}^r f$ est ....

....

....

Exercice 1.29: La fonction f représentée ci-contre est une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$.



a) En déduire le graphique de ^{r}f.

b) Reconnaissez-vous les deux fonctions considérées ?

Exercice 1.30: Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

a) Déterminer $\mathrm{E_D}(f)$ puis $\mathrm{Im}(f)$.

b) Déterminer ^{r}f.

c) Que constatez-vous ?

d) Proposer une deuxième fonction ayant la même propriété.

Exercice 1.31: Finissons par un petit *Vrai – Faux*.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) La courbe d'équation $x^2 + 3x + y = 5$ correspond au graphe d'une fonction.

b) Si f est définie par $f(x) = 3x^2 - 12$ alors $\mathrm{Im}(f) = [4\,;+\infty[$.

c) Sur un graphique, une fonction f est bijective si chaque droite horizontale d'équation $y = c$ (où c appartient à $\mathrm{Im}(f)$) ne coupe le graphe de f qu'une fois.

d) Soit f et g deux fonctions quelconques, alors $g \circ f = f \circ g$.

e) Les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ sont des fonctions réciproques.

f) Les fonctions f et g définies par $f(x) = 5x - 7$ et $g(x) = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{7}{5}$ sont réciproques.

g) Sur un graphique, la courbe $y = f(x) + c$ correspond à une translation de c vers le haut de la courbe $y = f(x)$ quelle que soit la fonction f donnée.

h) La courbe $y = x^2 + 3x + 7$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

i) La droite verticale $x = -\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de la courbe $y = ax^2 + bx + c$.

1

Généralités sur les fonctions (renf)

1.11 Ensemble de définition d'une fonction composée

Rappel: Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathrm{E_D}(f)$ et $\mathrm{E_D}(g)$.

- $g \circ f$ est définie pour les valeurs de x telles que :
$$x \in \mathrm{E_D}(f) \text{ et } f(x) \in \mathrm{E_D}(g)\,.$$
- $f \circ g$ est définie pour les valeurs de x telles que :
$$x \in \mathrm{E_D}(g) \text{ et } g(x) \in \mathrm{E_D}(f)\,.$$

Exemple 13: On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad\qquad g(x) = x^2 - 3$$

- Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f, g, $g \circ f$ et $f \circ g$.
- Proposer l'expression de $(g \circ f)(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}_D(g \circ f)$ et $(f \circ g)(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}_D(f \circ g)$.

Exercice 1.32: Mêmes consignes que l'exemple précédent pour les paires de fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4 - x^2$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

c) $f(x) = \sqrt{x-6}$ $\qquad g(x) = x^2 + 2$

Exercice 1.33: Soit f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

Déterminer les fonctions $f \circ f$ et $g \circ g$ et donner les ensembles de définition de ces nouvelles fonctions.

Exercice 1.34: Donner l'ensemble de définition ainsi que l'expression de la fonction $f \circ g \circ h$ pour les fonctions f, g et h définies de la façon suivante :

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ $\qquad g(x) = x - 7$ $\qquad h(x) = x^2 + 5$

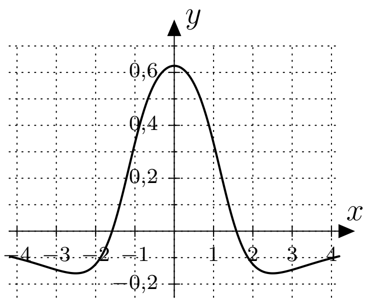
b) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ $\qquad g(x) = x^2 - 5x + 6$ $\qquad h(x) = 2x + 1$

1.12 Les fonctions paires et impaires

Définition: Une fonction f est dite **paire** si elle vérifie les 2 conditions suivantes :

- son ensemble de définition est symétrique par rapport à l'origine,
- $f(-x) = f(x)$ pour tout x dans $\mathrm{E_D}$.

Exemple 14: La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-2x^2+5}{x^4+8}$ = est paire. En effet :



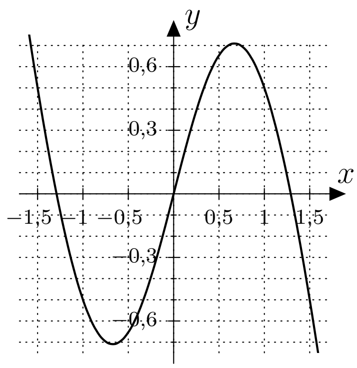
- $\mathrm{E_D} = \mathbb{R}$ (donc symétrique) et
- $\boldsymbol{f(-x)} = \dfrac{-2(-x)^2+5}{(-x)^4+8} = \dfrac{-2x^2+5}{x^4+8} = \boldsymbol{f(x)}$

On peut constater que le graphe d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe $\boldsymbol{Oy}$**.

Définition: Une fonction f est dite **impaire** si elle vérifie les 2 conditions suivantes :

- son ensemble de définition est symétrique par rapport à l'origine,
- $f(-x) = -f(x)$ pour tout x dans $\mathrm{E_D}$.

Exemple 15: La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-3x^3+5x}{2x^2+3}$ est impaire. En effet :



- $\mathrm{E_D} = \mathbb{R}$ (donc symétrique) et
- $\boldsymbol{f(-x)} = \dfrac{-3(-x)^3+5(-x)}{2(-x)^2+3} = \dfrac{3x^3-5x}{2x^2+3} =$

$$\frac{-\left(-3x^3+5x\right)}{2x^2+3} = -\frac{-3x^3+5x}{2x^2+3} = \boldsymbol{-f(x)}$$

On peut constater que le graphe d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine *O* du système *Oxy***.

Exercice 1.35: À propos des fonctions f suivantes, compléter le tableau :

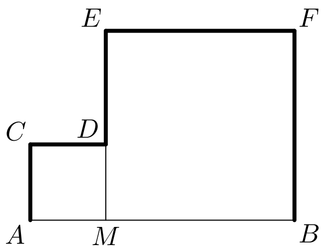
	fonction	$\mathrm{E_D}$	paire	impaire	ni paire ni impaire
a)	$f(x) = x^3 + 5x$		❑	❑	❑
b)	$f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-1}$		❑	❑	❑
c)	$f(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$		❑	❑	❑
d)	$f(x) = \dfrac{x}{x^3-1}$		❑	❑	❑
e)	$f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$		❑	❑	❑

Exercice 1.36: À propos des fonctions f suivantes, compléter le tableau :

	fonction	$\mathrm{E_D}$	paire	impaire	ni paire ni impaire
a)	$f(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2}$		❑	❑	❑
b)	$f(x) = \sqrt{x-1}$		❑	❑	❑
c)	$f(x) = \sqrt{x^2-1}$		❑	❑	❑

1.13 Les fonctions définies par morceaux

Exercice 1.37: Soit $[AB]$ un segment de longueur 8 cm et M un point variable de ce segment. On a construit les carrés $ACDM$ et $MEFB$.



On s'intéresse à la longueur de la ligne brisée $ACDEFB$:

a) Choisir environ 8 positions du point M et calculer la longueur de $ACDEFB$.

b) En posant $AM = x$, Déterminer la longueur $\ell(x)$ de la ligne brisée en fonction de x.

c) Pourquoi cette longueur ne correspond pas simplement à :

$$\ell(x) = 2x + (8 - 2x) + 2(8 - x)$$

d) Représenter le graphique de cette fonction ℓ en fonction de x.

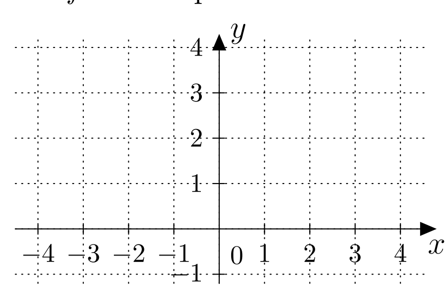
Définition: Une **fonction définie par morceaux** f est une fonction définie sur une réunion d'intervalles réels et dont la restriction à chacun de ces intervalles est donnée par une fonction f_i pour $i = 1, \dots$:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x < a, \\ f_2(x) & \text{si } x \in [\,a\,;b\,[, \\ \dots \end{cases}$$

Son graphe est formé de la réunion des graphes des fonctions définies sur les ensembles respectifs.

Exemple 16: Représenter le graphe de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leqslant 0, \\ x^2 & \text{si } x \in]0\,;2], \\ 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$



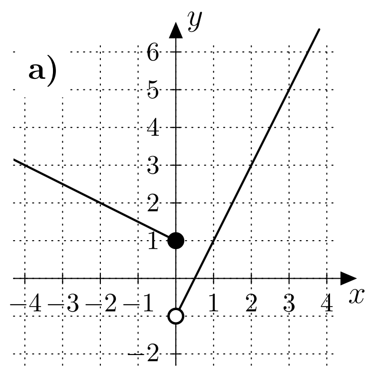
Exercice 1.38: Déterminer $\mathrm{E_D}$, les zéros, la parité, le tableau de signes et une esquisse de graphe des fonctions f définies par :

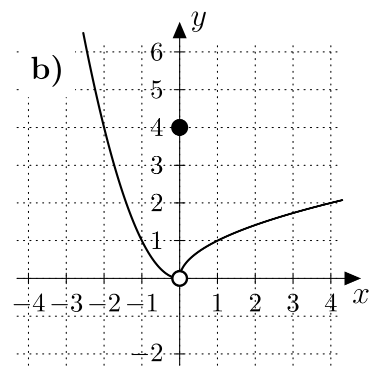
$$\textbf{a)}\ f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -2, \\ 2 & \text{si } x \in [-2\,;2], \\ x & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

$$\textbf{b)}\ f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \leqslant 0, \\ -2x+4 & \text{si } x \in]0\,;3], \\ x-2 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

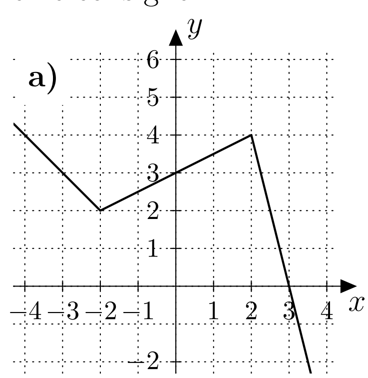
$$\textbf{c)}\ f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-4} & \text{si } x \leqslant 0, \\ -x+2 & \text{si } x \in]0\,;2[, \\ \frac{x-6}{x+2} & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases} \qquad \textbf{d)}\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

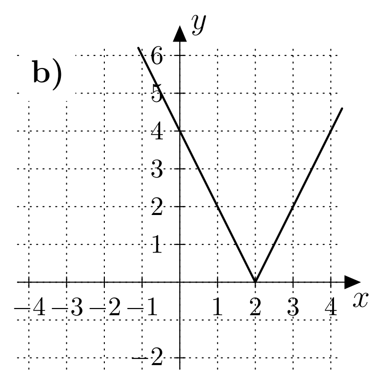
Exercice 1.39: Déterminer les fonctions dont voici les représentations graphiques :





Exercice 1.40: Même consigne :





Définition: La **valeur absolue d'une fonction** f est définie par :

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & \text{si } x \text{ est tel que } f(x) < 0, \\ f(x) & \text{si } x \text{ est tel que } f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

.

Exercice 1.41: Esquisser le graphe des fonctions f, g et h définies par :

a) $f(x) = |x+4|$ **b)** $g(x) = |-2x+4| + 1$
c) $h(x) = 2\,|x-1| - 3\,|x+2|$

Réécrire ces mêmes fonctions sous la forme :

a) $f(x) = \begin{cases} \ldots\ldots & \text{si } x \leqslant \ldots, \\ \ldots\ldots & \text{si } x > \ldots. \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} \ldots\ldots & \text{si } x \leqslant \ldots, \\ \ldots\ldots & \text{si } x > \ldots. \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \ldots\ldots & \text{si } x \leqslant \ldots, \\ \ldots\ldots & \text{si } x \in \ldots, \\ \ldots\ldots & \text{si } x > \ldots. \end{cases}$

Exercice 1.42: Exprimer les fonctions f et g sans valeur absolue :

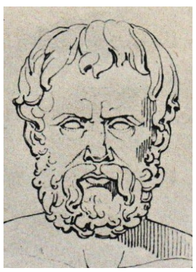
a) $f(x) = 3\,|2x-4| - 1$ **b)** $g(x) = -3\,|x+2| + 5\,|x-3|$

2

Limites et Asymptotes

2.1 Les limites dans la vie courante

Vitesse instantanée:



Zénon d'Élée
(env. 490 - 430 av. J.-C)

$$\frac{0}{0}$$

est une forme indéterminée

La notion de vitesse, et en particulier la vitesse d'un objet à un instant précis, est, étonnamment, subtile et difficile à définir précisément. Considérez cette affirmation : « À l'instant où le cheval a franchi la ligne d'arrivée, il galopait à 66 km/h ». Comment peut-on étayer une telle affirmation ? Une photographie ne serait d'aucune aide, puisque sur le cliché, le cheval est immobile ! Il y a une sorte de paradoxe à essayer de quantifier le mouvement à un moment précis puisqu'en se focalisant sur un seul instant on stoppe le mouvement !

Les problèmes de mouvement étaient un des thèmes centraux de Zénon et d'autres philosophes dès le Ve siècle avant Jésus-Christ. L'approche moderne, rendue célèbre par Newton, ne considère plus la vitesse à un instant donné, mais sur un petit intervalle de temps contenant cet instant.

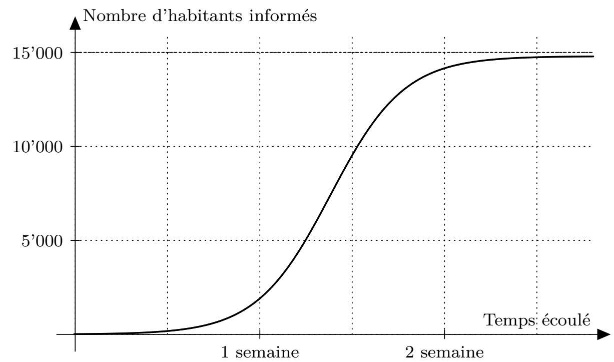
Rappelons que la vitesse est la distance parcourue Δx divisée par le temps Δt qu'il a fallu pour la parcourir. Pour avoir la vitesse instantanée, on choisira $\Delta t \to 0$. On ne peut pas prendre $\Delta t = 0$, puisqu'on aurait une division par 0. La vitesse instantanée est donc une limite.

"Pente d'une courbe":

On a vu en géométrie analytique comment calculer la pente d'une droite. Qu'en est-il pour une courbe ? Contrairement aux droites, "la pente d'une courbe" n'est pas constante. Par exemple, quand les coureurs du Tour de Romandie gravissent un col, la pente n'est pas toujours la même ; certains tronçons sont plus raides que d'autres. Peut-elle même être définie ?

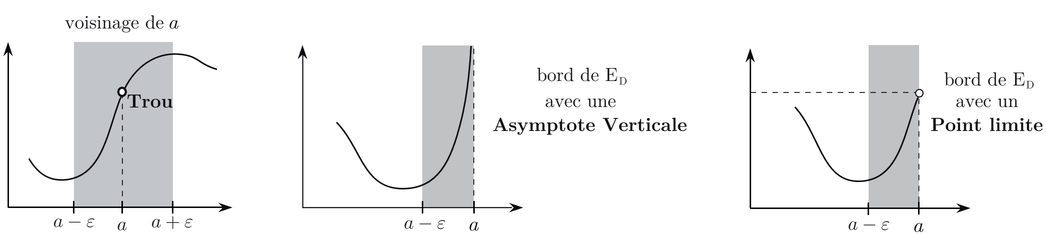
Comme la pente d'une droite est le déplacement vertical Δy divisé par le déplacement horizontal Δx, la pente en un point précis d'une courbe sera obtenue en choisissant $\Delta x \to 0$, autrement dit en prenant deux points « proches » sur la courbe.
La "pente d'une courbe" en un point peut donc elle aussi être vue comme une limite... *Celle de la pente de la tangente à la courbe au point considéré.*

Rumeur: Une rumeur est lancée le premier janvier dans une ville de 15'000 habitants. La courbe représente le nombre de personnes au courant de cette rumeur. D'après cette courbe, on peut estimer qu'à long terme toute la ville aura entendu parler de cette rumeur



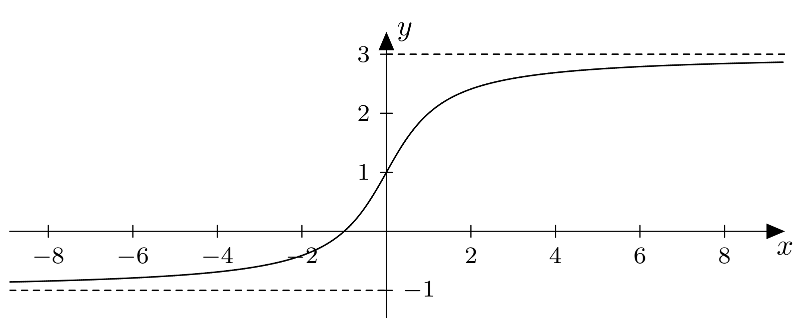
2.2 Un exemple introductif

☞ La notion de limite est particulièrement utile pour étudier le comportement d'une fonction au voisinage d'un trou ou d'un bord (point limite ou asymptote verticale) de son domaine de définition.



☞ Mais la notion de limite s'utilise également pour appréhender le comportement de la courbe infiniment à gauche ou infiniment à droite, c'est-à-dire respectivement quand x devient

- un nombre très "grand" dans les négatifs ($x \to -\infty$)
- un nombre très "grand" dans les positifs ($x \to +\infty$).



- "Infiniment à gauche", la fonction "**plafonne**" en $y = -1$
- "Infiniment à droite", la fonction "**plafonne**" en $y = 3$

Exemple 1: Considérons la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R}_+ - \{1\,;4\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{3(1-x)}{(\sqrt{x}-1)(x-4)}$$

Nous allons étudier le comportement de cette fonction au bord de son ensemble de définition, c'est-à-dire en

- $x = 0$ (bord gauche), en $x = 1$ puis $x = 4$ (valeurs interdites)
- et finalement en $x \to +\infty$

a) Si on **évalue** la fonction f pour ces 3 valeurs particulières, on risque d'obtenir des réponses peu concluantes :

$f(0) =$ $\qquad$ $f(1) =$ $\qquad$ $f(4) =$

b) Utilisons alors des petits **tableaux de valeurs** :

- S'approcher de la valeur 0 depuis **la droite** ($x \to 0^+$)

$\leftarrow$ *droite*

x	**0**	0,01	0,1
$f(x)$	0,75	0,827	1,013

Ainsi, il semblerait que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 depuis la droite vaut .....

- S'approcher de la valeur 1 en venant depuis **la gauche** ($x \to 1^-$) et depuis **la droite** ($x \to 1^+$)

gauche $\to$ $\qquad$ $\leftarrow$ *droite*

x	0,9	0,99	**1**	1,01	1,1
$f(x)$	1,886	1,989	? ? ?	2,012	2,12

Ainsi, il semblerait que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 vaut .....

- S'approcher de la valeur 4 en venant depuis **la gauche** ($x \to 4^-$) et depuis **la droite** ($x \to 4^+$)

gauche $\to$ $\qquad$ $\leftarrow$ *droite*

x	3,9	3,99	**4**	4,01	4,1
$f(x)$	89,25	899,3	? ? ?	-900,7	-90,75

Ainsi, il semblerait que la limite de $f(x)$ quand :

x tend vers 4 depuis la gauche vaut .....

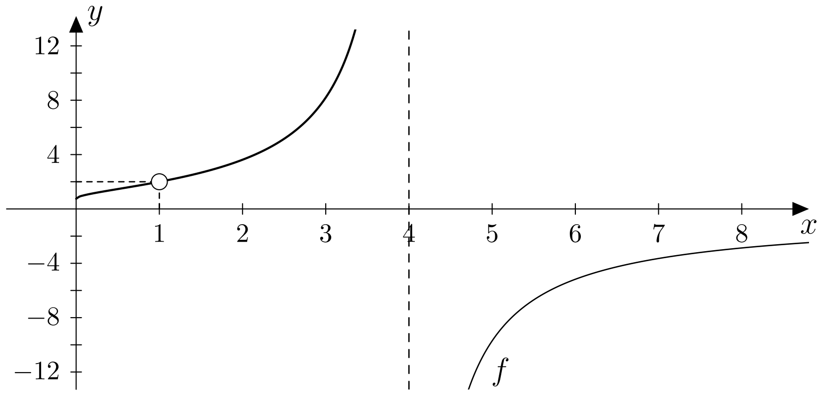
x tend vers 4 depuis la droite vaut .....

- Prendre des valeurs **de plus en plus grandes** ($x \to +\infty$)

		$\to$	$+\infty$
x	1000	10'000	100'000
$f(x)$	-0,098	-0,030	-0,0095

Ainsi, il semblerait que la fonction plafonne à la hauteur .....
lorsque x tend vers $+\infty$

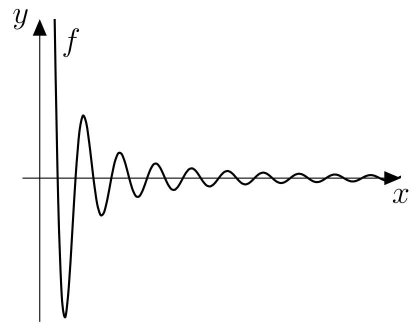
c) Observons ceci sur la représentation graphique de f



d) Pour décrire le comportement de la fonction f, nous utiliserons les **terminologies** et **notations** suivantes :

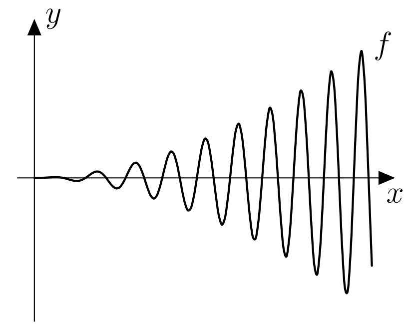
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	**Limites**	**La fonction f admet**
0	3/4	$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ n'est **pas défini**, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0{,}75$	un **Point limite** en $(0\,;\,3/4)$
1	0/0 **indéterminé**	$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$	un **Trou** en $(1\,;\,2)$
4	-9/0 **non défini**	$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$	une **Asymptote Verticale** en $x = 4$
$\to +\infty$		$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$	une **Asymptote Horizontale** à droite en $y = 0$

Exercice 2.1: En observant les graphiques suivants, déterminer les limites probables proposées



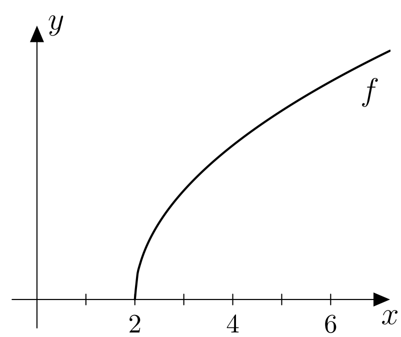
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$



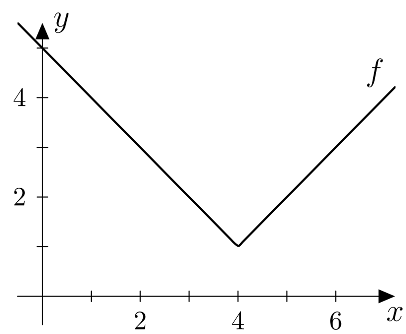
b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$



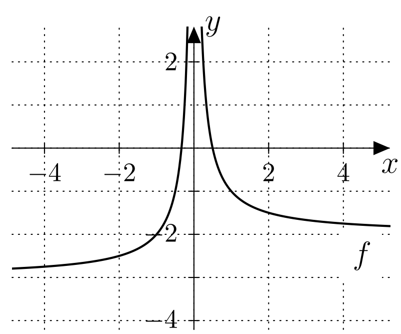
c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$



d) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

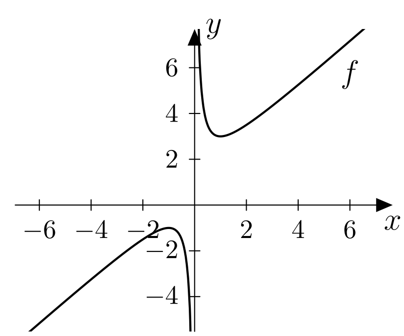


e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$



f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 2.2: Deviner à l'aide d'une calculatrice la valeur des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2^x - 2}{x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3}{1-x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2-2}{x^2}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

Exercice 2.3: Esquisser le graphe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2-x}+1$.
Puis en déduire $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

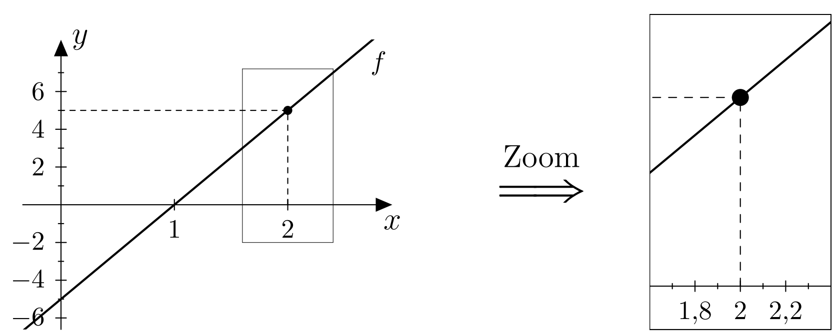
2.3 Définitions de la limite d'une fonction en un point

Définition: Soit a et L deux nombres réels et f une fonction.

- Le nombre L est la limite de f en $x = a$ si $f(x)$ reste arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a, mais $x \neq a$.
- On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$
- On dit aussi que L est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

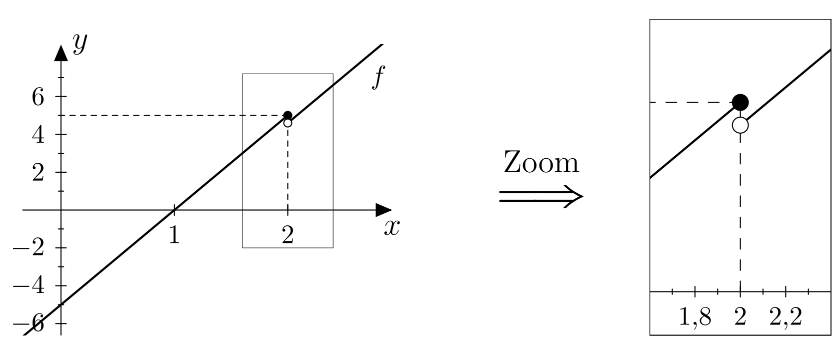
Exemple 2:

- Où la limite en $x = 2$ **est définie** :



La limite $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ est bien définie et vaut $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$

- Où la limite en $x = 2$ **n'est pas définie** :



La limite $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'est pas définie car ...

Définitions:

- Le nombre L est **la limite de f en $x = a$ depuis la gauche** si $f(x)$ reste arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a, mais $x < a$.

  On note dans ce cas : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$
- On définit de façon analogue **la limite de f en $x = a$ depuis la droite**, notée $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

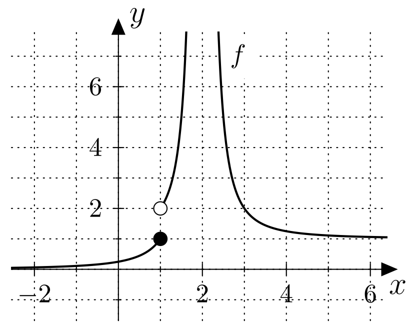
Fin de l'exemple: Dans le deuxième exemple précédent, on a :

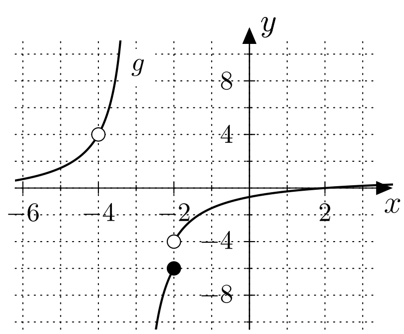
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4{,}8$$

Propriété: Le nombre L est **la limite de f en $x = a$** (et donc cette limite existe) si et seulement si la limite depuis la gauche est égale à la limite depuis la droite :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Exemple 3: En étudiant les graphiques des fonctions f et g ci-dessous, estimer les limites suivantes :

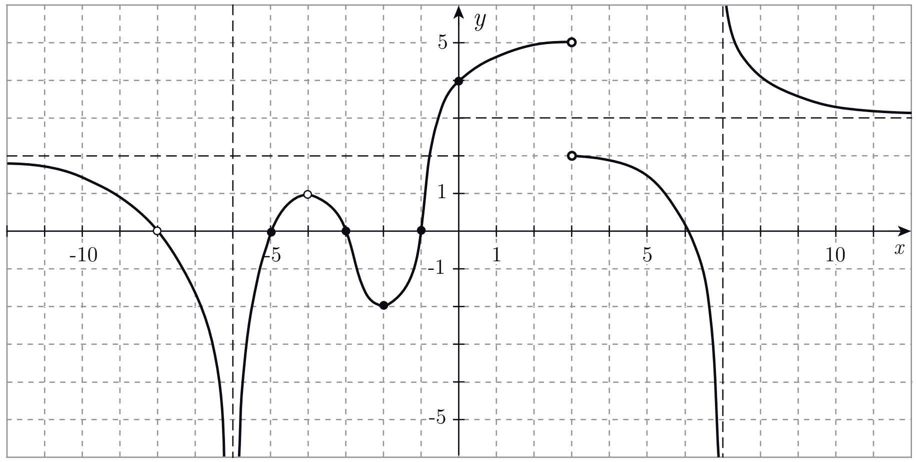




- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

- $\lim\limits_{x \to -4^-} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to -4^+} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to -4} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to -3^-} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to -3^+} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to -2} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 2.4: Voici le graphe d'une fonction f :



a) Déterminer $\mathrm{E_D}(f)$.

b) Déterminer les zéros de f.

c) Compléter le tableau :

a	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	Caractéristiques
$-\infty$				
-8				
-6				
-4				
-2				
0				
3				
7				
$+\infty$				

2.4 Calcul de limites quand $x \to a$, où a est un nombre

1er cas: Limites de fonctions continues en a :

Introduisons d'abord une définition intuitive de la continuité :
«Une fonction est continue dans un intervalle si on peut la dessiner d'un bout à l'autre de l'intervalle sans lever le crayon.»

☞ Si f est continue en a, la limite en a est égale à l'image de a

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Exemple 4:

- $\lim_{x\to 2} 3x^2 + x = 3 \cdot 2^2 + 2 = 14$
- Si $f(x) = 5\left(-x^2 - 9x + 2\right)$ alors

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \ldots\ldots \qquad \lim_{x\to -3} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2e cas: Limites du quotient de deux fonctions :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$

- $\boxed{\text{avec le dénominateur non nul}}$

  ☞ Si $\lim_{x\to a} N(x) = c_1$ et $\lim_{x\to a} D(x) = c_2$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{c_1}{c_2}$

- $\boxed{\text{avec le numérateur non nul et le dénominateur nul}}$

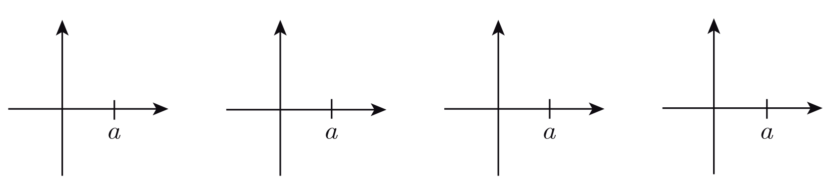
  ☞ Seule une des trois réponses suivantes est possible :

  a) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$
  b) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$
  c) $\lim_{x\to a} f(x)$ **non définie** dans le cas où :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Pour déterminer la bonne réponse, il faut donc comparer la limite à gauche et la limite à droite.
Si elles sont égales, la bonne réponse sera la **a)** ou la **b)**.
Si elles sont différentes, la bonne réponse sera la **c)**.

Graphiquement*, la courbe admettra en $x = a$ une* ***asymptote verticale*** :



- $\boxed{\text{avec le numérateur et le dénominateur nuls}}$

☞ Si le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers 0, on a une forme **indéterminée.** En effet :

$\frac{0}{0}$ *est indéterminé, car* $k \cdot 0 = 0$ *pour tout* k*.*

Cette forme indéterminée n'est qu'une **réponse provisoire** à ce calcul de limite. Il s'agira par la suite de **lever cette indétermination**.

Dans le cas de fractions rationnelles, la *factorisation* et la *simplification* de fractions le permettront :

Supposons que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{0}{0}$ alors :

- $N(a) = 0$ donc $N(x)$ est divisible par $(x - a)$
- $D(a) = 0$ donc $D(x)$ est aussi divisible par $(x - a)$

La fraction pourra donc être simplifiée par $(x - a)$.

Observons ceci sur un exemple :

Exemple 5: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} = \dfrac{0}{0}$ **indéterminé** $\Longrightarrow$ facto

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-3)}{(x+1)} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Graphiquement*, la courbe* $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$ *admettra un trou en* $(2\,;-1/3)$*.*

Un petit mélange: Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to 3} 2(x - 4)^5 =$

- $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x - 3} =$

- $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4}{x + 1} =$

- $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-4}{(x+1)^2} =$

- $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1} =$

Exercice 2.5: Déterminer l'$\mathrm{E_D}$ des expressions suivantes puis en calculer la limite

a) $\lim\limits_{x\to 2} 5x$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2} 2x+3$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2} x^2-4x+1$

d) $\lim\limits_{x\to -4} \sqrt{25-x^2}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x+2}$

g) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2-x-12}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2-9}$ **i)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

j) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ **k)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$ **l)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+8}$

Exercice 2.6: On considère les fonctions f définies ci-dessous.
Déterminer $\mathrm{E_D}(f)$ et calculer les limites à gauche et à droite des valeurs interdites.

a) $f(x) = \dfrac{12-2x}{3-x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+4}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2+6x-7}{-x^3+x^2-x+1}$

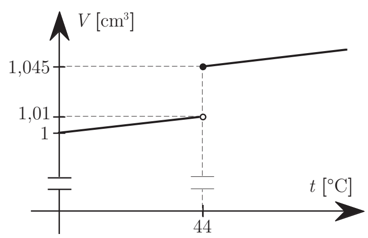
Exercice 2.7: Déterminer l'E_D des expressions suivantes puis en calculer la limite

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

Exercice 2.8: Observons la variation du volume V du phosphore en fonction de la température t. Soit 1 cm^3 de phosphore solide.



Liquéfaction du phosphore

- De 0° à 44°, le volume augmente insensiblement et de façon continue.
- À 44°, si peu qu'on élève la température, le volume augmente brusquement de 35 mm^3 et le phosphore se liquéfie.
- Au-delà de 44°, le volume augmente à nouveau insensiblement et de façon continue.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 44^-} V(t)$, $\lim\limits_{x\to 44^+} V(t)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to 44} V(t)$

Exemple 6: Où la **division de polynômes** est bien utile !!

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3-7x-6}{x^3+x^2-2x} =$$

Exercice 2.9: Déterminer l'E_D des expressions suivantes puis en calculer la limite

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2+x-1}{x^3+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{3x^3-18x^2+36x-24}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-6x+5}$

Exemple 7: Où il faut **manipuler des racines**!!

- $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} =$

- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{3-\sqrt{x+6}} =$

- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3-\sqrt{x+6}}{x-3} =$

Exercice 2.10: Déterminer l'$\mathrm{E_D}$ des expressions suivantes puis en calculer la limite

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3-\sqrt{x+7}}{x-2}$

Exercice 2.11: Sur la parabole d'équation $y = x^2$ on choisit un point M distinct de l'origine O. La médiatrice du segment OM coupe l'axe Oy en N. Vers quelle valeur tend l'ordonnée de N lorsque M s'approche de l'origine ?

2.5 Opérations sur les limites

Les règles suivantes ne seront pas démontrées, néanmoins elles semblent assez naturelles. Vous les avez spontanément utilisées dans les exercices !!

Règles: Soit les fonctions f et g admettant des limites finies quand $x \to a$, avec a fini ou infini, alors :

- $\lim\limits_{x \to a} \big(k \cdot f(x)\big) = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$ où k est un nombre réel
- $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$ idem pour " $-$ "
- $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ si $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

2.6 Calculs avec le symbole ∞ et les cas d'indétermination

Rappel: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{nbre} \neq 0}{x} = \pm\infty$ "nbre infiniment grand (pos ou neg)"

Lorsque l'on effectue des calculs avec l'infini, on doit prendre quelques précautions. Par exemple que peut bien valoir "$\frac{\infty}{\infty}$" ?

En fait cette réponse est **indéterminée**

Règles: Soit $c \in \mathbb{R}$ et k un entier strictement positif :

$(+\infty) + (+\infty) = \dots$ $\quad (-\infty) - (+\infty) = \dots$ $\quad (+\infty) + c = \dots$

$\infty \cdot \infty = \dots$ $\quad \infty \cdot c = \dots$ (si $c \neq 0$)

$(\infty)^k = \dots$ $\quad \sqrt{+\infty} = \dots$

$\dfrac{\infty}{c} = \dots$ $\quad \dfrac{\infty}{0} = \dots$

$\dfrac{c}{\infty} = \dots$ $\quad \dfrac{0}{\infty} = \dots$

Ces 11 cas **ne sont pas** des situations **indéterminées**.

Mise en garde: Lorsque l'on obtient l'une ou l'autre des formes suivantes, on ne peut pas conclure de manière immédiate, mais il s'agira de manipuler l'expression algébriquement :

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty \cdot 0 \qquad \infty - \infty$$

Ces expressions sont appelées des **formes indéterminées**.

Exemple 8: Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{3}{x}}{\frac{2+x}{x}} =$

- $\lim\limits_{x \to 0} 3x \cdot \dfrac{5}{x^2 - 3x} =$

Exercice 2.12: Calculer la limite si elle est définie

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3 + \frac{1}{x-1}}{2 - \frac{x}{x-1}}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} (2x+4)\dfrac{5x}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{x} + \dfrac{x-5}{2x}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3x}{x^2 - 4x + 4}$

2.7 Calcul de limites quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

Convention: Lorsque nous écrirons $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, cela signifiera que nous nous intéressons indifféremment aux calculs $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Règle 1: En $+\infty$ (respectivement $-\infty$), toute fonction polynôme a la même limite que son terme de degré le plus élevé

$$\lim_{x\to\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$$

Exemple 9: $\lim\limits_{x\to\infty} 7x^3 - 1000x^2 - 2000x - 1 = \lim\limits_{x\to\infty} 7x^3$ en effet :

Règle 2: En $+\infty$ (respectivement $-\infty$), toute fonction rationnelle a la même limite que le rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Et ainsi, on obtient : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \infty & \text{si } n > m \end{cases}$

Exemple 10:

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + 2} =$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{3x^3 + 2} =$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x} =$

Exemple 11: Après avoir calculé les 3 limites proposées, retrouvez les représentations graphiques des fonctions "correspondantes" :

a) pour f définie par $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$:

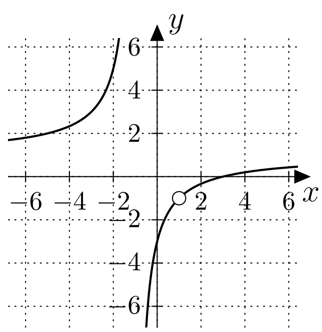
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x+1} =$$

b) pour g définie par $g(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}$:

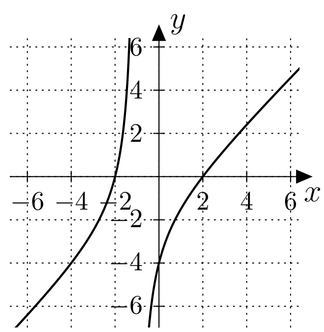
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} =$$

c) pour h définie par $h(x) = \dfrac{x-4}{(x+1)^2}$:

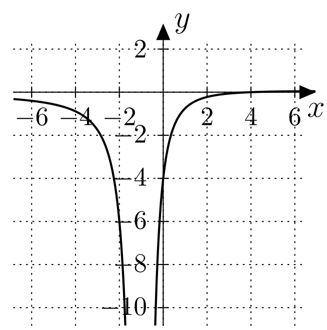
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-4}{(x+1)^2} =$$



❶



❷



❸

Exercice 2.13: Calculer la limite si elle définie

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x}{3x^2-5x+1}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-x+1}{x^3+x}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+3}{2x^2+5}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}$ **e)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-3x+2}$ **f)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1-x}$

Exercice 2.14: Calculer la limite si elle définie

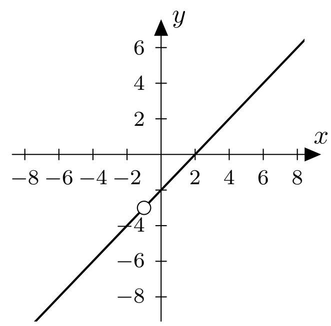
a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2x-5+\frac{10}{x+2}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x+3+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{3x}$ **d)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{5}+\frac{x}{(x-2)^2}$

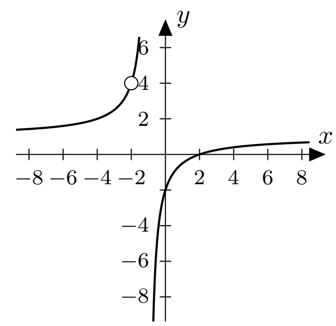
Exercice 2.15: Pour chaque fonction f, on propose deux esquisses différentes. Laquelle est la bonne ?

(en justifiant votre raisonnement à l'aide de calculs de limites)

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

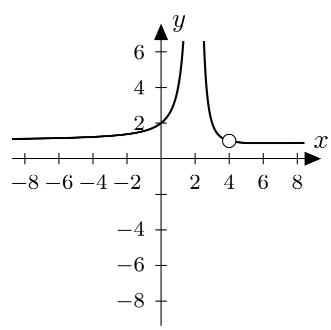


❶

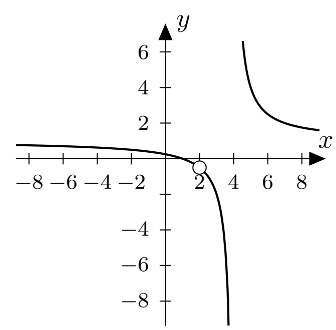


❷

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 8}$

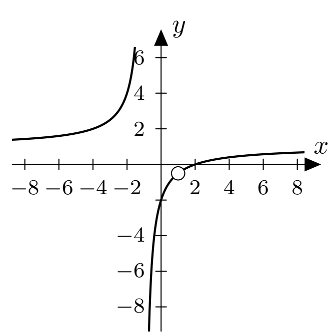


❶

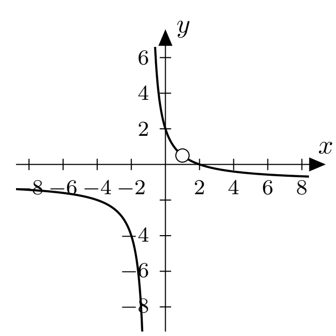


❷

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$



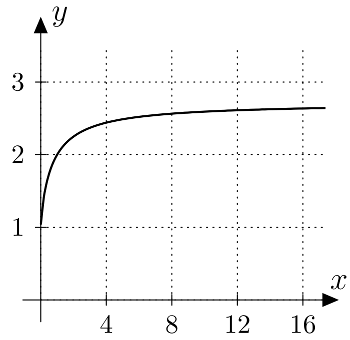
❶



❷

Bonus : Déterminer l'expression des 3 fonctions représentées ci-dessus, mais non proposées dans la donnée

Une limite célèbre: Dans le chapitre concerné aux logarithmes, nous avons déjà croisé cette célèbre limite :



$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} = 2{,}718\ldots$$

C'est ici l'occasion de remarquer que l'on peut facilement se tromper en faisant des raisonnements qui semblent justes.
On pourrait en effet se dire que quand x tend vers l'infini, 1/x tend vers 0, et qu'il reste alors 1 puissance infini, donc 1. Or, ce n'est pas la réponse exacte. Aussi, en cas de doute, il est prudent de vérifier sa réponse par un calcul numérique.

De plus, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

2.8 Asymptotes

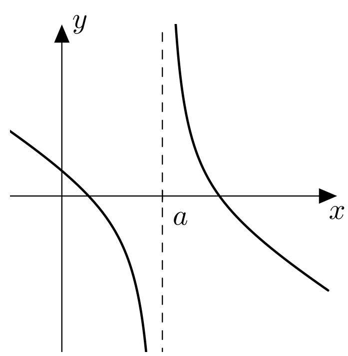
Notions intuitives: Une **droite asymptote** à une courbe est une droite telle que, lorsque l'abscisse ou l'ordonnée *tend vers l'infini*, la distance de la courbe à la droite tend vers 0.

Cette droite particulière nous servira de *guide* pour tracer le graphique de la fonction donnée.

À l'exception des asymptotes verticales, une courbe peut être amenée à couper sa droite asymptote.

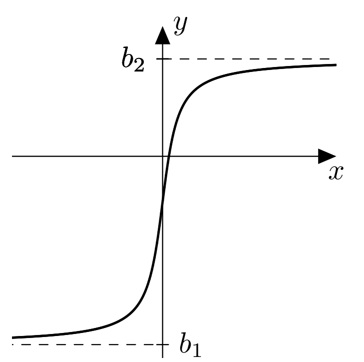
La notion géométrique d'asymptote correspond à la notion algébrique de **limite infinie** ou de **limite à l'infini**.

Nous étudierons 3 cas en particulier :



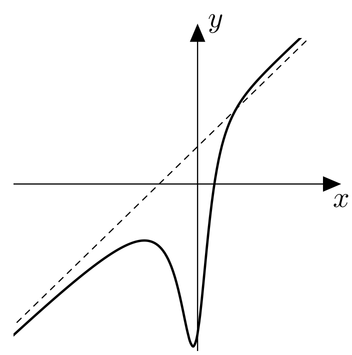
Asymptote verticale

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ldots$
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ldots$



Asymptotes horizontales

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots$



Asymptote oblique

- équation d'une asymptote oblique :

  $y =$

Définition: La droite $x = a$ est une **asymptote verticale** (AV) de la courbe $y = f(x)$ si :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Méthode (AV):

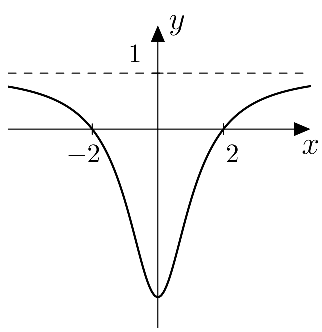
- Les AV sont à chercher parmi les valeurs interdites. On calculera donc $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ pour tout point a n'appartenant pas à $\mathrm{E_D}$.
- Si cette limite est infinie ($\pm\infty$), alors la droite $x = a$ est une AV de $y = f(x)$.
- Afin de préciser la position de la courbe par rapport à l'AV, on pourra encore calculer les deux limites :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

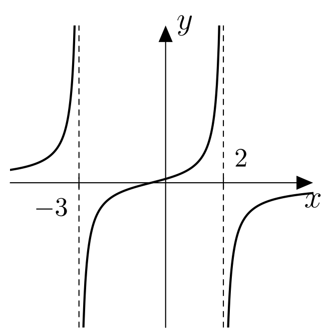
Exemple 12: Déterminer les AV des 2 fonctions f et g suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-6}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+2}$

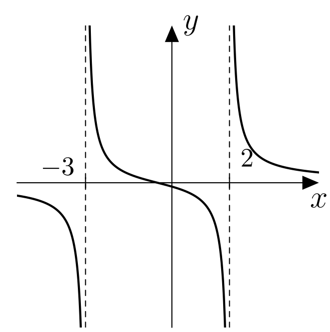
Parmi les 3 graphiques, lesquels représentent les fonctions f et g ?



❶



❷



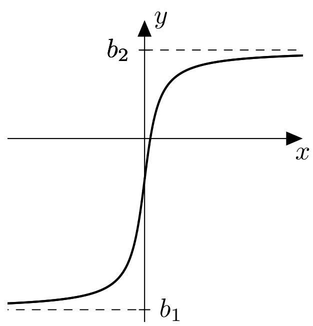
❸

Exercice 2.16: Déterminer les équations des AV des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{9}{x^2-9}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x^2-3x-10}$

c) $f(x) = \dfrac{2(x+2)^2}{(x-3)(x+1)}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^3-x^2+3x-3}$

Définitions:



- La droite $y = b_1$ est une **asymptote horizontale à gauche** (AHG) de la courbe $y = f(x)$ si :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b_1$$

- La droite $y = b_2$ est une **asymptote horizontale à droite** (AHD) de la courbe $y = f(x)$ si :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b_2$$

- Si $b_1 = b_2$, alors on dira simplement que cette droite est l'**asymptote horizontale** (AH) de la courbe $y = f(x)$.

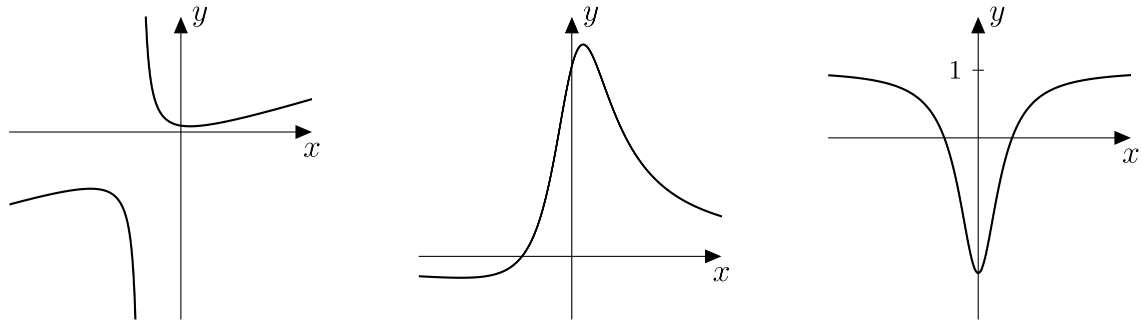
Méthode (AH): La courbe $y = f(x)$ ou $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ admet une asymptote horizontale si et seulement si le degré de $P(x) \leqslant$ degré de $Q(x)$.

En effet, dans ce cas, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) =$ nbre (evt. nul).
Dans le cas contraire, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (c.f. page ...)

Exemple 13: Déterminer les éventuels AH des 3 fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x^2+2}{x+2}$

Associer les fonctions f, g et h aux trois esquisses ci-dessous :



❶ ❷ ❸

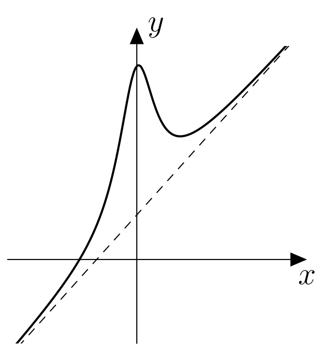
Exercice 2.17: Déterminer les équations des éventuelles AH

a) $f(x) = \dfrac{9}{x^2 - 9}$ **b)** $g(x) = \dfrac{2(x+2)^2}{(x-3)(x+1)}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 4}$

Définition: La droite $y = mx + h$ est une **asymptote oblique** de la courbe $y = f(x)$ s'il existe une fonction $\delta(x)$ telle que :

$$f(x) = mx + h + \delta(x) \quad \text{vérifiant que} \quad \lim_{x \to \infty} \delta(x) = 0$$



Cet énoncé donne une interprétation intuitive de l'AO :

“Une fonction admettant une AO se comporte à l'infini comme elle”

Méthode (AO): On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

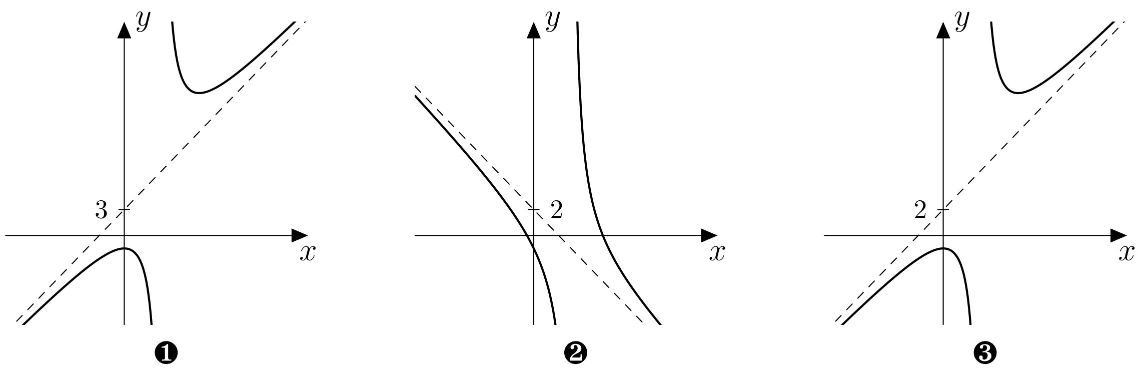
- La courbe $y = f(x)$ admet une **asymptote oblique** si et seulement si

  le **degré de $\boldsymbol{P(x)}$ = degré de $\boldsymbol{Q(x) + 1}$**.

- On effectue alors la **division polynomiale** de $P(x)$ par $Q(x)$ afin d'en obtenir le quotient et le reste.
- De **l'égalité fondamentale**, on en déduit l'AO et $\delta(x)$.

Exemple 14: Déterminer l'AO de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 1}{x - 1}$:

Laquelle de ces 3 esquisses correspond à la fonction ci-dessus ?



Exercice 2.18: Exprimer chacune des fonctions f suivantes sous la forme :

$$f(x) = mx + h + \delta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to\infty} \delta(x) = 0$$

En déduire les équations des AV et AO

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{x^2 + 2x + 4}$

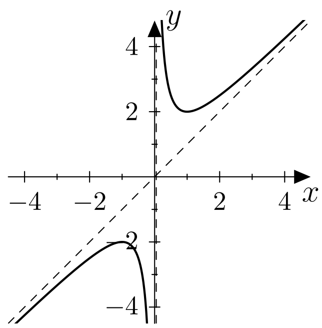
d) $f(x) = -2x + \dfrac{5x - 24}{x - 5}$

Exercice 2.19: Associer chaque graphe à une fonction dont on donne l'expression

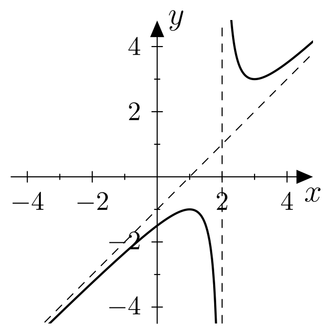
a) $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$ **b)** $f(x) = -2x + \dfrac{1}{x+1}$

c) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ **d)** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

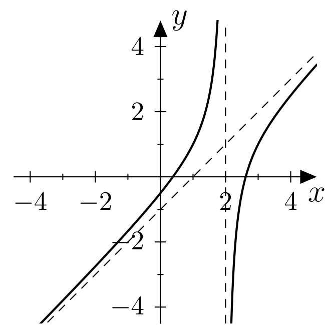
e) $f(x) = -x + 1 - \dfrac{1}{x+1}$ **f)** $f(x) = x - 1 - \dfrac{1}{x-2}$



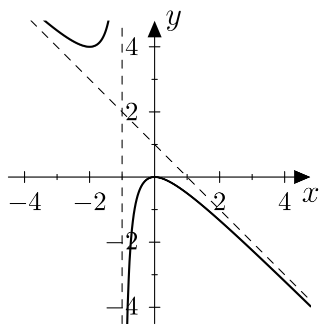
❶



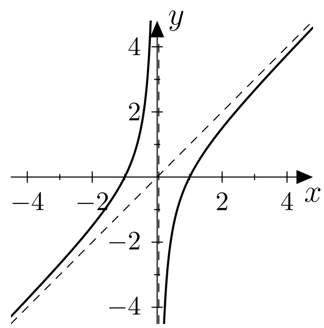
❷



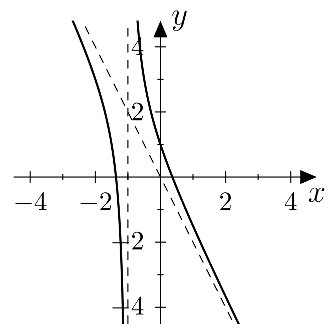
❸



❹



❺



❻

Exercice 2.20: Proposer quatre réels a, b, c et d afin que le graphe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

respecte les conditions suivantes :

- les droites d'équation $x = 3$ et $y = -2$ sont respectivement une AV et une AH ;
- le graphe de f passe par le point $P(2\,;0)$.

Exercice 2.21: On considère les 12 fonctions rationnelles :

$$f_1(x) = \frac{4x^2}{2x^2+1} \qquad f_2(x) = -2x+5+\frac{1}{x+1} \qquad f_3(x) = \frac{2x}{x+1}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x-7} \qquad f_5(x) = \frac{2x}{x-7} \qquad f_6(x) = \frac{1}{(x+1)(x+10)}$$

$$f_7(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad f_8(x) = -2x+5+\frac{1}{x-5} \qquad f_9(x) = 1+\frac{7}{x^2-4}$$

$$f_{10}(x) = 1+\frac{7}{x^2+4} \qquad f_{11}(x) = -2x+5+\frac{1}{x^2+5} \qquad f_{12}(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x+10)}$$

Parmi les fonctions rationnelles proposées ci-dessus, déterminer "de tête" laquelle est caractérisée par les asymptotes suivantes :

	AV	**AH ou AO**
a)	$x=-1$	$y=0$
b)	$x=-1$ et $x=-10$	$y=2$
c)	aucune	$y=2$
d)	$x=7$	$y=2$
e)	$x=-2$ et $x=2$	$y=1$
f)	$x=5$	$y=-2x+5$
g)	$x=-1$	$y=2$
h)	aucune	$y=1$
i)	$x=-1$	$y=-2x+5$
j)	$x=7$	$y=0$
k)	aucune	$y=-2x+5$
l)	$x=-1$ et $x=-10$	$y=0$

Exercice 2.22: Pour chacun des cas suivants, donner un exemple de fonction dont le graphe admet :

a) une seule asymptote qui est verticale d'équation $x=2$;

b) deux asymptotes, une AV en $x=-3$ et une AH en $y=5$;

c) deux asymptotes, une AO en $y=x+2$ et une AH en $y=-4$.

Exercice 2.23: Déterminer, suivant les valeurs de n ($n \in \mathbb{N}$), les asymptotes de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{x^n+3}{x^2-9}$

2.9 Position de la courbe par rapport à son AO ou AH

Dans le cas d'une AO: La division polynomiale nous a permis d'exprimer la fonction f de départ sous la forme :

$$f(x) = mx + h + \delta(x).$$

☞ $y = mx + h$ correspond à l'équation de l'AO

mais quel sens peut-on donner au terme $\delta(x)$?

Réponse : Le signe de $\delta(x)$ nous permettra de connaître la position de la courbe par rapport à l'AO. En effet :

- de $\lim\limits_{x\to\infty} \delta(x) = 0$, on en déduit que le graphe de la fonction f se rapproche de plus en plus de l'AO ;
- de $f(x) = mx+h+\delta(x)$ on obtient : $\boxed{\delta(x) = f(x) - (mx + h)}$

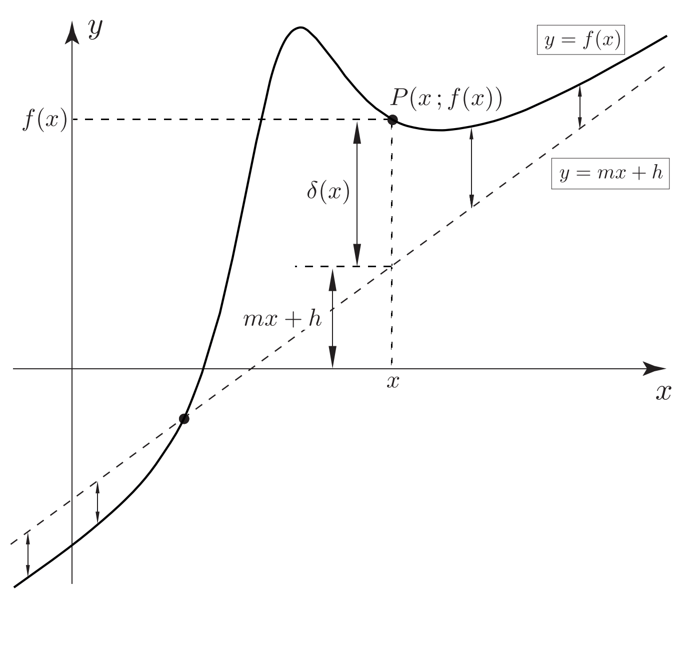
  En valeur absolue, $\delta(x)$ mesure pour tout x l'écart entre le graphe de la fonction f et l'AO.

Plus précisément, soit $P\big(x; f(x)\big)$ un point du graphe de f :

- P est au-dessus de l'AO $\iff f(x) > mx + h$
  $\iff f(x) - (mx + h) > 0$
  $\iff \delta(x) > 0$

- P est au-dessous de l'AO $\iff f(x) < mx + h$
  $\iff f(x) - (mx + h) < 0$
  $\iff \delta(x) < 0$

- P est un point de l'AO $\iff f(x) = mx + h$
  $\iff f(x) - (mx + h) = 0$
  $\iff \delta(x) = 0$



Exemple 15: On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$

- Déterminer l'équation de l'AO et $\delta(x)$.
- Déterminer la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.
- En déduire une bonne esquisse de f.

Exercice 2.24: Pour chacune des fonctions f proposées, déterminer

- $\mathrm{E_D}(f)$ puis le signe de f.
- Les équations de toutes les asymptotes (AV et AO) ainsi que la position de la courbe par rapport à elles.
- Une bonne esquisse de f.

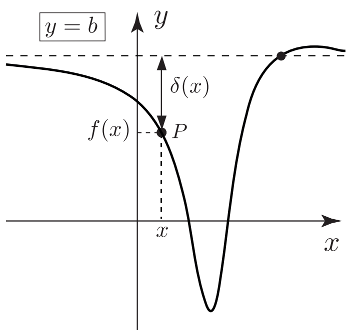
a) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{2x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

Dans le cas d'une AH: Par analogie, nous pourrons également définir **la position** du graphe d'une fonction par rapport à son **asymptote horizontale**.

Son équation $y = b$ étant obtenue à l'aide d'un calcul de limite, nous définirons et calculerons $\delta(x)$ à l'aide de :

$$\boxed{\delta(x) = f(x) - b}.$$

Soit f une fonction admettant une AH en $y = b$. On considère le point $P\big(x\,;f(x)\big)$ du graphe de f.



- P est au-dessus de l'AH $\iff f(x) > b$
  $\iff f(x) - b > 0$
  $\iff \delta(x) > 0$

- P est au-dessous de l'AH $\iff f(x) < b$
  $\iff f(x) - b < 0$
  $\iff \delta(x) < 0$

- P est un point de l'AH $\iff f(x) = b$
  $\iff f(x) - b = 0$
  $\iff \delta(x) = 0$

Exemple 16: On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2-2x+1}$

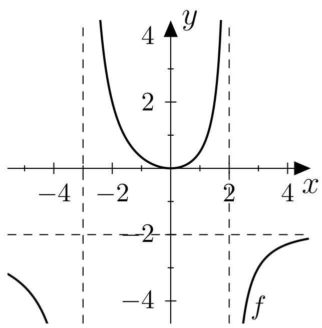
- Déterminer l'$\mathrm{E_D}(f)$, les zéros et le signe de f.
- Déterminer les éventuelles AV et la position de la courbe par rapport à elles.
- Déterminer l'AH et la position de la courbe par rapport à elle.
- Le graphe de f.

Exercice 2.25: Pour les deux fonctions f proposées ci-dessous :

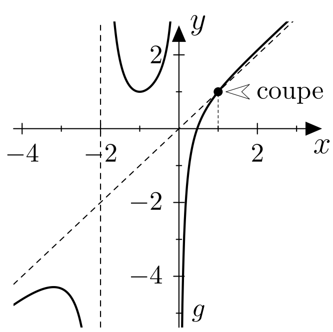
- Déterminer l'$\mathrm{E_D}(f)$, les zéros et le signe de f.
- Les équations des asymptotes ainsi que la position de la courbe par rapport à elles.
- Une bonne esquisse de f.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{(3x-2)^2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3}$

Exercice 2.26: Déterminer les fonctions f et g admettant les graphes suivants :



a)



b)

Exercice 2.27: Calculer les réels a, b, c pour que le graphe de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{ax^2+6x+8}{x^2+bx+c}$$

admette les droites d'équation $x = 0$, $x = 2$ et $y = 1$ comme asymptotes.

2

Limites et asymptotes (renf)

2.10 Les fonctions continues

Introduction: La notion de continuité d'une fonction est moins facile à définir qu'il n'y paraît. Jusqu'au début du XIX$^{\text{e}}$siècle, cette notion se comprenait par référence à la courbe d'une fonction sur son graphique : la continuité de la fonction restant confondue avec la continuité du trait de crayon supposé tracer la courbe. C'est à cette période qu'apparut la « crise de la continuité ». Plusieurs théorèmes sur le sujet jugés précédemment évidents n'admettaient pas de preuve rigoureuse. Pour cela, il fallait une vraie définition de la continuité d'une fonction. . .

Heureusement Augustin Cauchy en ébaucha une dans son cours à l'École polytechnique en 1823. Il y expliquait qu'une fonction **continue** est **une fonction qui varie peu lorsque sa variable varie peu.**

Dans notre cours, nous nous contenterons de l'idée qu'une fonction est continue si on peut tracer sa courbe sans soulever le crayon. Ainsi tous les théorèmes seront acceptés sans preuve.

Définition: Soit a, $b \in \mathbb{R}$ et f une fonction,

- La fonction f est **continue en $\boldsymbol{x = c}$** si f est définie en c et si

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

- La fonction f est **continue sur $\boldsymbol{]a\,;b[}$** si f est continue pour tout c de $]a\,;b[$

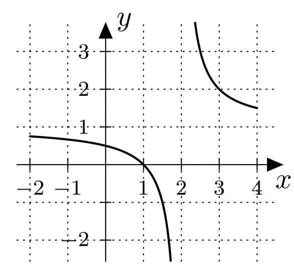
- La fonction f est **continue sur $\boldsymbol{[a\,;b]}$** si f est continue pour tout c de $]a\,;b[$ et si de plus

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

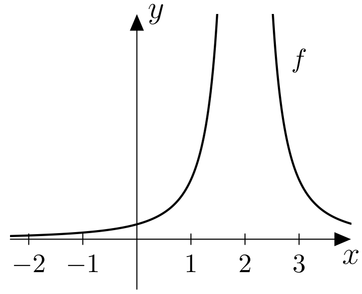
Exemple 17: Montrer que la fonction f définie sur

$$I =]-2\,;4\,[$$

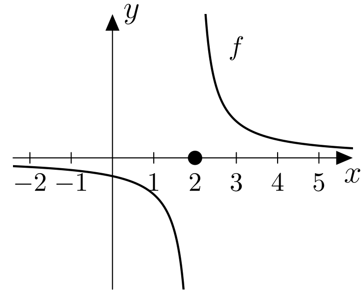
esquissée ci-contre n'est pas continue sur I.



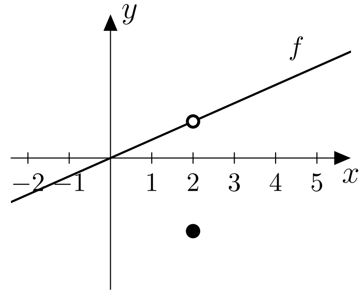
Exercice 2.28: Préciser pour quelles raisons les fonctions f esquissées ci-dessous sont **discontinues** en $x = 2$.



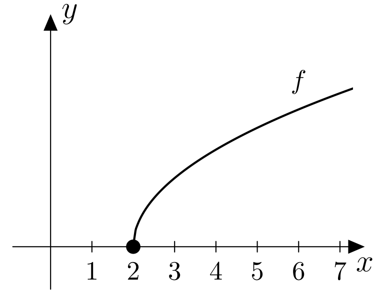
a)



b)



c)



d)

Exercice 2.29: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} & \text{si } x \neq 2, \\ f(2) & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Déterminer $f(2)$ pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.30: Déterminer une fonction affine h pour que la fonction f donnée soit continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < -1, \\ h(x) & \text{si } \ldots, \\ \frac{1}{2}x - 3 & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

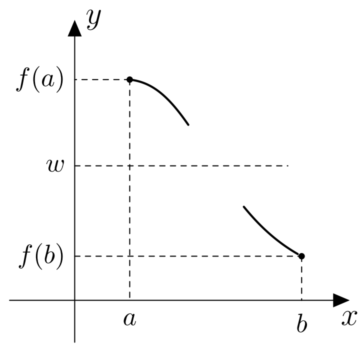
Exercice 2.31: En accord avec la théorie de la relativité, la longueur L d'un objet perçue par un observateur immobile dépend de sa vitesse v selon la fonction $L(v) = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ où L_0 est sa longueur au repos et c la vitesse de la lumière.

Einstein a montré aussi que la masse m de cet objet est liée elle à la fonction $m(v) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Calculer puis interpréter les deux limites $\lim\limits_{v \to c^-} L(v)$ et $\lim\limits_{v \to c^-} m(v)$.

2.11 Théorème de la valeur intermédiaire

Théorème: **de la valeur intermédiaire**

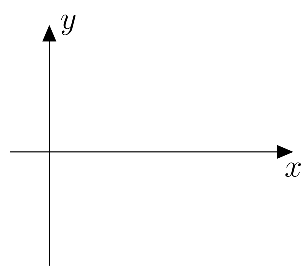


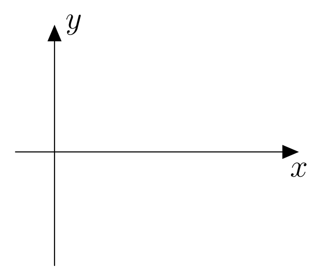
Si f est une fonction continue sur $[a\,;b]$ et si w est un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors il existe au moins un nombre $c \in [a\,;b]$ pour lequel $f(c) = w$.

Application: Soit une fonction f continue sur $[a\,;b]$ tel que $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Le théorème affirme alors que l'équation $f(x) = 0$ admet **au moins** une solution comprise entre a et b.





Exercice 2.32:

a) Démontrer que l'équation $x^3 - 5x^2 + 7x - 9 = 100$ a au moins une solution.

b) Démontrer que l'équation $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ admet au moins deux solutions sur l'intervalle $[-2\,;1]$.

Exercice 2.33: L'équation $6x^2 - 17x = -12$ admet-elle une solution pour $x \in [1\,;2]$?

Exercice 2.34: Vous partez à 12h00 pour aller trouver votre grand-mère. Très gentiment, elle vous propose de dormir chez elle et de rentrer le lendemain en partant à la même heure. Est-il vrai que vous passerez alors au moins une fois à la même heure au même endroit ?

(*justifier votre réponse*)

Exercice 2.35: La température T (en °C) à laquelle l'eau bout est fonction de l'élévation h (en m) au-dessus du niveau de la mer :

$$T(h) = 100{,}862 - 0{,}0415\sqrt{h + 431{,}03}$$

Montrer que, entre 4'000 et 4'500 m d'altitude, l'eau bout à 98°C.

2.12 Le calcul de limite en un point à l'aide d'$\mathcal{E}$, δ ...

Introduction: Nous avons jusqu'ici une bonne idée de la notion de limite et nous savons en calculer la plupart. Nous allons revenir plus formellement sur une des "définitions" et quelques résultats déjà énoncés.

Revoyons d'abord la "définition" que nous avons donnée au début du chapitre (en page 68) :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

signifie que :

> *Le nombre L est la limite de f en $x = a$ si $f(x)$ reste arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a, mais $x \neq a$.*

Ceci ne peut être une définition mathématique à cause du sens trop vague des expressions «arbitrairement proche» et « suffisamment proche ». Nous allons donc préciser ceci dans la définition suivante.

Définition I: Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a lui-même, et soit L un nombre réel. On posera l'équivalence suivante :

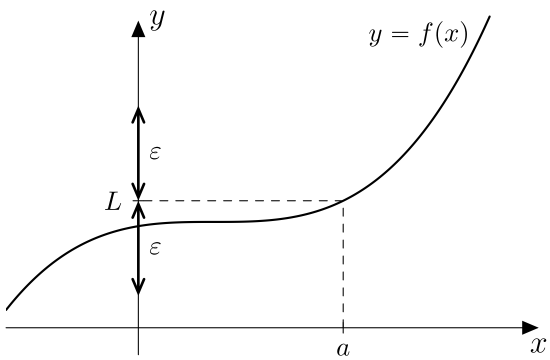
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

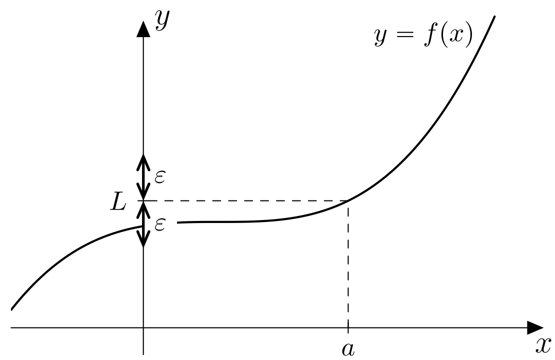
$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

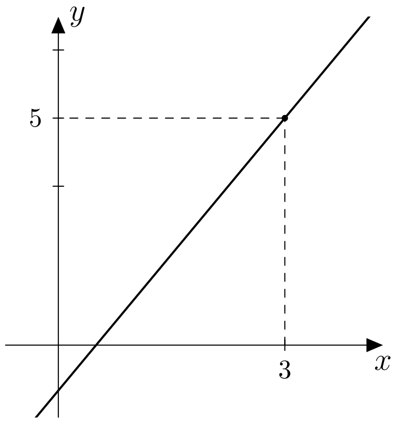
Notons que cette définition sous-entend que f est définie partout autour de a sauf peut-être en a lui-même.

Observons ceci sur les figures en les complétant :





Exemple 18: Montrer que $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5$.



Exercice 2.36: Montrer que

a) $\lim\limits_{x\to 4}(-4x+2)=-14$ **b)** $\lim\limits_{x\to 6}\left(9-\frac{1}{6}x\right)=8$

Exemple 19: Pour la limite et l'ε proposés, déterminer le plus grand $\delta>0$ tel que si $0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-L|<\varepsilon$.

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)=5$, $\varepsilon=0{,}1$.

b) Qu'en est-il si l'on considère plutôt $\varepsilon=0{,}01$.

Exercice 2.37: Pour la limite et le ε proposés, déterminer le plus grand $\delta > 0$ tel que si $0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$.

a) $\lim\limits_{x\to 3} x^3 = 27$, $\varepsilon = 0{,}01$ **b)** $\lim\limits_{x\to 16} \sqrt{x} = 4$, $\varepsilon = 0{,}1$

Exercice 2.38: Même consigne :

a) $\lim\limits_{x\to 3/2} \dfrac{4x^2 - 9}{2x - 3} = 6$, $\varepsilon = 0{,}01$ **b)** $\lim\limits_{x\to -2/3} \dfrac{9x^2 - 4}{3x + 2} = -4$, $\varepsilon = 0{,}1$

Exercice 2.39: De la définition proposée à la page précédente, compléter celles de la limite à gauche et de la limite à droite :

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \iff$ ....
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \iff$ ....

Exercice 2.40: À l'aide des définitions précédentes, montrer que :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \text{ et } \lim_{x\to a^-} f(x) = L \iff \lim_{x\to a} f(x) = L$$

(cf. Propriété page 69)

Définition II: Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a lui-même, et soit L un nombre réel. On posera l'équivalence suivante :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

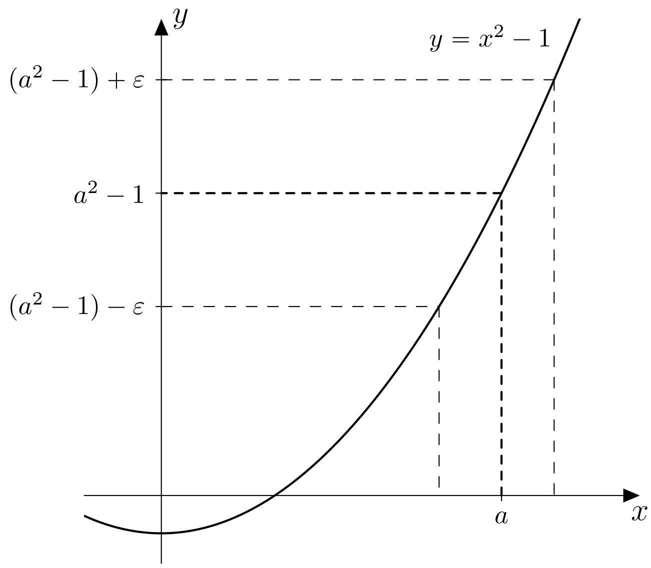
$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } x \in]a - \delta\,; a + \delta[\implies f(x) \in]L - \varepsilon\,; L + \varepsilon[$$

Exercice 2.41: Montrer en quoi cette nouvelle définition est équivalente à la précédente.

Exemple 20: Après avoir complété l'esquisse proposée, montrer que :

$$\lim_{x\to a}(x^2-1)=a^2-1$$



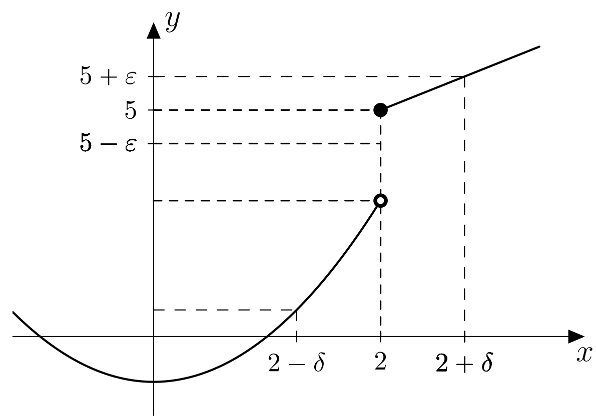
Exercice 2.42: Montrer que :

a) $\lim_{x\to a}(x^3-8)=a^3-8$ **b)** $\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$

Exemple 21: Montrer que $\lim_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ n'existe pas.

Exercice 2.43: Après avoir complété l'esquisse suivante, montrer que :

$$\lim_{x\to 2} f(x) \text{ n'existe pas si } f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < 2, \\ x+3 & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$



Exercice 2.44: À l'aide d'une figure d'étude adéquate, montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ n'existe pas.

Pour conclure: Comme indiqué précédemment, l'introduction de ces définitions formelles ont permis (en particulier) de démontrer rigoureusement les règles de calcul de limites indiquées en page 76.

Dans la suite de vos études, vous aurez probablement l'occasion de les démontrer. Comme dernier exercice, concentrons-nous sur l'une d'elle :

Exercice 2.45: Démontrer que :

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

3 Introduction à la notion de dérivée

3.1 La tangente en un point d'une courbe

Introduction:

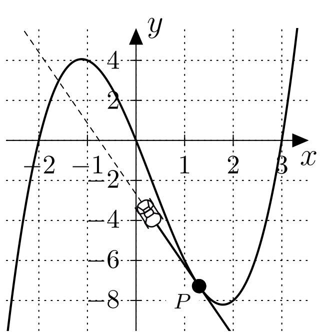
Nous commencerons ce chapitre par l'étude du problème qui consiste à déterminer **la pente de la tangente** en un point du graphe d'une fonction. Nous aborderons une démarche comparable à celle développée par Isaac Newton.

Cette application nous conduira à la notion de **dérivée**.

Par la suite, nous oublierons l'aspect géométrique du problème pour définir la dérivée comme **limite** d'une expression impliquant une fonction. Nous généraliserons ce concept de dérivée à différentes fonctions et nous développerons des **règles de dérivation**. Nous nous entraînerons ensuite à les utiliser.

Une dernière étape consistera à appliquer la dérivée dans des applications concrètes (problèmes d'optimisation par exemple)

Perte de maîtrise:

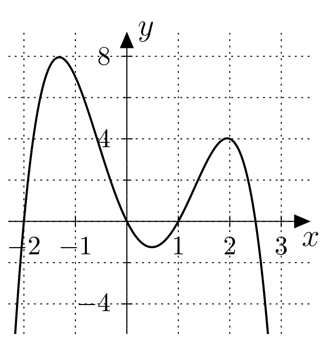


Il peut être utile de connaître l'équation de la tangente à une courbe en un point P de celle-ci.

Par exemple, la trajectoire suivie par une voiture en perte de maîtrise correspond justement à la tangente à sa trajectoire prise depuis le point de dérapage.

On peut remarquer que contrairement à un cercle, la tangente en un point d'une courbe peut recouper cette courbe en un autre point. Notre objectif sera de déterminer **la pente de la tangente** en un point pour pouvoir le cas échéant déterminer **l'équation de cette droite tangente**.

Min et Max:



Lors de nos études de fonctions précédentes, nous avons pu esquisser de bons graphiques à l'aide du tableau de signes de la fonction et de ses asymptotes. Mais il nous manquait des informations quant à la position des "virages" de la courbe.

Ces points extrêmes admettent chacun une tangente dont la particularité est que **sa pente vaut zéro**.

À partir d'une fonction, nous utiliserons 3 méthodes différentes permettant de calculer la pente de la tangente à sa courbe par un point donné.

3.2 Méthode 1 : À l'aide du graphique

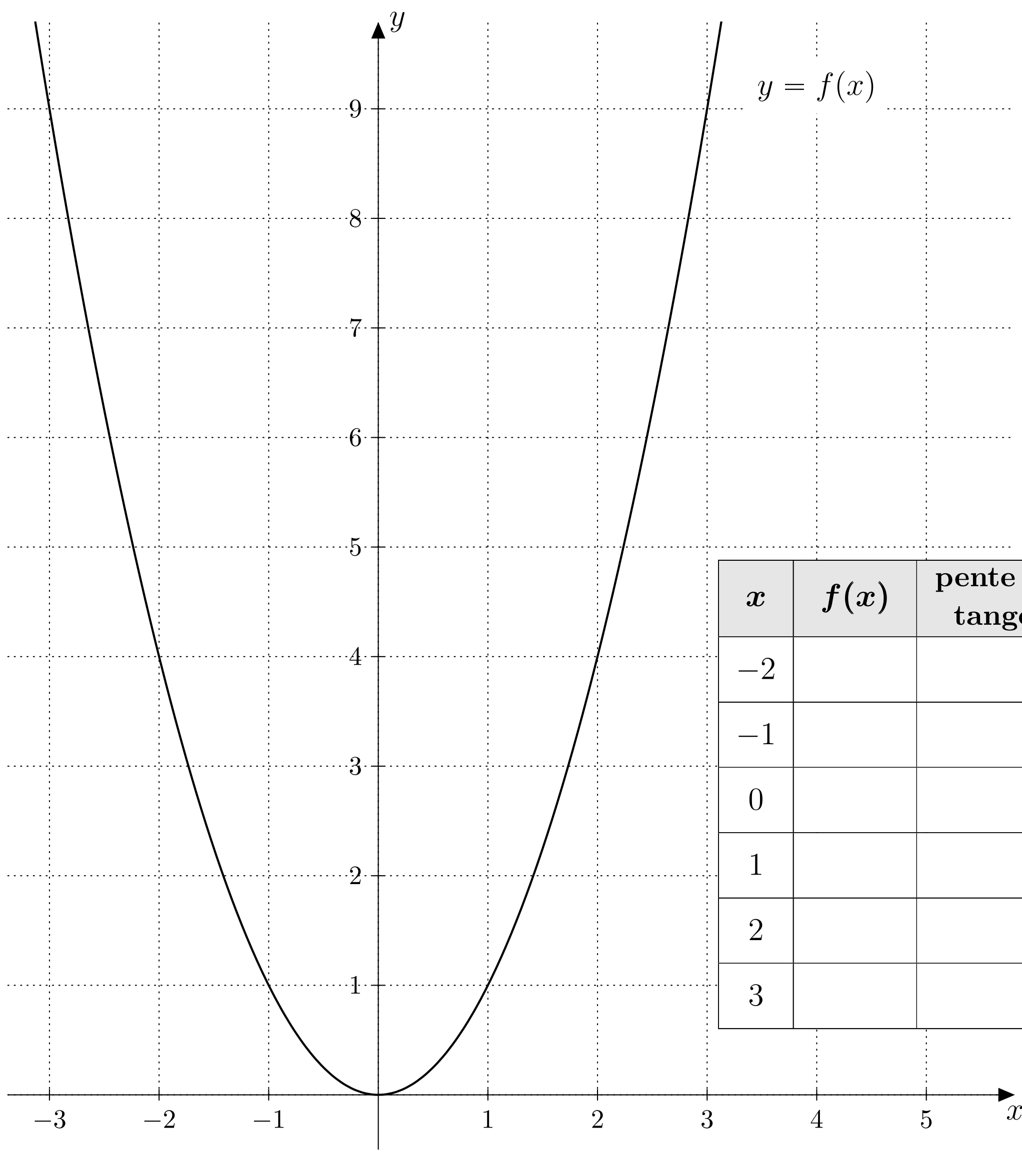
Exercice 3.1: Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

a) Tracer le plus précisément possible les tangentes à la courbe $y = f(x)$ aux points d'abscisse :

$$x = -2 \qquad x = -1 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2 \quad \text{et} \quad x = 3.$$

b) Compléter le tableau de valeurs.

c) Déterminer un lien entre la 1re et la 3e colonne de ce tableau.



x	$f(x)$	pente de la tangente
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

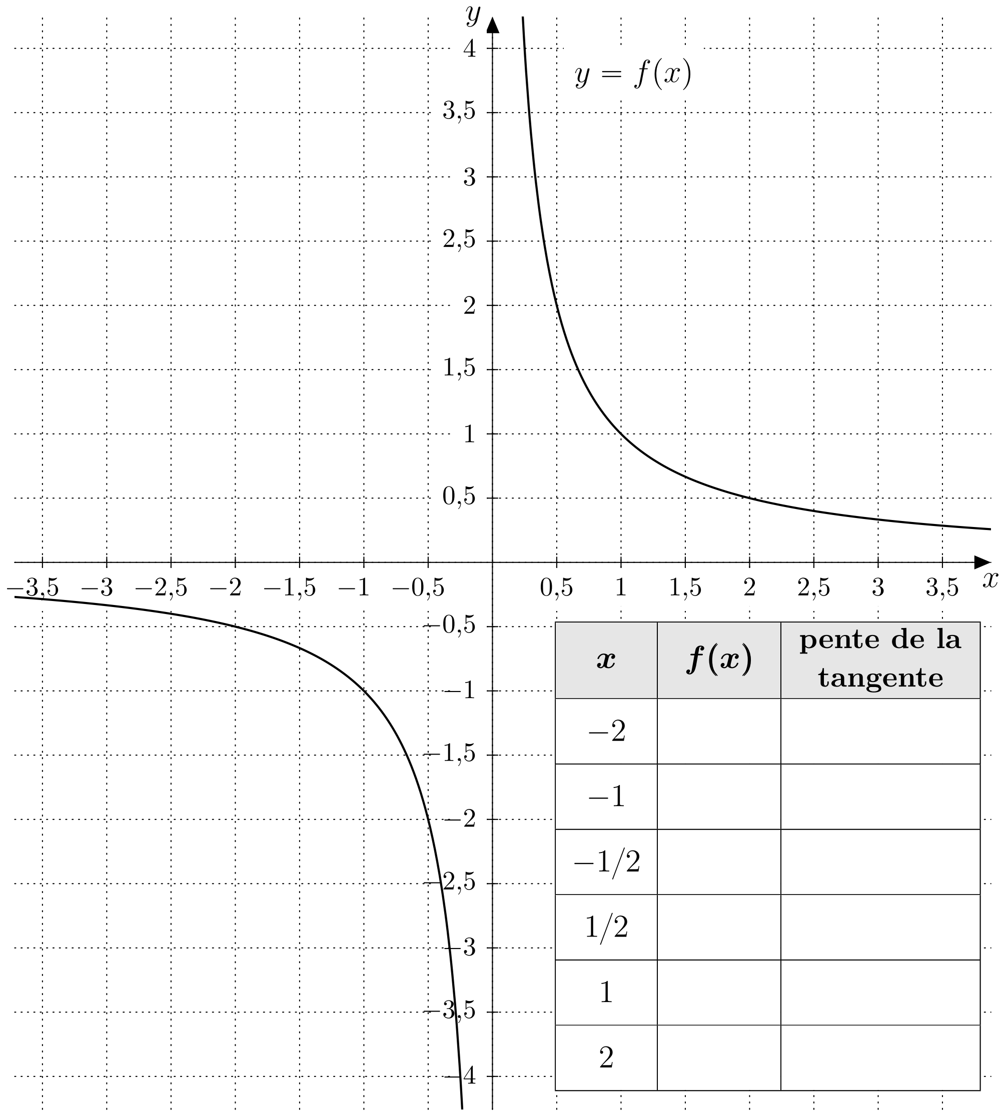
Exercice 3.2: Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Tracer le plus précisément possible les tangentes à la courbe $y = f(x)$ aux points d'abscisse :

$$x = -2 \qquad x = -1 \qquad x = -1/2 \qquad x = 1/2 \qquad x = 1 \quad \text{et} \quad x = 2.$$

b) Compléter le tableau de valeurs.

c) Déterminer un lien entre la 1re et la 3e colonne de ce tableau.



x	$f(x)$	pente de la tangente
-2		
-1		
$-1/2$		
$1/2$		
1		
2		

- Avantages de cette première méthode :

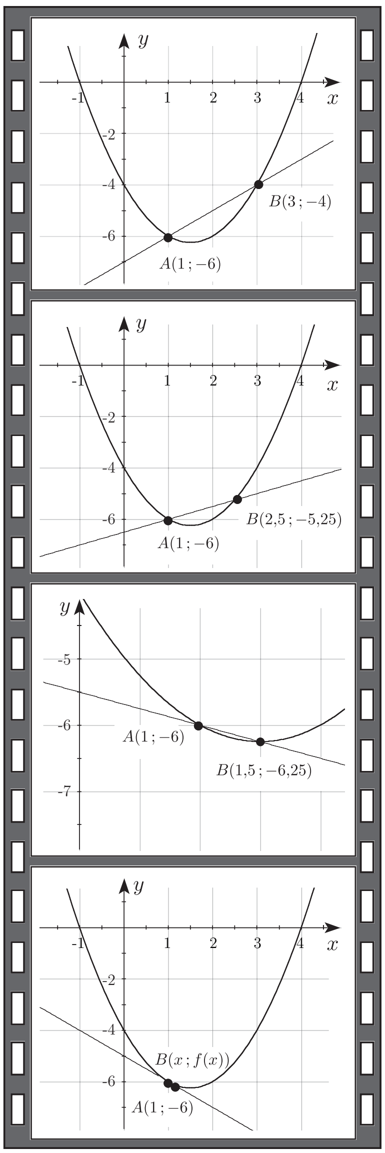
- Inconvénients de cette première méthode :

3.3 Méthode 2 : À l'aide de limites

Le film de la situation: **pour la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x - 4$.**

Nous voulons trouver la pente de la droite tangente à la parabole $y = x^2 - 3x - 4$ au point A.

Nous allons d'abord exprimer la pente de la sécante AB, puis en faisant tendre B vers A, cette sécante va tendre vers une droite limite qui correspondra à la droite tangente à la courbe en A.



- 1$^{\text{re}}$ étape :

$$\left.\begin{array}{l} A(1\,;-6) \\ B(3\,;-4) \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \textit{pente de la sécante} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$$

- 2$^{\text{e}}$ étape :

- 3$^{\text{e}}$ étape :

- Plus généralement :

Exemple 1: Calculer la pente de la tangente des fonctions f suivantes aux points donnés :

a) $f(x) = x^2$ au point $A(2\,;f(2))$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ au point $A(2\,;f(2))$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ au point $A(2\,;f(2))$

Exercice 3.3: Appliquer cette démarche aux fonctions f suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 2x$ au point $A(1\,;f(1))$

b) $f(x) = x^3$ au point $A(-2\,;f(-2))$

c) $f(x) = \sqrt{x+1}$ au point $A(2\,;f(2))$

d) $f(x) = 3x - 5$ au point $A(-1\,;f(-1))$

e) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ au point $A(-1\,;f(-1))$ puis au point $A'(0\,;f(0))$

- Avantages de cette deuxième méthode :

- Inconvénients de cette deuxième méthode :

3.4 Méthode 3 : À l'aide de la dérivée

Dans les situations précédentes est apparu le calcul de la limite suivante :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Cette limite est à la base d'un des concepts fondamentaux de l'analyse : celui de **fonction dérivée**.

Définition:

- La **dérivée** d'une fonction f est **la fonction $\boldsymbol{f'}$** définie par :

  $$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

  là où cette limite existe.
- Quand $f'(a)$ existe, on dit que f est **dérivable** en a

Remarque: Il est à noter que la fonction dérivée $f'(a)$ généralise la notion de pente de la tangente à toutes les valeurs a où la dérivée existe. Par convention, à la fin du calcul de limite, la fonction $f'(a)$ est “retranscrite” en $f'(x)$ en changeant la variable a en x

$$f(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(a) = 2a \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2x$$

Exemple 2: On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 8.$$

Déterminer

a) $f'(x)$, $f'(4)$, $f'(-2)$;

b) la pente de la tangente au graphe au point $P(3\,;f(3))$;

c) le point du graphe Q pour lequel la tangente est horizontale.

Exercice 3.4: Déterminer les dérivées des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 2x$ **b)** $f(x) = 3x$

c) $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = 5$ **f)** $f(x) = \sqrt{x}$

Exercice 3.5: Sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

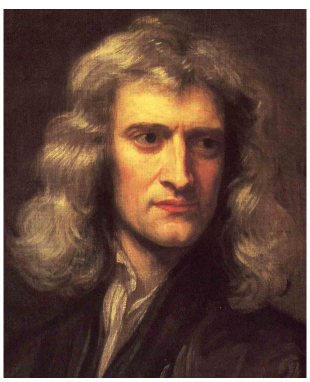
a) Déterminer la fonction dérivée f'.

b) Calculer la pente de la tangente à f au point $A(1/4\,; f(1/4))$.

c) Déterminer l'équation de la tangente au point A.

Exercice 3.6: Soit la fonction f définie par $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$.
Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 3$

Un peu d'histoire:



Isaac Newton
1643-1727

Gottfried Wilhelm von Leibniz
1646-1716

Les problèmes de tangentes (dérivation) et de calculs d'aire (intégration) ont passionné de nombreux mathématiciens depuis Archimède. Les premiers à avoir compris le rapport entre les deux sont Isaac Newton et Gottfried Wilhelm von Leibniz. Ils sont maintenant considérés comme co-inventeurs du calcul différentiel.

Pourtant la controverse a longtemps fait rage, du vivant de Newton et Leibniz, et pendant encore de nombreuses années après leur mort. Les uns, à la suite de Newton lui-même, accusaient Leibniz de plagiat, car il aurait eu accès à des manuscrits non publiés de Newton. Les autres prouvaient sans conteste l'antériorité des publications de Leibniz et la supériorité de son système de notation. Il semble bien que Newton a effectivement développé ses idées avant Leibniz, mais que, même si ce dernier a eu accès à des manuscrits de Newton, il a travaillé de façon indépendante. La controverse, qui paraît de nos jours plutôt futile, eut pour conséquence de couper pendant longtemps les mathématiciens anglais du reste de l'Europe : ce n'est qu'au début du XIX^e siècle que les notations de Leibniz furent acceptées en Angleterre.

Voici comment, dans Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687), Newton exprime sa vision des dérivées :

> *Les rapports ultimes dans lesquels les quantités disparaissent ne sont pas réellement des rapports de quantités ultimes, mais les limites vers lesquelles les rapports de quantités, décroissant sans limite, s'approchent toujours, et vers lesquelles ils peuvent s'approcher aussi près qu'on veut.*

La vision de Newton est très proche de notre définition moderne de la dérivée comme limite d'un taux d'accroissement. C'est d'autant plus remarquable que la notion de limite ne sera définie rigoureusement que presque deux siècles après les premières découvertes de Newton.

Introduction à la notion de dérivées (renf)

3.5 La dérivée à gauche et à droite

Définition: Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant a. On définit :

- La **dérivée à gauche** de la fonction f en $x = a$ par :

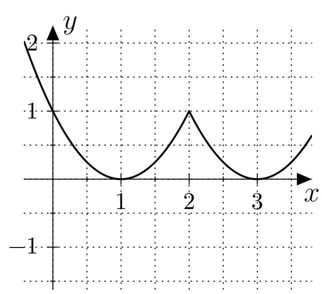
$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- La **dérivée à droite** de la fonction f en $x = a$ par :

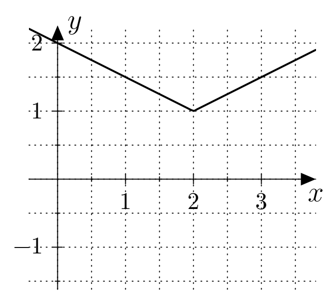
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Cette fonction f sera dite **dérivable** en $x = a$ si et seulement si sa dérivée à droite et sa dérivée à gauche existent ($\neq \infty$) et sont égales.

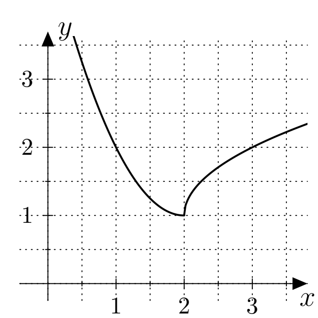
Exercice 3.7: Déterminer approximativement les dérivées à gauche et à droite des fonctions suivantes au point d'abscisse $x = 2$



a)



b)



c)

Exercice 3.8: Les fonctions suivantes f sont-elles continues <u>et</u> dérivables ?

a) $\begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1, \\ 2x-1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$ **b)** $f(x) = |x|$

Exercice 3.9: Déterminer l'équation de la tangente à $y = \sqrt{x}$ au point $O(0\,;0)$

Théorème: Si une fonction est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Preuve:

Exercice 3.10: Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont justes ? *(justifier !!)*

① f est dérivable $\Longrightarrow$ f est continue ;
② f est continue $\Longrightarrow$ f est dérivable ;
③ f est dérivable $\Longleftrightarrow$ f est continue.

Exercice 3.11: Calculer la dérivée des fonctions f et g suivantes :

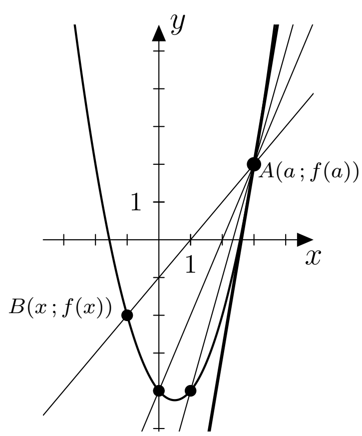
a) $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$

4

Dérivée d'une fonction et règles de calcul

4.1 Les règles de dérivation

Introduction: Dans le chapitre précédent, nous nous sommes concentrés dans la recherche de **la pente d'une tangente** à une courbe donnée. Plusieurs démarches vous ont été présentées. La première était de type graphique suivi d'une méthode utilisant un calcul de limites assez répétitif pour finalement nous amener à la définition suivante :



- La **dérivée** d'une fonction f est la **fonction f'** définie par :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Cette méthode reposant toujours sur un calcul de limites n'est pas très efficace. Il est donc souhaitable de pouvoir utiliser des règles générales de dérivation. Les 7 **règles de dérivation** qui suivent se démontrent en utilisant systématiquement ce même type de calcul de limites. Nous nous contenterons de leur utilisation.

1re règle : *Pour dériver x à une certaine puissance, on passe la puissance devant, on reproduit x et on descend la puissance d'un cran.*

dérivée d'une puissance

$$\boxed{f(x) = x^n \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = n\cdot x^{n-1}}$$

Exemple 1:

a) $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1x^{1-1} = 1x^0 = \underline{\underline{1}}$

b) $f(x) = x^3$ donc $f'(x) = \underline{\underline{3x^2}}$

dérivée d'une fraction simple

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alors $f(x) = x^{-1}$

donc $f'(x) = -1\cdot x^{-2} = -1\cdot\dfrac{1}{x^2} = \underline{\underline{\dfrac{-1}{x^2}}}$

dérivée d'une racine

d) $f(x) = \sqrt{x}$ alors $f(x) = x^{1/2}$

donc $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{1/2-1} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{1/2}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}}$

e) dériver la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

2e règle : *La dérivée d'un nombre vaut 0.*

dérivée d'un nombre

$$\boxed{f(x) = \text{nombre} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 0}$$

Exemple 2: $f(x) = 10'000$ donc $\underline{\underline{f'(x) = 0}}$

3e règle : *Pour dériver une expression du type "un nombre fois une fonction", on garde le nombre et on dérive la fonction.*

$$\boxed{f(x) = \text{nombre} \cdot g(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \text{nombre} \cdot g'(x)}$$

Exemple 3: **a)** $f(x) = 5x^2$ donc $f'(x) = 5 \cdot 2x = \underline{\underline{10x}}$

b) $f(x) = 7\sqrt[3]{x}$ alors $f(x) = 7x^{1/3}$

donc $f'(x) = 7 \cdot \dfrac{1}{3}x^{1/3-1} = \dfrac{7}{3}x^{-2/3}$

$$= \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \underline{\underline{\frac{7}{3\sqrt[3]{x^2}}}}$$

c) dériver la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{5x^4}$

Exercice 4.1: Calculer la dérivée des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = 3x$ **b)** $f(t) = 7t^6$ **c)** $f(x) = \sqrt{2}x^7$

d) $f(x) = ax^2$ **e)** $f(x) = 3\sqrt{x}$ **f)** $f(x) = x^{3/2}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **h)** $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ **i)** $f(x) = \sqrt[7]{x^2}$

j) $f(x) = (m-1)x^2$ **k)** $f(x) = 56$

Exercice 4.2: Déterminer une fonction f dont on donne sa dérivée f' :

a) $f'(x) = 34x$ **b)** $f'(x) = x^3$

c) $f'(x) = \sqrt{x}$ **d)** $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

4e règle : *La dérivée d'une somme est la somme des dérivées.*
La dérivée d'une soustraction est la soustraction des dérivées.

dérivée d'une somme (soustr.)

$$\boxed{f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)}$$

Exemple 4: **a)** $f(x) = 5x^2 + 2x + 3$ donc $\underline{\underline{f'(x) = 10x + 2}}$

b) $f(x) = 2x^2 + \dfrac{3}{x}$ alors $f(x) = 2x^2 + 3x^{-1}$

donc $f'(x) = 4x - 3x^{-2} = 4x - \frac{3}{x^2}$

$$= \underline{\underline{\frac{4x^3 - 3}{x^2}}}$$

c) dériver la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \sqrt{x}$

Exercice 4.3: Calculer la dérivée des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = 3x + 6$ **b)** $f(x) = 4x^2 - 2x + 5$

c) $f(x) = 3x^3 - 2x + 5$ **d)** $f(x) = ax + b$

e) $f(x) = x^2 - \dfrac{3}{x}$ **f)** $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 3$

g) $f(x) = \dfrac{3}{x^2} + 3x$ **h)** $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

i) $f(x) = 3x - 2 + \dfrac{1}{3x}$ **j)** $f(x) = ax^2 + bx + c$

Exercice 4.4: Déterminer <u>une</u> fonction f dont on donne sa dérivée f' :

a) $f'(x) = x - 2$ **b)** $f'(x) = 4x^3 + 3x^2$

c) $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2}$ **d)** $f'(x) = x^{3/4}$

5e règle : **dérivée d'une multiplication**

La dérivée d'une multiplication n'est pas la multiplication des dérivées !!!!

Il s'agit de la dérivée de la première fois la deuxième + la première fois la dérivée de la seconde.

$$\boxed{f(x) = g(x) \cdot h(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)}$$

Méthode: *Comment retenir des formules telles que celle-ci ?*

- *Certains plus « visuels » vont véritablement la photographier et seront capables de la « redessiner » quand le besoin s'en fera sentir.*
- *D'autres se l'écoutent dire, en utilisant une ritournelle ressemblant à celles qui vous sont proposées.*

À vous de trouver votre méthode.

Exemple 5: **a)** $f(x) = (3x^2 - 2)(2x + 1)$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad f'(x) &= (6x)(2x+1) + \big(3x^2 - 2\big) \cdot 2 \\ &= 12x^2 + 6x + 6x^2 - 4 = 18x^2 + 6x - 4 \\ &= 2\left(9x^2 + 3x - 2\right) = \underline{\underline{2(3x+2)(3x-1)}} \end{aligned}$$

b) dériver la fonction f définie par $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$

6^{e} règle : *La dérivée d'une fraction consiste en :*

dériver la première · la deuxième – la première · la dérivée de la seconde, le tout divisé par le carré de la seconde

dérivée d'une fraction

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}}$$

Exemple 6: **a)** $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-5}$

$$\text{donc} \quad f'(x) = \frac{(2x-3)' \cdot (x-5) - (2x-3) \cdot (x-5)'}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{2 \cdot (x-5) - (2x-3) \cdot 1}{(x-5)^2} = \underline{\underline{\frac{-7}{(x-5)^2}}}$$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-1}$

$$\text{donc} \quad f'(x) = \frac{\left(x^2+1\right)' \cdot (2x-1) - (x^2+1) \cdot (2x-1)'}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{2x \cdot (2x-1) - (x^2+1) \cdot 2}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 2}{(2x-1)^2} = \underline{\underline{\frac{2\left(x^2 - x - 1\right)}{(2x-1)^2}}}$$

c) dériver la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{3x+2}$

Exercice 4.5: Calculer la dérivée des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = (x^2 - 3)(4x - 5)$ **b)** $f(x) = (x + 4)^2$

c) $f(x) = \dfrac{x - 2}{3 - x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{2x + 3}{4 - x}$

e) $f(x) = \dfrac{x - x^3}{x - 2}$ **f)** $f(x) = (x - 4)(3x + 2)$

g) $f(x) = \dfrac{(x - 5)(3 - 2x)}{4x + 2}$ **h)** $f(x) = (3x^2 - 7x)(4x^2 - 5)$

7e règle : *La dérivée d'une parenthèse à une certaine puissance consiste en :*

On passe la puissance devant, on reproduit la parenthèse à une puissance un cran inférieur et on multiplie le tout par la <u>dérivée du contenu</u> de la parenthèse.

dérivée d'une parenthèse

$$\boxed{f(x) = \big(g(x)\big)^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot \big(g(x)\big)^{n-1} \cdot \boldsymbol{g'(x)}}$$

Exemple 7: **a)** $f(x) = (2x^2 + 3x - 5)^3$

donc $f'(x) = \underline{\underline{3\left(2x^2 + 3x - 5\right)^2 \cdot (4x + 3)}}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 4}$ que l'on écrit $f(x) = (x^2 + 5x - 4)^{1/2}$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad f'(x) &= \frac{1}{2}\left(x^2 + 5x - 4\right)^{1/2-1} \cdot \left(x^2 + 5x - 4\right)' \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5x - 4}}(2x + 5) \\ &= \underline{\underline{\frac{2x + 5}{2\sqrt{x^2 + 5x - 4}}}} \end{aligned}$$

c) dériver la fonction f définie par $f(x) = \left(\dfrac{1 - x}{3x + 2}\right)^2$

d) dériver la fonction f définie par $f(x) = (3x-1)^2(5x-2)^3$

e) dériver la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{(2x-1)^3}{(5x+1)^2}$

f) au point d'abscisse $x = -3$, déterminer l'équation de la tangente au graphe de f définie par $f(x) = \dfrac{(2x-1)^3}{(5x+1)^2}$

<u>Marche à suivre :</u>

① Déterminer $f'(x)$

② En déduire la pente $m = f'(a)$

③ Déterminer les coordonnées du point de tangence $P(a\,;f(a))$

④ Déterminer l'ordonnée à l'origine h de la droite $y = mx + h$

Exercice 4.6: Calculer la dérivée des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = (2x+4)^5$ **b)** $f(x) = (5x^2-3)^{3/2}$

c) $f(x) = \sqrt{8x^2-2x+3}$ **d)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}$

e) $f(x) = (x^2-1)^3$ **f)** $f(x) = \left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2$

g) $f(x) = (2+x)^2(1-x)^3$ **h)** $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

i) $f(x) = \sqrt{(x-3)(x+2)}$ **j)** $f(x) = \dfrac{(3x-1)^3}{(2x+3)^2}$

Exercice 4.7: Déterminer <u>une</u> fonction f dont on donne sa dérivée f' :

a) $f'(x) = 5\left(x^2-1\right)^4(2x)$ **b)** $f'(x) = -3(4-x)^2$

c) $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}$ **d)** $f'(x) = 2\left(x^2-1\right)(2x)$

Exercice 4.8: Déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée des fonctions f suivantes :

Un petit mélange de tout!!

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2-3x+4$ **b)** $f(x) = (x+5)(x-3)$

c) $f(x) = (4-x)^3$ **d)** $f(x) = \left(3x^2+5\right)\left(x^2-1\right)$

e) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ **f)** $f(x) = (ax+b)(cx+d)$

g) $f(x) = (2x-1)^3(x+2)^2$ **h)** $f(x) = \dfrac{a}{x}$

i) $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2$ **j)** $f(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$

k) $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$ **l)** $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

m) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **n)** $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

o) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ **p)** $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

Exercice 4.9: Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = a$

a) $y = 3x^2 - 6x - 5$ en $a = 0$

b) $y = x^2 + \sqrt{x} - 10$ en $a = 4$

c) $y = \dfrac{4x+7}{x+3}$ en $a = 2$

Exercice 4.10: En quel point la tangente à la courbe $y = x^2$ a-t-elle une pente de -3 ?

Exercice 4.11: On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$.

a) Calculer l'abscisse des points en lesquels la tangente au graphe de f est parallèle à la droite passant par $A(-3\,;2)$ et $B(1\,;14)$.

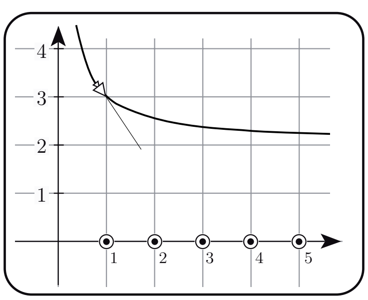
b) Déterminer les équations des tangentes ainsi obtenues.

Exercice 4.12: En quel point la courbe $y = \dfrac{x}{x^2+9}$ a-t-elle une tangente horizontale ?

Exercice 4.13: On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+a}{x+2}$.

Déterminer a sachant que la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse -3 est égale à -6.

Exercice 4.14: Sur l'écran du jeu vidéo que montre la figure, on peut voir un avion qui descend de gauche à droite en suivant la trajectoire d'équation $y = 2 + \frac{1}{x}$ et qui tire des missiles selon la tangente à leur trajectoire en direction des cibles placées sur l'axe Ox aux abscisses 1, 2, 3, 4 et 5.



Une cible sera-t-elle touchée si le joueur tire au moment où l'avion est en :

a) $P(1;3)$?

b) $Q\left(\frac{3}{2}\,;\frac{8}{3}\right)$?

Exercice 4.15: Déterminer la fonction quadratique f sachant que :

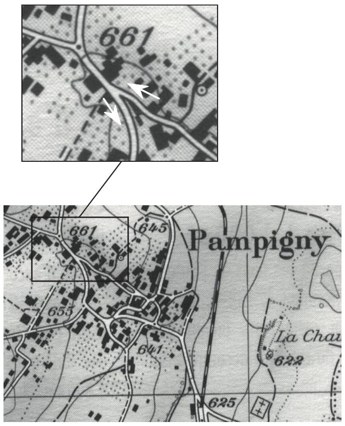
La définition de la fonction quadratique se trouve au chap. 1

a) $f(0) = 3$ $f(3) = 1$ $f'(4) = 1$

b) $f(-1) = 10$ $f(1) = 4$ $f'(1) = 7$

4.2 1^re^ application : calcul de l'angle entre 2 courbes

Introduction: Avant la construction proprement dite, des géomètres peuvent être amenés à devoir calculer l'angle entre deux routes devant aboutir à un carrefour. Cet angle ne devra bien évidemment pas être trop aigu pour permettre aux camions à remorque de manœuvrer… ou alors il faudra aménager ce carrefour différemment.

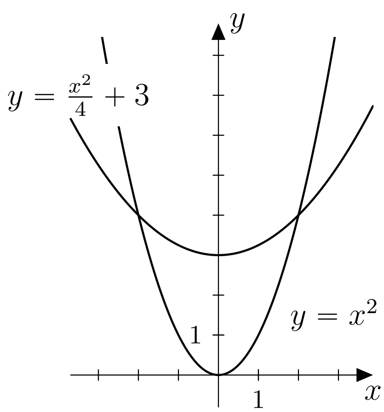


Mais comment peut-on calculer l'angle entre deux courbes ?

L'angle entre deux courbes est l'angle aigu des tangentes aux courbes en leur(s) point(s) d'intersection.

Exemple 8: Déterminer les angles formés par les courbes :

$$y = x^2 \quad \text{et} \quad y = \frac{x^2}{4} + 3$$



Exercice 4.16: Déterminer l'angle entre les deux courbes en leur(s) point(s) d'intersection :

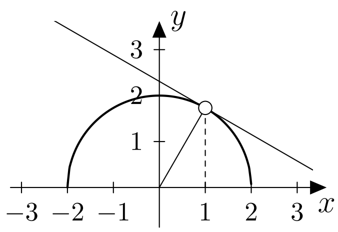
a) $y = x^2$ $\qquad$ $y = x^3$

b) $x^2 = 4y$ $\qquad$ $y = -x^2 + 10x - 15$

c) $y = x^3 + 2x - 1$ $\qquad$ $4y = x^3 - 11x^2$

d) $y = x^3 - 4x$ $\qquad$ $y = x^3 - 2x^2$

Exercice 4.17: On rappelle (??) que la courbe $y = \sqrt{4 - x^2}$ correspond à un demi-cercle centré en $(0\,;0)$ et de rayon 2.



a) Déterminer l'équation de la tangente à $y = \sqrt{4 - x^2}$ au point d'abscisse 1.

b) Montrer que cette tangente est bien perpendiculaire au rayon de contact.

c) Effectuer ces mêmes démarches pour tout point d'abscisse a avec $a \in [-2\,;2]$.

4

Dérivées et règles de calculs (renf)

4.3 Les règles de dérivation quelques démonstrations

Introduction: Le but de ce paragraphe est de démontrer quelques règles de dérivation que l'on pourra alors appliquer « à l'aveugle » dans les exercices et sans avoir plus besoin de calcul de limites. Certaines preuves seront basées sur les règles rappelées ci-dessous :

Rappel: Les règles sur les calculs de limites :

- $\lim\limits_{x\to a}(\text{nbre}\cdot f(x)) = \text{nbre}\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

1re règle:

- $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = n\cdot x^{n-1}$
- $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = n\cdot x^{n-1}$

Preuve:

2e règle: $\boxed{f(x) = \text{nbre} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0}$

Preuve:

3e règle: $\boxed{f(x) = \text{nbre} \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \text{nbre} \cdot g'(x)}$

Preuve: en exercice

4e règle: $\boxed{f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)}$

Preuve:

5e règle: $\boxed{f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)}$

Preuve: en exercice

6e règle: $\boxed{\text{Si } f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}}$

Preuve: en exercice

Exercice 4.18: Prouver la règle n° 3 de dérivation

Exercice 4.19: Compléter ci-dessous la règle n° 5 de dérivation

Hypothèse : $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

Conclusion : $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Raisonnement :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} = \lim_{x \to a} \frac{g(x) \cdot h(x) - g(a) \cdot h(a)}{x - a}$$

Truc *: on ajoute et on retranche au numérateur l'expression* $g(a) \cdot h(x)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) \cdot h(x) - \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots - g(a) \cdot h(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \left[h(x) \cdot \frac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{x - a} + g(a) \cdot \frac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{x - a} \right]$$

$$= \lim_{x \to a} h(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{x - a} +$$

$$\lim_{x \to a} g(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} h(x) \cdot g'(a) + \lim_{x \to a} g(a) \cdot h'(a)$$

$$= h(\ldots) \cdot g'(\ldots) + g(\ldots) \cdot h'(\ldots)$$

En réorganisant les termes et en changeant la variable de a en x, on obtient bien :

$$f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exercice 4.20: Prouver la règle n° 6 de dérivation

4.4 La dérivée de fonctions, un autre calcul de limite

Exercice 4.21: Soit une fonction f donnée, on définit une nouvelle fonction f^* par le calcul suivant :

$$f^*(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

a) Calculer f^* pour les 2 fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 + 4 \qquad \text{et} \qquad f(x) = 1/x.$$

b) Que constatez-vous ?

c) Justifier votre dernière affirmation par des calculs ou des esquisses judicieusement choisis.

4.5 La dérivée de fonctions composées

Introduction: Nous avons déjà eu l'occasion de dériver quelques fonctions composées ; en effet les fonctions :

- $f(x) = \sqrt{x-2}$ correspond à $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec

$$g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

- $f(x) = (3x-5)^3$ correspond à $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec

$$g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+4}}$ correspond à $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec

$$g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lors du calcul de ces 3 dérivées, nous avons vu apparaître ce que nous avons appelé la **dérivée interne**. Ceci se généralise lors du calcul de la dérivée de toutes les fonctions composées.

La dérivée d'une fonction composée :

$$\boxed{f(x) = (g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot \boldsymbol{h'(x)}}$$

Exercice 4.22: Utiliser la règle ci-dessus pour calculer la dérivée des 3 fonctions proposées dans l'introduction.

Exercice 4.23: Compléter la démonstration de cette règle de dérivation :

Hypothèse : $f(x) = (g \circ h)(x) = g\left(h(x)\right)$

Conclusion : $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Raisonnement :

$$(g \circ h)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(g \circ h)(x + \Delta x) - \ldots\ldots\ldots\ldots}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(h(x + \Delta x)\right) - \ldots\ldots\ldots\ldots}{\Delta x}$$

Truc *: on amplifie l'expression* par $h(x + \Delta x) - h(x)$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(h(x + \Delta x)\right) - \ldots\ldots\ldots\ldots}{\Delta x} \cdot \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(h(x + \Delta x)\right) - \ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\Delta x}$$

On pose grâce à un changement de variable :

$$z = h(x) \implies h(x + \Delta x) = z + \Delta z \iff \Delta z = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'où

$$(g \circ h)'(x) = \underbrace{\lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z + \Delta z) - \ldots\ldots\ldots\ldots}{\Delta z}}_{\ldots\ldots\ldots\ldots} \cdot$$

$$\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - \ldots\ldots\ldots\ldots}{\Delta x}}_{\ldots\ldots\ldots\ldots} \cdot$$

$$= g'(z) \cdot h'(x) = g'\left(h(x)\right) \cdot h'(x)$$

Exercice 4.24: **a)** Démontrer, en appliquant deux fois la *Règle de dérivation du produit*, que si f, g et h sont des fonctions dérivables, alors :

$$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$

b) Montrer qu'en particulier si $f = g = h$ alors :

$$\left([f(x)]^3\right)' = 3[f(x)]^2 \cdot f'(x)$$

4.6 Équation d'une tangente, une formule bien pratique

Exercice 4.25: Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = x^2$ au point d'abscisse $x = 2$.

Théorème: L'équation de la droite tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point $T(x_0\,;\ f(x_0))$ est donnée par :

Une formule plus rapide

$$\boxed{y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$$

Exemple 9: Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = x^2$ au point d'abscisse $x = 2$.

Exercice 4.26: Prouver la formule proposée ci-dessus.

Exercice 4.27: Déterminer les équations des tangentes aux courbes $y = f(x)$:

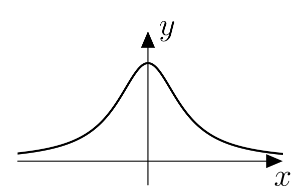
a) $y = 5x^2 - 6x + 2$ au point $P(1\,; f(1))$;

b) $y = \dfrac{3x-2}{5x+1}$ au point $P(0\,; f(0))$;

c) $y = \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$ au point $P(4\,; f(4))$.

Exercice 4.28: La courbe $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ porte le nom de **sorcière de Maria Agnesi**.

Trouver l'équation de la tangente à cette courbe au point P d'abscisse $x = -1$.



5 Croissance et études de fonctions

5.1 Croissance et extremum

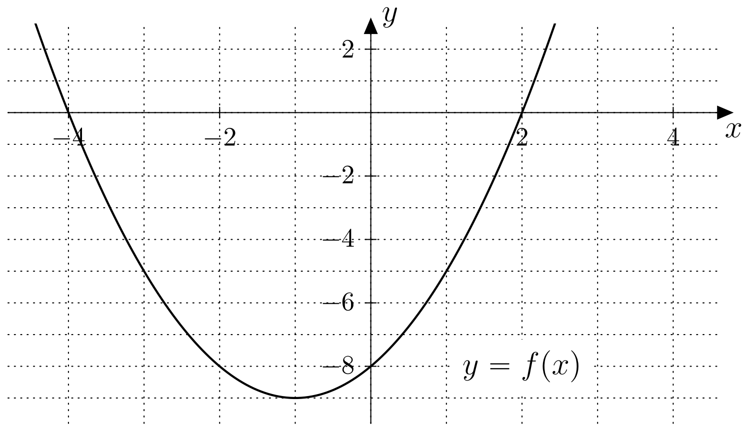
Introduction: La dérivée d'une fonction f en un point A a été définie comme la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point A. Mais au-delà du calcul d'une tangente à une courbe, la dérivée nous fournit directement des informations sur la "forme" de la courbe de f.

Commençons par étudier ceci sur deux exemples d'introduction :

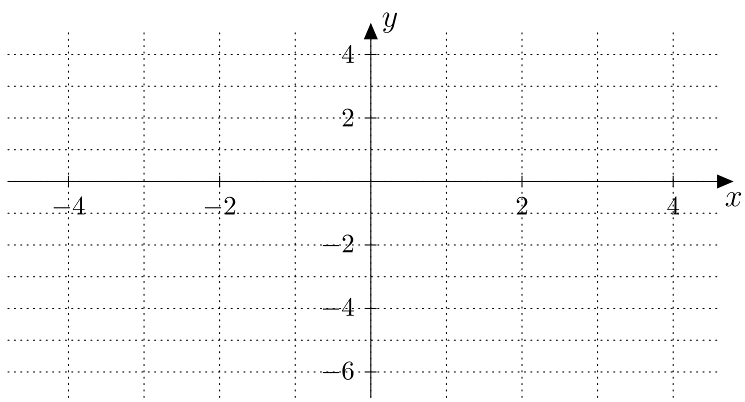
1^er^ exemple : On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2x - 8$.

- En voici sa représentation graphique :

En comparant les 2 graphiques, quelles constatations pouvez-vous faire ?



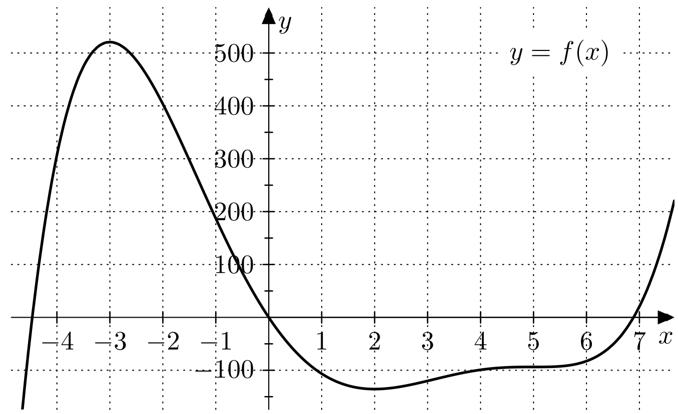
- Déterminer la dérivée $f'(x) =$
- Tracer le graphe de f' ci-dessous :



2e exemple : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{9x^4}{4} + 3x^3 + \frac{85}{2}x^2 - 150x$$

- En voici sa représentation graphique :

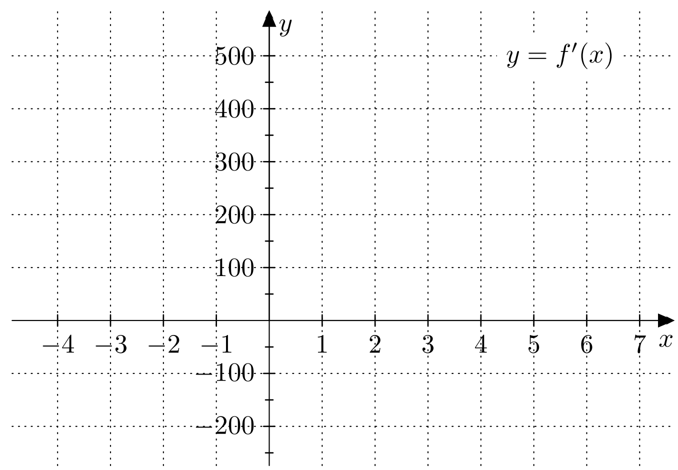


- **Déterminer la dérivée :**

$f'(x) =$

- **Tracer le graphe de f' :**

x	$f'(x)$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	



- Ce 2e exemple confirme-t-il vos constatations précédentes ??

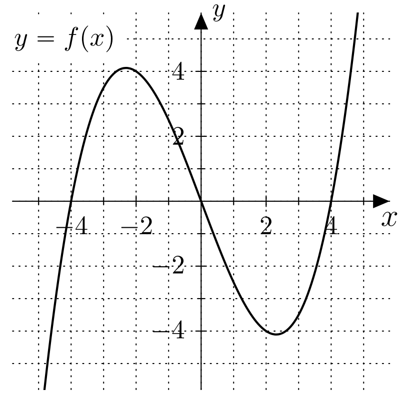
On peut alors compléter l'encadré ci-dessous :

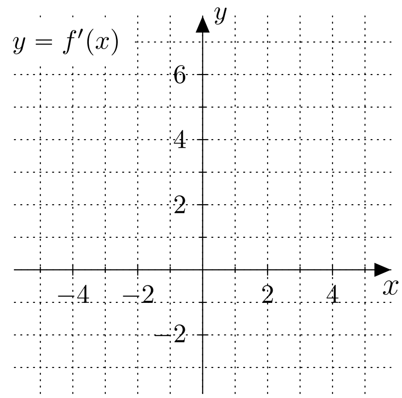
Pour tout a vérifiant :

- $f'(a) < 0$ alors la fonction f est .... car ....
- $f'(a) > 0$ alors la fonction f est .... car ....
- $f'(a) = 0$ alors la fonction f admet ....

  car ....

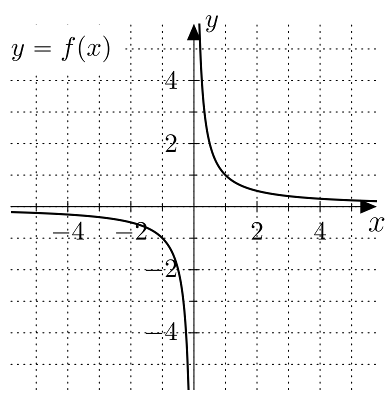
Exercice 5.1: En déterminant graphiquement la pente de la tangente à $y = f(x)$ en différents points, représenter graphiquement le graphe de la fonction f' correspondante.

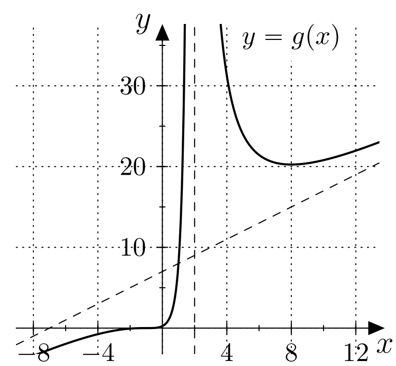


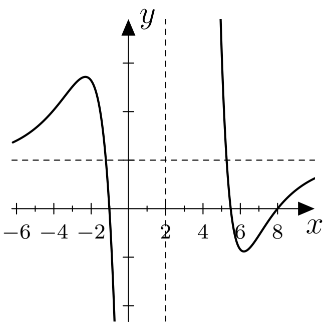


Exercice 5.2: Les 2 premières représentations graphiques représentent le graphe de deux fonctions f et g.

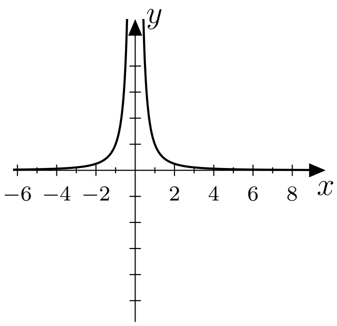
Retrouver parmi les 6 esquisses proposées en dessous la représentation graphique des dérivées correspondantes.



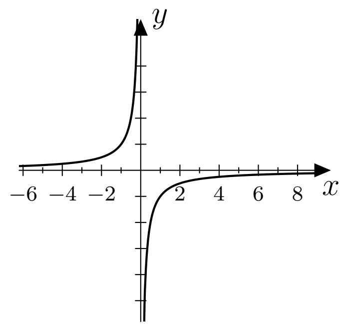




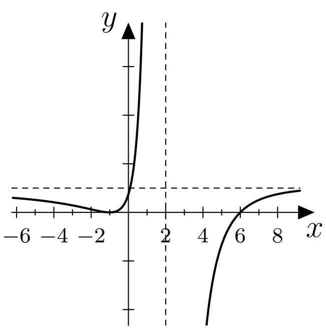
①



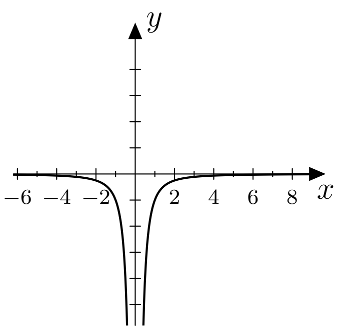
②



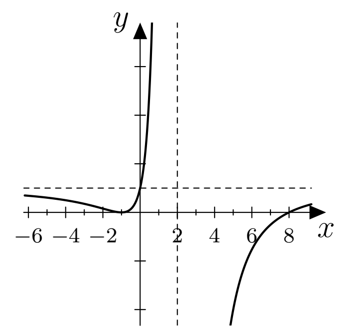
③



④



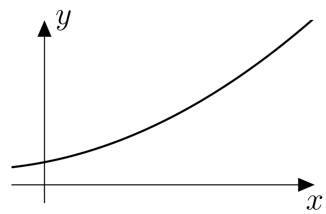
⑤

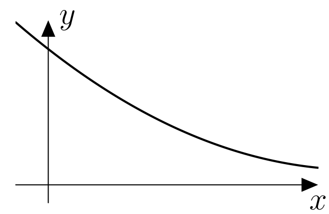


⑥

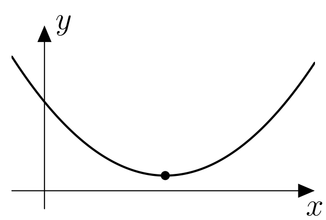
Définitions:

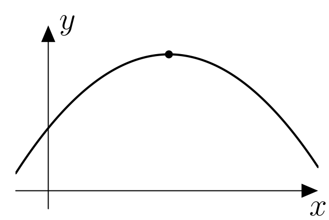
- Une fonction f est dite **croissante** si lorsque x augmente, $f(x)$ aussi.
- Une fonction f est dite **décroissante** si lorsque x augmente, $f(x)$ diminue.



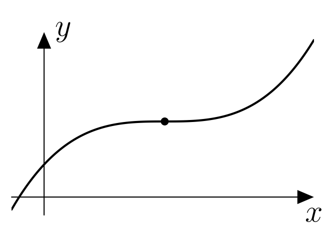


- Une fonction f admet un **maximum** en a si pour toutes valeurs b dans un voisinage de a, $f(a) > f(b)$
- Une fonction f admet un **minimum** en a si pour toutes valeurs b dans un voisinage de a, $f(a) < f(b)$





- Une fonction f admet un **replat** (ou un palier) en a si $f'(a) = 0$ mais qu'il ne s'agit ni d'un minimum ou ni maximum.



Remarque:

- Les notions introduites ci-dessus sont **locales** :

  une fonction peut admettre un maximum et prendre en d'autres points des valeurs supérieures.
- De manière générale, un **extremum** est un maximum ou un minimum.

5.2 Étude de la croissance d'une fonction.

Méthode: Le signe de la dérivée permet de savoir pour quelles valeurs de x une fonction f est croissante, décroissante ou admet une tangente de pente nulle.

Ainsi, il suffira d'effectuer le tableau de signes de f' pour obtenir la croissance de f. Un tel tableau de signe s'appelle un **tableau de croissance** ou un **tableau des variations**.

Exemple 1: **Étudier la croissance des 4 fonctions f suivantes :**

a) $f(x) = 3x^2 - 3x + 7$

- <u>Calcul de la dérivée :</u> $f'(x) = 6x - 3$
- <u>Tableau de croissance :</u>

		$1/2$	
$6x-3$	$-$	0	$+$
croissance	$\searrow$	min	$\nearrow$

- <u>2^{e} coordonnée du minimum :</u>
  $f(1/2) = 3 \cdot (1/2)^2 - 3 \cdot (1/2) + 7 = 25/4$ **Min**$(1/2\,;25/4)$

b) $f(x) = (x-2)(x+3)^3$

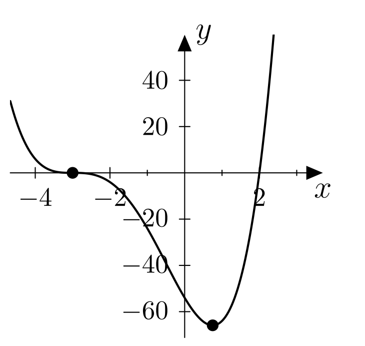
- <u>Calcul de la dérivée :</u>

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1(x+3)^3 + (x-2)\big[3(x+3)^2 \cdot (1)\big] \\ &= (x+3)^3 + 3(x-2)(x+3)^2 \\ &= (x+3)^2\big[(x+3) + 3(x-2)\big] = (x+3)^2(4x-3) \end{aligned}$$

- <u>Tableau de croissance :</u>

		-3		$3/4$	
$(x+3)^2$	$+$	0	$+$		$+$
$4x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
croissance	$\searrow$	replat	$\searrow$	min	$\nearrow$

Voici une esquisse du graphe de f pour se convaincre du résultat obtenu :

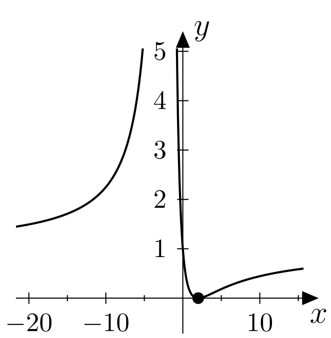


- <u>2^{e} coordonnée du replat et du minimum :</u>
  $f(-3) = (-5) \cdot (0)^3 = 0$ **Replat**$(-3\,;0)$
  $f(3/4) = (3/4 - 2) \cdot (3/4 + 3)^3 \cong -65{,}92$
  Min$(0{,}75\,;-65{,}92)$

c) $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-3}$

d) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x+2)^2}$

Voici une esquisse du graphe de f pour se convaincre du résultat obtenu :



Exercice 5.3: Étudier la croissance des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 5$

c) $f(x) = (x+2)^3(x-3)^2$

d) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$

e) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

5.3 Plan d'étude d'une fonction

Plan: Complétons le plan d'étude étudié en 2^{e} année avec les nouvelles notions rencontrées dans les chapitres précédents :

a) Recherche de l'ensemble de définition $\mathrm{E_D}(f)$.

b) Recherche des zéros de la fonction puis étude du signe de la fonction f.

c) Calcul des limites aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche des asymptotes éventuelles (AV, AH, AO) **avec** la position de la courbe relativement à ses asymptotes.

d) Calcul de la dérivée.

e) Tableau de croissance (tableau des variations).

f) Calculs de points particuliers (min, max, ord. à l'origine).

g) Tracé de la courbe représentative de f (format A4).

Conseil: *L'étude d'une fonction forme un tout. Soyez particulièrement attentifs à la cohérence des résultats des différentes parties de cette étude.*

Si vous constatez une incohérence que vous n'expliquez pas, mentionnez-le en précisant le type d'incohérence et l'endroit probable où se situe l'erreur.

Exemple 2: Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-x^3}{(x-1)^2}$

Exercice 5.4: Étudier selon le plan d'étude les fonctions f suivantes :

a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

b) $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 12x - 15}{x + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 4}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3 + 9x}{x^2 + 1}$

g) $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3}{(2 - x)^2}$

Exercice 5.5: Étudier selon le plan d'étude les fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x - 7}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

Exercice 5.6: Dans chacun des cas suivants, représenter l'esquisse d'une fonction f dont on donne les éléments suivants :

a) $f(0) = 1$ $f(2) = 3$ $f(3) = 1$ $f'(3) = -9/2$

		0		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

b) $f(0) = 2$ $f(-2) = f(2) = 1$

		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$

c) $f(0) = 1$ $f(1) = 3/2$ $f'(1) = 3/4$
$f(-3) = -7/2$ $f'(-3) = 3/4$ $x = -1$ est une asymptote

		-2		-1		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$

d) AH en $y = 0$ Extremums en $(-1\,;-1)$ et $(1\,;1)$

		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

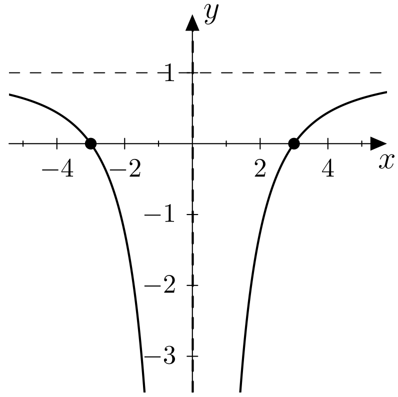
e) $x = 0$, $x = 4$ et $y = 1$ sont des asymptotes,
$f(3) = -4$ et $f(6) = -1/4$

		0		4		5		9	
$f(x)$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$

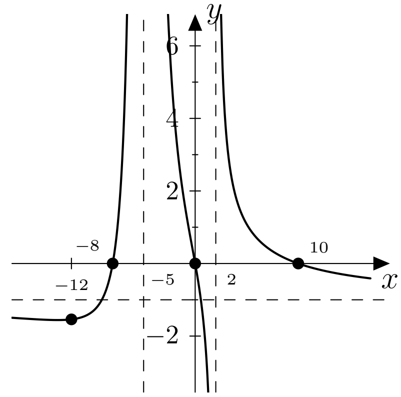
		0		3		4		6	
$f'(x)$	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$

Exercice 5.7: On donne le graphe d'une fonction f. Déterminer :

- l'$\mathrm{E_D}(f)$, les zéros de f et le tableau de signes de f,
- l'équation de toutes les asymptotes,
- le tableau de croissance ainsi que les coordonnées approximatives des extrema

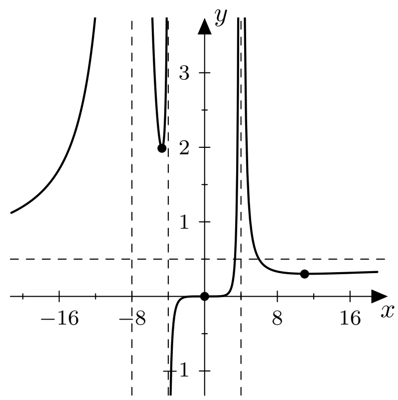


a)

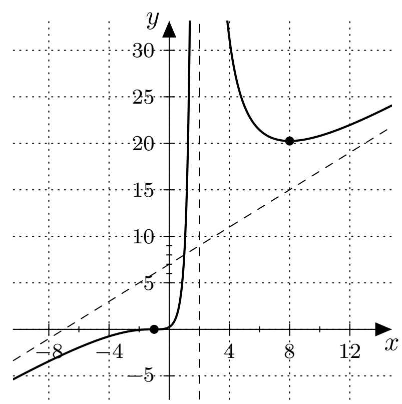


b)

Exercice 5.8: Même consigne que l'exercice précédent :



a)



b)

5 Croissance et étude de fonctions (renf)

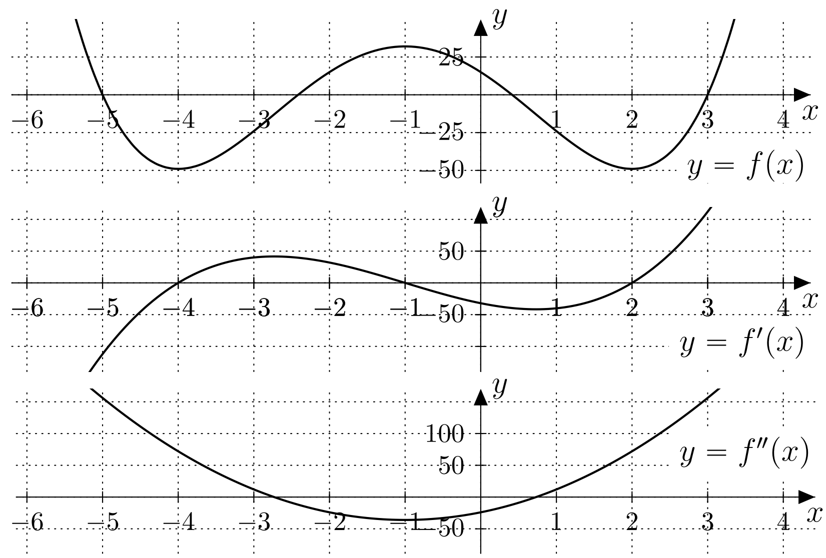
Exercice 5.9: On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32x + 15$$

a) Déterminer $f'(x)$ ainsi que ses zéros.

b) Déterminer $f''(x) = (f'(x))'$ ainsi que ses zéros.

Voici la représentation graphique de ces 3 fonctions



La suite de l'exercice consistera à comparer les 3 courbes pour déduire le lien entre le graphe de f et sa dérivée seconde f''

c) Recopier puis compléter les phrases suivantes (en justifiant)

- $f''(x) > 0$ mais diminue pour $x \in]-5{,}2\,; -2{,}73[$ alors
  $f'(x)$ ....
  $f(x)$ ....
- $f''(x) < 0$ diminue puis augmente pour $x \in]-2{,}73\,; 0{,}73[$ alors
  $f'(x)$ ....
  $f(x)$ ....
- $f''(x) > 0$ mais augmente pour $x \in]0{,}73\,; 3{,}2[$ alors
  $f'(x)$ ....
  $f(x)$ ....
- $f''(x) = 0$ alors $f'(x)$ ....
  $f(x)$ ....

5.4 La deuxième dérivée

Interpétons f'': Voyons comment le signe de f'' se marque dans le graphique de f. Comme $f'' = (f')'$, nous savons que quand f'' est strictement positive, alors f' croît. Cela se traduit encore par le fait que de la gauche vers la droite les pentes des tangentes à la courbe $y = f(x)$ sont de plus en plus fortes. C'est le cas, par exemple, du graphique de la figure 1. La pente des tangentes à cette courbe devient progressivement de plus en plus grande à mesure que x augmente et nous observons que, par voie de conséquence, le tracé s'incurve vers le haut. Une telle courbe est dite **convexe**. À la figure 2 par contre, f'' est strictement négative, ce qui veut dire que f' est strictement décroissante. Dès lors, la pente des tangentes de f diminue de gauche à droite et le tracé s'incurve vers le bas. Cette courbe est dite **concave**.

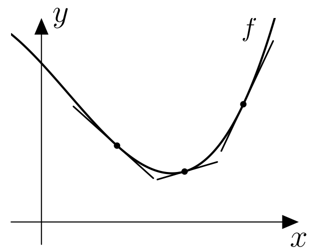


Figure 1 :

si $f''(x) > 0$, la pente des tgtes augmente et f est convexe

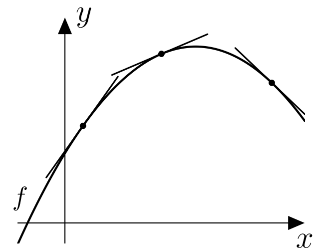
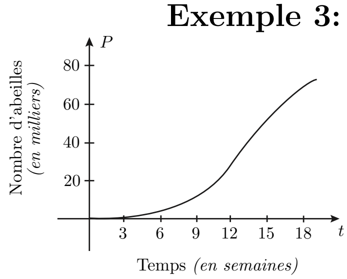


Figure 2 :

si $f''(x) < 0$, la pente des tgtes diminue et f est concave

Exemple 3: La figure ci-contre montre graphiquement l'évolution d'une population d'abeilles dans un rucher.



a) Comment le taux d'accroissement de cette population change-t-il dans le temps ?

b) À quel moment ce taux est-il le plus fort ?

c) Sur quels intervalles cette courbe est-elle convexe ou concave ?

Réponses: **a)** et **b)** *En observant la pente des tangentes à la courbe pendant que t augmente, nous voyons que le taux de croissance de la population est d'abord très faible, qu'il grandit ensuite jusqu'à atteindre un maximum aux environs de t = 12 semaines, et enfin qu'il décroît de sorte que la population tend à se stabiliser. Au moment où la population approche son maximum d'à peu près 75'000, le taux d'accroissement P'(t), tend vers 0.*

c) *La courbe est convexe sur* $]0\,;12[$ *et concave sur* $]12\,;18[$.

Dans cet exemple, la courbe est d'abord convexe puis est devenue concave à partir du point $(12\,; 28'000)$.
Un tel point s'appelle un **point d'inflexion** de la courbe. Il s'obtiendra comme le <u>zéro de la deuxième dérivée</u> et le signe de f'' doit changer en ce point.

Exercice 5.10: Esquisser le graphe d'une fonction dont la première et la deuxième dérivée sont négatives.

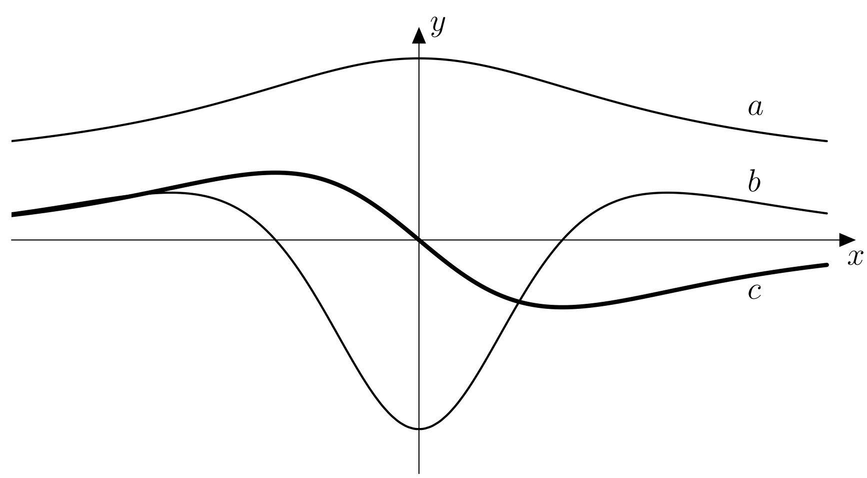
Exercice 5.11: Esquisser le graphe d'une fonction dont la première dérivée est toujours négative et la deuxième dérivée toujours positive.

Exercice 5.12: Un chef d'État annonce que la dette publique augmente, mais de moins en moins vite. Interpréter cette annonce en termes de fonction et de ses dérivées.

Exercice 5.13: La table suivante donne les densités de faisans dorés (nombre de faisans par km^2) sur une île du Pacifique. Situer chaque point d'inflexion. Quelle est leur signification ?

t	1935	1950	1960	1970	1980	1990	2000
$P(t)$	0,1	0,6	2,5	4,6	4,8	3,5	3,0

Exercice 5.14: La figure montre le graphique de f, f' et f''. Identifier chaque courbe et justifier votre choix.



Exercice 5.15: On considère la courbe d'équation $y = x^4$.

a) Déterminer les coordonnées de ses éventuels points d'inflexion.

b) Proposer une esquisse de cette courbe.

Exercice 5.16: L'affirmation suivante est en toute généralité fausse. Justifiez pourquoi et proposez une correction.

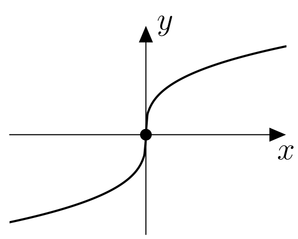
Soit une fonction f telle que $f''(a) = 0$ alors la fonction admet un point d'inflexion en $x = a$.

Concave, convexe ?: Un bon moyen *mnémotechnique* pour identifier si une courbe est convexe ou concave consiste à se souvenir de ces figures :

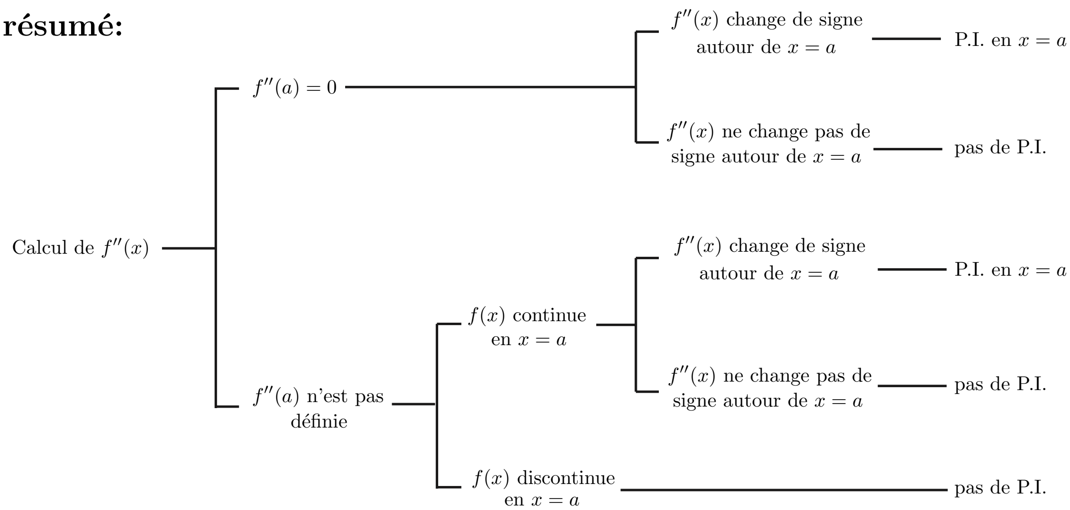
Exercice 5.17: Déterminer l'ensemble sur lequel la courbe $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 6$ est concave. Déterminer également les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

Exemple 4: Déterminer l'ensemble sur lequel la courbe $y = \sqrt[3]{x}$ est concave. Déterminer également les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

Constatation: Dans l'exemple précédent, la deuxième dérivée n'est pas définie en $x = 0$ mais change néanmoins de signe.
Comme la fonction elle-même est continue en ce point, le point $O(0\,;0)$ est bien un point d'inflexion comme le montre la petite esquisse ci-contre.



En résumé:

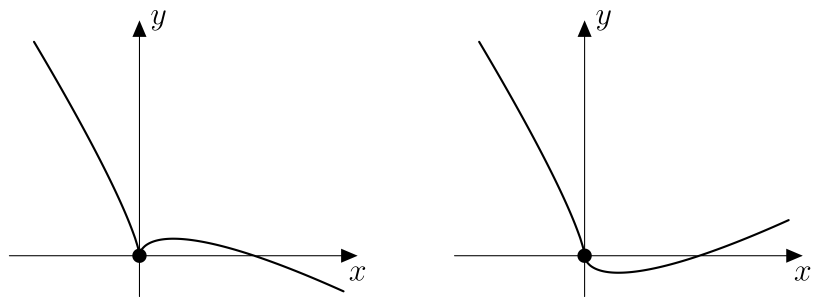


Exercice 5.18:

a) Déterminer l'ensemble sur lequel la courbe $y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - x$ est convexe.

b) Déterminer également les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

c) Lequel de ces graphiques semble correspondre à la situation ?



Exercice 5.19: À l'aide uniquement d'informations obtenues grâce à la 1re et à la 2e dérivée, esquisser la courbe :

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

Exercice 5.20: À propos d'une fonction f, recopier puis compléter en justifiant les affirmations suivantes :

- Soit f tel que $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$ alors $x = a$ est ....
- Soit f tel que $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$ alors $x = a$ est ....
- Soit f tel que $f'(a) = 0$ et $f''(a) = 0$ en changeant de signes en $x = a$ alors $x = a$ est ....

Exercice 5.21: À l'aide de l'exercice précédent et sans aucun tableau de signes, déterminer les minima ou maxima de la fonction f définie par :

$$f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 27$$

Exercice 5.22: Esquisser une représentation graphique possible d'une fonction f qui satisfait aux 3 conditions suivantes :

- $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;1[$ puis $f'(x) < 0$ sur $]1\,;+\infty[$;
- $f''(x) > 0$ sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$; $f''(x) < 0$ sur $]-2\,;2[$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 5.23: Dessiner une courbe représentant la fonction f qui satisfait aux 3 conditions suivantes

- $f'(-1) = f'(1) = 0$; $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$; $f'(x) > 0$ si $|x| > 1$;
- $f(-1) = 4$; $f(1) = 0$;
- $f''(x) < 0$ si $x < 0$; $f''(x) > 0$ si $x > 0$.

Exercice 5.24: **a)** Étudier la fonction f définie par $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

On demande la dérivée seconde afin de compenser le fait que certaines étapes de l'étude ne sont pas immédiates...

b) Étudier la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{(x+2)^2}{4+x^2}$

Avec la dérivée seconde et l'étude de la courbure.

Exercice 5.25: Et ... un petit plus costaud...

Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{|x| + 1}$

Avec la dérivée seconde et l'étude de la courbure.

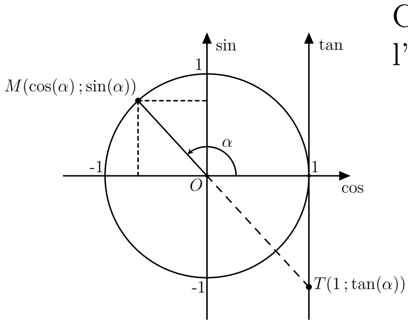
6

Fonctions trigonométriques

6.1 Quelques rappels

Définitions: Les fonctions trigonométriques sont définies à l'aide du cercle trigonométrique :

Considérons le point M du cercle trigonométrique correspondant à l'angle α.



- Le **cosinus** de α, noté $\mathbf{cos(\alpha)}$, est la 1re coordonnée (ou abscisse) de M.
- Le **sinus** de α, noté $\mathbf{sin(\alpha)}$, est la 2e coordonnée (ou ordonnée) de M.
- La **tangente** de α, notée $\mathbf{tan(\alpha)}$, est l'ordonnée de T.

Rel. fondamentales:

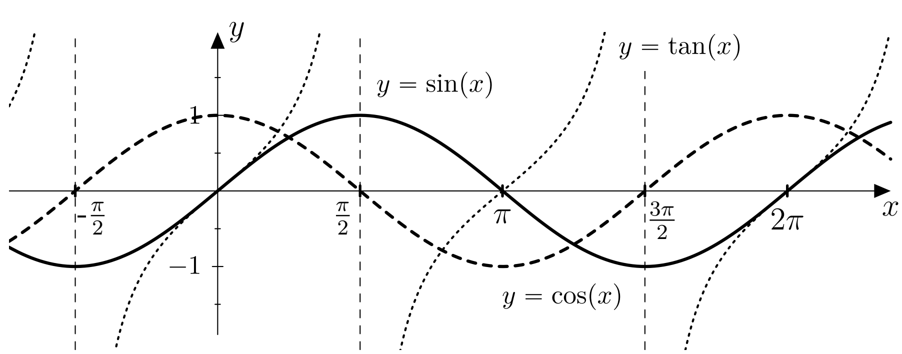
$$\textbf{(I)}\quad \sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$$

$$\textbf{(II)}\quad \tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Valeurs particulières:

$\boldsymbol{\alpha}$ (en degrés)	$\boldsymbol{\alpha}$ (en radians)	$\mathbf{sin}\,(\boldsymbol{\alpha})$	$\mathbf{cos}\,(\boldsymbol{\alpha})$	$\mathbf{tan}\,(\boldsymbol{\alpha})$
$0°$				
$30°$				
$45°$				
$60°$				
$90°$				
$180°$				

Graphe des fct. trigo:



Périodicité:

- La fonction sinus est périodique de période .....

$$\sin(\alpha + \;.....\;) = \sin(\;.....\;)$$

- La fonction cosinus est périodique de période .....

$$\cos(\alpha + \;.....\;) = \cos(\;.....\;)$$

- La fonction tangente est périodique de période .....

$$\tan(\alpha + \;.....\;) = \tan(\;.....\;)$$

Exemple 1: **a)** Esquisser la fonction f définie par $f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ puis préciser sa période et son amplitude.

b) Esquisser la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(x+\pi)$ puis préciser sa période et son amplitude.

Exercice 6.1: Esquisser les fonctions f suivantes en précisant leur période et leur amplitude :

a) $f(x) = -2\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$

b) $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $f(x) = 3\cos\left(\dfrac{x}{2} + \pi\right)$

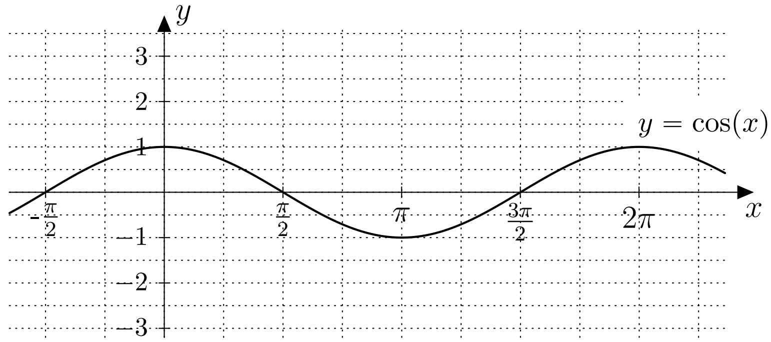
Théorème: Si $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ ou $f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$,

où a, b et c sont des réels non nuls,

Alors :
- l'**amplitude** $\boldsymbol{A}$ vaut : $|a|$
- la **période** $\boldsymbol{T}$ vaut : $\dfrac{2\pi}{|b|}$

Exemple 2: On considère la fonction f définie par $f(x) = -3\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$.

- Déterminer l'amplitude A et la période T de f.
- Compléter ci-dessous son esquisse.

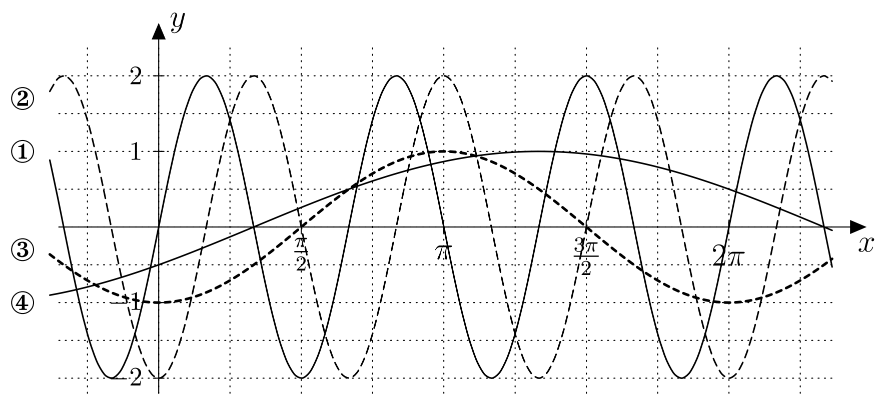


Exercice 6.2: Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa période T et son amplitude A :

a) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $g(x) = 2\cos(3x + \pi)$

c) $h(x) = -\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ **d)** $i(x) = -2\sin(3x - \pi)$

Retrouver sur le graphe ci-dessous les courbes correspondantes à ces 4 fonctions :



6.2 Quelques équations trigonométriques

Introduction: Une équation trigonométrique est une équation contenant des expressions trigonométriques. Il n'existe pas de méthode universelle, mais le cercle trigonométrique sera très souvent votre allié.

Exemple 3: Résoudre $\cos(2x) = -0{,}9$

Exercice 6.3: Résoudre les équations suivantes (en degrés) :

a) $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$ **b)** $\sin(3x) = 0{,}829$

c) $\tan(x) = -0{,}754$ **d)** $\cos(-x) = -1{,}43$

e) $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = 5{,}33$ **f)** $\sin(3x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exemple 4: Résoudre $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 6.4: Résoudre les équations suivantes (en radians) :

a) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ **b)** $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

c) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\tan(2x + \pi) = \sqrt{3}$ **f)** $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = -1$

Exemple 5: Résoudre $\sin^2(x) = 1$

Convention: Afin d'éviter la "surcharge" de parenthèses, on notera :

$$\sin^2(...), \cos^2(...), \tan^2(...)$$

en lieu et place de $\big(\sin(...)\big)^2, \ldots$

Exercice 6.5: Résoudre les équations suivantes (en radians) :

a) $\cos^2(x) = 1$ **b)** $\sin^2(x) = \frac{1}{4}$

c) $\tan^2(x) = 3$ **d)** $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$

e) $\tan^2(x) = 1$ **f)** $\sin^2(x) = \cos^2(x)$

Exemple 6: Résoudre $4\cos^2(x) - 4\cos(x) - 3 = 0$

Exercice 6.6: Résoudre les équations suivantes (en degrés) :

a) $2\sin^2(x) - 5\sin(x) + 2 = 0$

b) $2\cos^2(x) - 3\cos(x) = -1$

c) $\tan^2(x) + 2\tan(x) + 1 = 0$

Exemple 7: Résoudre $3\sin^2(x) + \cos^2(x) - 2 = 0$

Exercice 6.7: Résoudre les équations suivantes (en degrés) :

a) $3\sin^2(x) + \cos^2(x) - 2 = 0$ (*en proposant une autre substitution*)

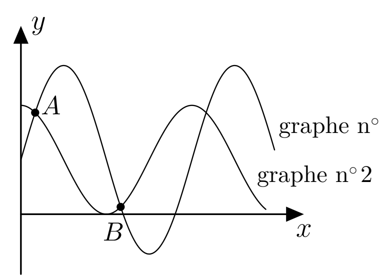
b) $2\cos^2(x) - \sin(x) = 1$

c) $5\sin(x) = 6\cos^2(x)$

Exercice 6.8: On a représenté ci-contre le graphe de deux fonctions f et g définies par :

- $f(x) = \cos(2x) + 1$
- $g(x) = \sqrt{3}\sin(2x) + 1$

sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$



a) Attribuer un graphe à f et l'autre à g. Justifier.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B représentés ci-dessus.

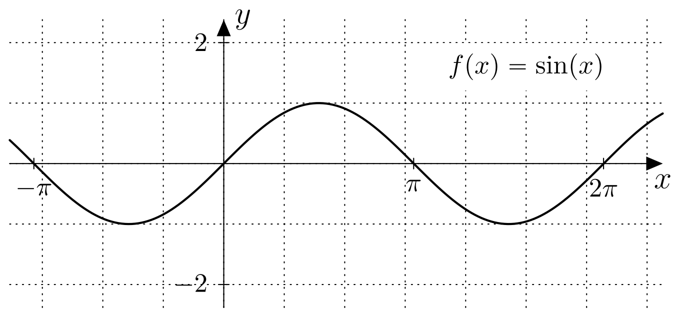
Source : Examen de Maturité, Gymnase de Chamblandes 2018

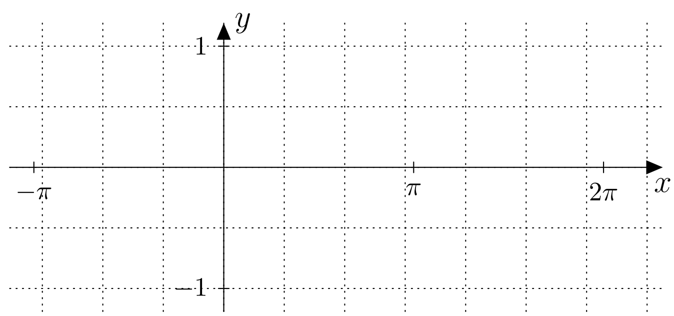
6.3 Dérivée des fonctions trigonométriques

Introduction: À l'image des chapitres précédents, nous pourrions déterminer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \sin(x)$ à l'aide du calcul de limite :

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a}$$

Essayons de trouver cette dérivée en comparant les graphes de f et de la pente de la tangente en plusieurs points.





$f'(x) =$ . . . .

Des démarches analogues permettraient de justifier les règles suivantes :

Les règles de dérivation des fonctions trigo :

8^e^ règle : si $f(x) = \sin(x)$ ➯ $f'(x) = \cos(x)$

9^e^ règle : si $f(x) = \cos(x)$ ➯ $f'(x) = -\sin(x)$

10^e^ règle : si $f(x) = \tan(x)$ ➯ $f'(x) = \tan^2(x) + 1$

ou $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Exercice 6.9: Dériver les fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ **b)** $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$

c) $f(x) = \cos(x) - 2\tan(x)$ **d)** $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x}{\sin(x)+\cos(x)}$

Exercice 6.10: En combinant les règles 8 et 9 du tableau précédent, justifier la 10ᵉ règle (sous ses deux formes).

Exercice 6.11: Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point indiqué :

a) $f(x) = \tan(x)$ au point d'abscisse $x = \pi$.

b) $f(x) = x\cos(x)$ au point d'abscisse $x = \pi$.

Exercice 6.12: En quelles valeurs de $x \in [0\,;2\pi]$, la courbe $y = x + 2\sin(x)$ a-t-elle une tangente horizontale ?

6.4 La dérivée de fonctions composées

Introduction: Nous avons déjà eu l'occasion de dériver quelques fonctions composées codées : $f(x) = (g \circ h)(x)$. Par exemple :

- $f(x) = \sqrt{x-2}$ correspond à $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec

  $g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

- $f(x) = (3x-5)^3$ correspond à $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec

  $g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+4}}$ correspond à $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec

  $g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Lors du calcul de ces 3 dérivées, nous avons vu apparaître ce que nous avons appelé **la dérivée interne**. Ceci se généralise lors du calcul de la dérivée de toutes les fonctions composées.

Les règles de dérivation des fonctions composées :

11e règle : si $f(x) = \sin\big(g(x)\big)$ ➫ $f'(x) = \cos\big(g(x)\big) \cdot \boldsymbol{g'(x)}$

12e règle : si $f(x) = \cos\big(g(x)\big)$ ➫ $f'(x) = -\sin\big(g(x)\big) \cdot \boldsymbol{g'(x)}$

13e règle : si $f(x) = \tan\big(g(x)\big)$ ➫ $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(g(x))} \cdot \boldsymbol{g'(x)} = \dfrac{\boldsymbol{g'(x)}}{\cos^2(g(x))}$

ou $f'(x) = \Big(\tan^2\big(g(x)\big) + 1\Big) \cdot \boldsymbol{g'(x)}$

ou plus généralement pour toutes les fonctions composées :

14e règle : si $f(x) = (g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big)$ ➫ $f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot \boldsymbol{h'(x)}$

Exemple 8: Dériver les 2 fonctions f et g définies par :

a) $f(x) = \sin\big(x^2\big)$ **b)** $g(x) = \sin^2(x)$

Exercice 6.13: Dériver les fonctions f définies par :

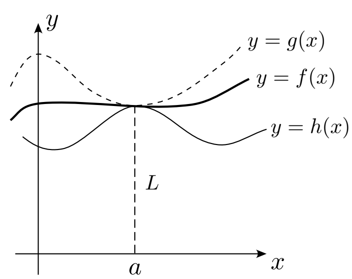
a) $f(x) = \tan(3x)$ **b)** $f(x) = \cos(x^3)$

c) $f(x) = \cos^3(x)$ **d)** $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

6

Fonctions trigonométriques (renf)

Théorème: **Le théorème des deux gendarmes :**



Le théorème suivant implique 3 fonctions f, g et h dont l'une f est "prise en sandwich" entre les deux autres. Si g et h ont la même limite lorsque x tend vers a, alors f doit avoir cette même limite. Ainsi :

- soit l'intervalle $]b\,;c[$ contenant a ;
- soit $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in\,]b\,;c[- \{a\}$.

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = L$$

Preuve: *Nous accepterons ce théorème sans preuve.*

Exercice 6.14: Soit f une fonction telle que pour tout x on ait :

$$x^2 + x - 3 \leqslant f(x) \leqslant 2x^2 - 3x + 1.$$

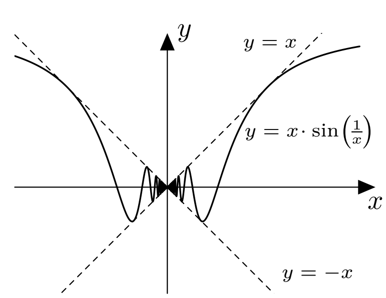
a) Déterminer $\lim_{x\to 2} f(x)$.

b) Qu'en est-il si : $x^2 + x - 3 \leqslant f(x) \leqslant 2x^2 - 3x + 3$?

Remarque: Le théorème des deux gendarmes est un outil très souvent utilisé pour calculer des limites pour des fonctions trigonométriques.

Observons ceci sur un exemple :

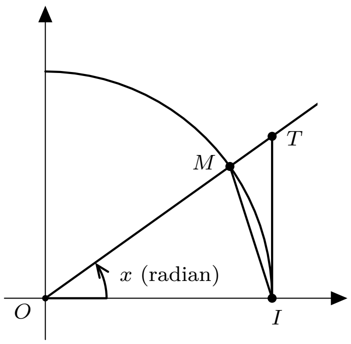
Exemple 9: Montrer que $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.



Exercice 6.15: Calculer $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Indications : $-1 \leqslant \sin(angle) \leqslant 1$, puis constater que la courbe $y = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ est comprise entre deux paraboles.

Exercice 6.16: On considère le quart de cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1.



- En comparant les aires des triangles OIM et OIT avec celle du secteur circulaire OIM, montrer que :
$$\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x) \qquad \text{si } 0 < x < \pi/2.$$
- En déduire que : $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$.
- Puis montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.
- Comment adapter cette preuve pour le calcul de $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin(x)}{x}$?

Exercice 6.17: Que devient le raisonnement précédent si l'angle x est en degré et alors que vaut $\lim\limits_{x\to 0^\circ} \dfrac{\sin(x)}{x}$?

Exercice 6.18: Sachant que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, en déduire les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$

Exercice 6.19: Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(x)}{x \cdot \tan(x)}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$

Exercice 6.20: En amplifiant les fractions par $1 + \cos(x)$, montrer que

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 6.21: Utiliser le théorème des deux gendarmes pour calculer :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{-x} \cdot \sin(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+\cos(x)}{x+1}$

6.5 Les preuves des règles de dérivation des fonctions trigonométriques

8e règle : $f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

9e règle : $f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

10e règle : $f(x) = \tan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
ou $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 6.22: Compléter ci-dessous la règle n° 8 de dérivation

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} = \lim_{x \to a} \frac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$$

Truc *: on utilise la formule de soustraction d'angles (Formulaire page 31)*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right) \cdot \sin\left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \cos\left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right) \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \cos\left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right) \frac{\sin\left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right)}{\left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right)}$$

$$= \lim_{x \to a} \cos\left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right) \cdot \lim_{x \to a} \frac{\sin\left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right)}{\left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right)}$$

$$= \cos\left(\frac{2a}{2}\right) \cdot 1 = \cos(a)$$

En changeant de variable, on obtient bien : $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 6.23: Reprendre cette dernière preuve en utilisant la définition équivalente de dérivée vue dans l'annexe du chapitre 4 :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Exercice 6.24: Démontrer les 9^e et 10^e règles de dérivation.

6.6 Les fonctions trigonométriques réciproques.

Intro à compléter: Nous avons vu dans le chapitre 1 que pour définir la fonction réciproque .... d'une fonction f, il faut que celle-ci soit ...., c'est-à-dire :

- que si $a \neq b$ dans l'ensemble de .... de f, alors :

$$f(a) \ldots\ldots f(b).$$

- tous les éléments de l'ensemble d'arrivée sont atteints.

On peut alors résumer ceci par :

$$y = f(x) \iff x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a les propriétés suivantes :

a) l'ensemble de définition de ${}^rf$ = ...

b) l'ensemble image de ${}^rf$ = ...

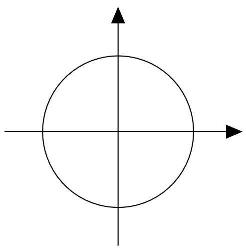
c) $f\big({}^rf(x)\big) = \ldots\ldots$ pour tout $x \in \ldots\ldots\ldots\ldots$

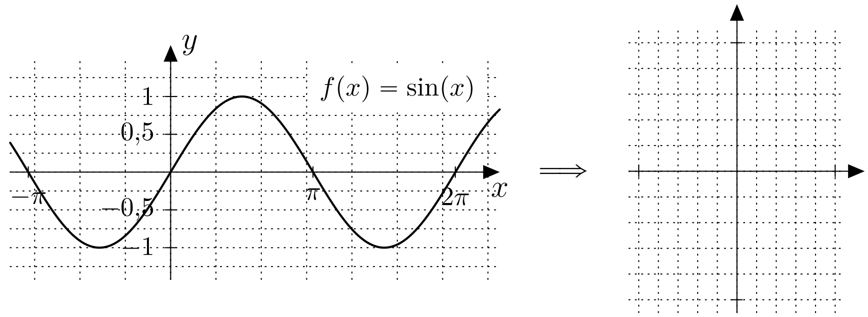
d) ${}^rf\big(f(x)\big) = \ldots\ldots$ pour tout $x \in \ldots\ldots\ldots\ldots$

e) les graphes de ${}^rf$ et f sont .... l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation ....

- La fonction **arcsinus**, notée **arcsin** (ou $\sin^{-1}$), est définie par :

$$\begin{array}{rccc} {}^{r}f : & [\ldots\ldots;\ldots\ldots] & \to & [\ldots\ldots;\ldots\ldots] \\ & x & \mapsto & \arcsin(x) \end{array}$$

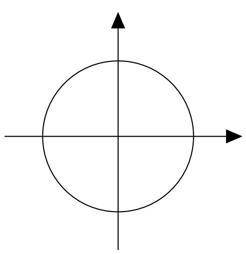


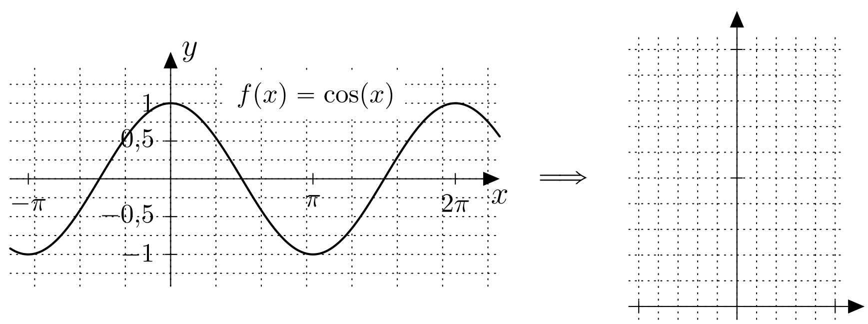


De même, on définit :

- La fonction **arccosinus**, notée **arccos** (ou $\cos^{-1}$), est définie par :

$$\begin{array}{rccc} {}^{r}f : & [\ldots\ldots;\ldots\ldots] & \to & [\ldots\ldots;\ldots\ldots] \\ & x & \mapsto & \arccos(x) \end{array}$$

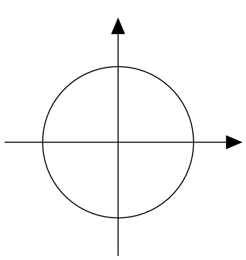


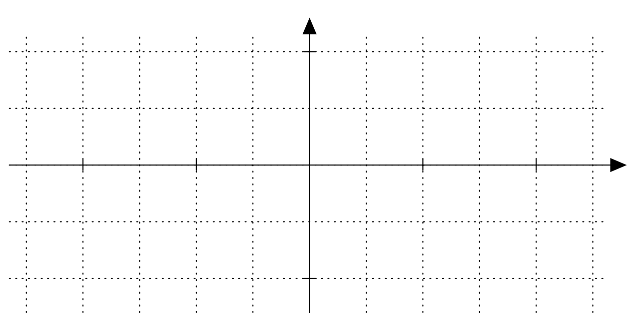


Et pour finir :

- La fonction **arctangente**, notée **arctan** (ou $\tan^{-1}$) :

$$\begin{array}{rccc} {}^{r}f : & \mathbb{R} & \to &]\ldots\ldots;\ldots\ldots[\\ & x & \mapsto & \arctan(x) \end{array}$$





Exemple 10: Déterminer :

a) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ **b)** $\arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

c) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Exercice 6.25: Déterminer sans calculatrice :

a) $\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ **b)** $\arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

c) $\arccos\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right)$ **d)** $\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$

6.7 La dérivée de fonctions réciproques

Exercice 6.26: On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2 + 3$ et le point $P(1\,;f(1))$.

a) Déterminer ${}^rf$.

b) Tracer simultanément le graphe de f, celui de ${}^rf$ ainsi que le point P.

c) Calculer la dérivée de f et celle de ${}^rf$.

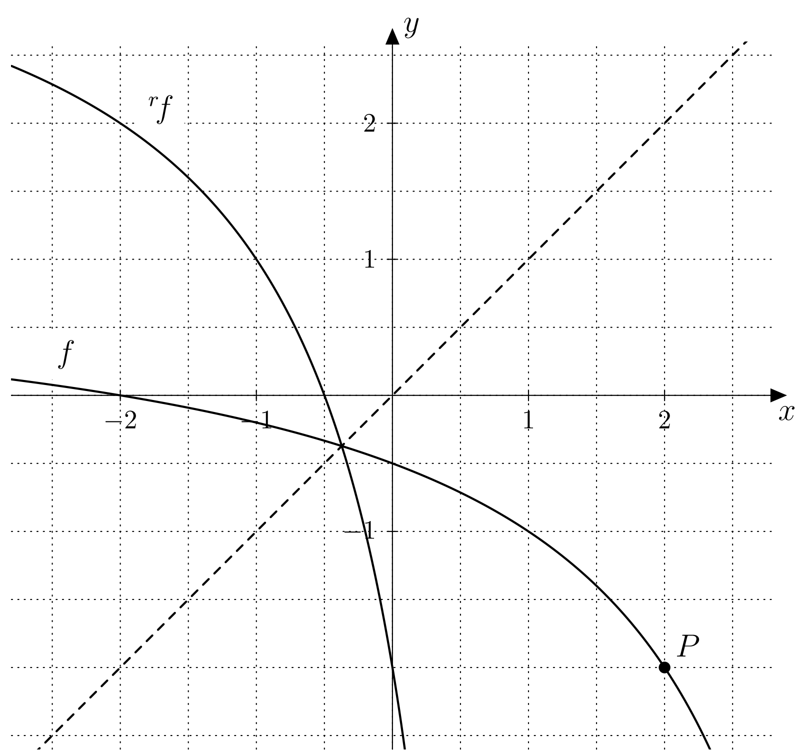
d) Calculer $f'(1)$ et $\left({}^rf\right)'(f(1))$, puis représenter ces valeurs sur le graphique.

e) Que constatez-vous ?

f) Cette constatation reste-t-elle vraie pour la fct f définie par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x-4} \text{ pour } x \in [-2{,}5\,;2{,}5] \text{ et le point } P(2\,;f(2))$$

Dont on propose ci-dessous une représentation graphique :



g) En déduire $\left({}^rf\right)'(0)$.

Théorème: Dérivée d'une fonction réciproque (règle n° 15)

Si f est bijective et dérivable sur un intervalle I et si f' ne s'annule pas sur I alors :

- f possède une fonction inverse ${}^r f$ dérivable en tout point $(f(x)\,;x)$ où $x \in I$.
- $({}^r f)'(x) = \dfrac{1}{f'\big({}^r f(x)\big)}$

Justification:

Exemple 11: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^2$.

Déterminer la dérivée de sa réciproque ${}^r f$

a) À l'aide de la formule ci-dessus.

b) À l'aide du calcul « traditionnel », comparer.

Exercice 6.27: Effectuer la même démarche pour les fonctions f définies par :

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{4}$ et ${}^r f(x) = \sqrt[3]{4x}$

b) $f(x) = mx \quad (m \neq 0)$ et ${}^r f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Les règles de dérivation des fonctions trigo inverses :

16ᵉ règle : si $f(x) = \arcsin(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

17ᵉ règle : si $f(x) = \arccos(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

18ᵉ règle : si $f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Exercice 6.28: Compléter ci-dessous la règle nº 16 de dérivation

Posons $f(x) = \sin(x)$ et ainsi ${}^r f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\left({}^r f\right)'(x) = \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{1}{\cos(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}} = \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Précisons qu'il s'agit de considérer $f : [\ldots\ldots ; \ldots\ldots] \to [\ldots : \ldots]$

Exercice 6.29: Démontrer la 17e règle ci-dessus.

Exercice 6.30: Dériver les fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \arcsin(2x + 1)$ **b)** $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ avec $|x| \geqslant 1$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\arcsin(x)}$

Exercice 6.31:

a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \tan(x)$ au point $P(\pi/4\,;1)$.

b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \arctan(x)$ au point $P'(1\,;\pi/4)$.

Exercice 6.32: Soit la fonction bijective f définie par $f(x) = x^5 + 2x^3 + x - 1$

a) Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Déterminer ${}^{r}f(3)$ et $\left({}^{r}f\right)'(3)$.

A

Bibliographie

Bibliographie

1. CRM, *Analyse (1997)*, Édition du Tricorne

2. Swokowski, *Analyse (1995)*, DeBoeck Université

3. H. Bovet, *Analyse (1999)*, Polymaths ou sur Payot online

   `https://www.payot.ch/Detail/analyse-hubert_bovet-2080002732756`

Site Web

1. Le site companion de ce polycopié : `www.javmath.ch`

   Avec une version pdf de ce polycopié et quelques exercices ou animations supplémentaires.

2. Le site *Nymphomath* de Didier Müller :

   `http://www.nymphomath.ch/MADIMU2/ANALY/INDEX.HTM`

   Support de cours en pdf avec des exercices et leurs solutions

3. Une partie mathématique du site du collège *Sismondi* proposé par Serge Picchione :

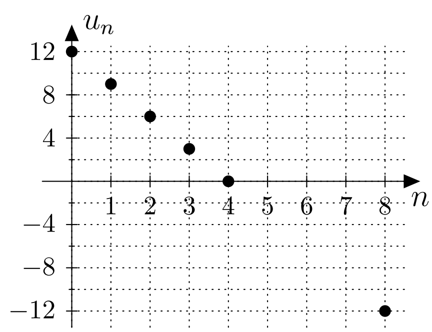
   `https://www.sismondi.ch/disciplines/mathematiques/espace-perso-profs/serge-picchione`

   Support de cours en pdf avec des exercices et leurs solutions

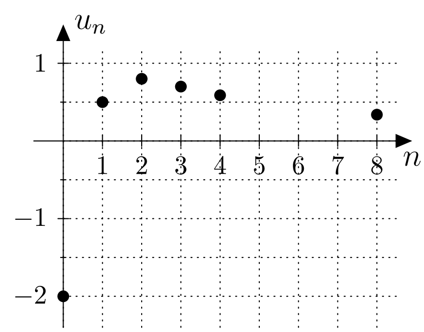
Quelques éléments de solutions

A.0 Suites des nombres réels

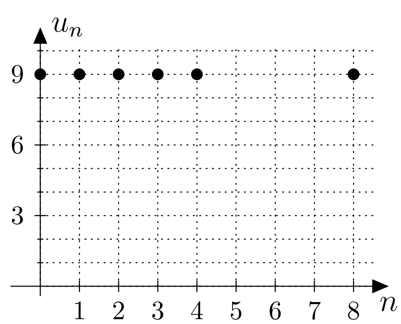
Exercice 0.1: **a)** $12\,;\,9\,;\,6\,;\,3\,;\,0\,;\,\ldots\,;\,$-12



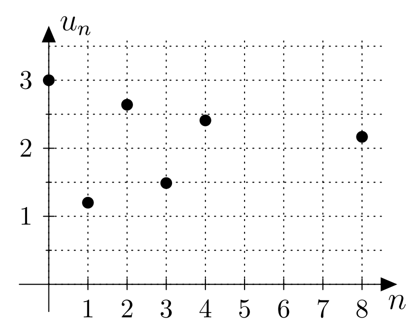
b) $-2\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{4}{5}\,;\,\frac{7}{10}\,;\,\frac{10}{17}\,;\,\ldots\,;\,\frac{22}{65}$



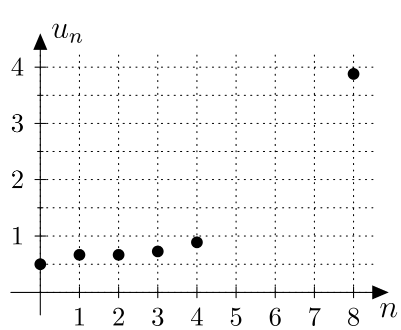
c) $9\,;\,9\,;\,9\,;\,9\,;\,9\,;\,\ldots\,;\,9$



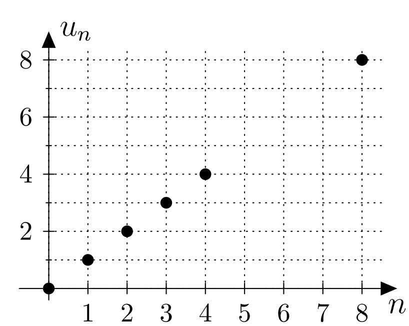
d) $3\,;\,1{,}2\,;\,2{,}64\,;\,1{,}488\,;$
$2{,}4096\,;\,\ldots\,;\,\sim 2{,}168$



e) $\frac{1}{2}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{8}{11}\,;\,\frac{8}{9}\,;\,\ldots\,;\,\frac{128}{33}$

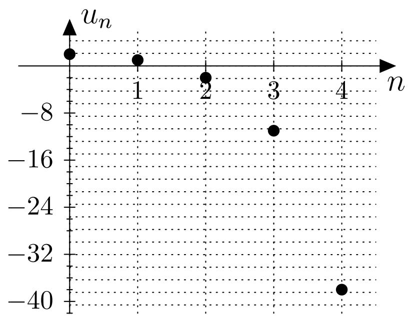


f) $0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,\ldots\,;\,8$

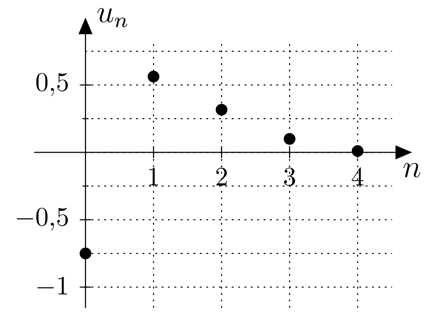


Exercice 0.2:

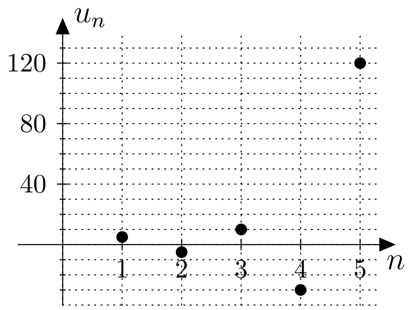
a) $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -2$
$u_3 = -11$, $u_4 = 38$



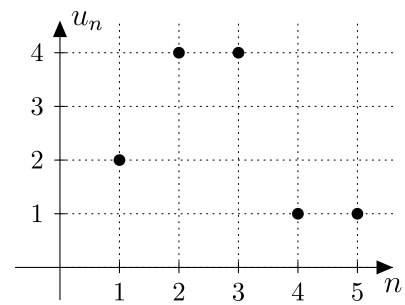
b) $u_0 = -\frac{3}{4}$, $u_1 = \frac{9}{16}$, $u_2 = \frac{81}{256}$
$u_3 = \frac{6561}{65536}$, $u_4 \approx 0{,}010$



c) $u_1 = 5$, $u_2 = -5$, $u_3 = 10$
$u_4 = -30$, $u_5 = 120$



d) $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 4$
$u_4 = 1$, $u_5 = 1$



Exercice 0.3:

a) $u_n = -n - 1$; $u_n = -n$
b) $u_n = 1 + (0{,}1)^{n+1}$; $u_n = 1 + (0{,}1)^n$
c) $u_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$; $u_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1})$
d) $u_n = (-1)^n \cdot (n+1)$; $u_n = (-1)^{n+1} \cdot n$
e) $u_n = 1 - (-0{,}1)^{n+1}$; $u_n = 1 - (-0{,}1)^n$
f) $u_n = -2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n$; $u_n = -2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Exercice 0.4:

- On peut bien sûr imaginer que cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet comme terme général : $u_n = 2^n$, mais si le 6ᵉ terme vaut $u_5 = 31$??

  Je vous laisse y réfléchir dans l'exercice défi qui suit !!

- Même remarque. Il n'est pas certain qu'il s'agisse de $u_n = 3(n+1)$.

Exercice 0.5:

a) $u_0 = 3$; $u_1 = \mathbf{3},142546543$; $u_2 = \mathbf{3{,}14}1592653$,
$u_3 = \mathbf{3{,}14159265}4$; $u_4 = \mathbf{3{,}141592654}$

b) Les termes de la suite convergent (s'approchent) de la valeur 2π.

Exercice 0.6:

a)

$u_1 = 0{,}4$	$u_2 = 0{,}7$	$u_3 = 1$	$u_4 = 1{,}6$
$u_5 = 2{,}8$	$u_6 = 5{,}2$	$u_7 = 10$	$u_8 = 19{,}6$

c) À voir ensemble.

Exercice 0.7: $u_1 = 2{,}5$; $u_2 = \mathbf{2}{,}25$; $u_3 = \mathbf{2{,}2}36111$; $u_4 = \mathbf{2{,}236}068$

On en déduite alors que $\sqrt{5} \approx 2{,}236068$

Exercice 0.8: **a)** $F_4 = 3$; $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_{12} = 144$

b) $\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$

Exercice 0.9: **a)** Croissante. **b)** Ni croissante, ni décroissante.

c) Croissante *et si vous calculiez* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$*, qu'en déduisez-vous ?*

d) Ni croissante, ni décroissante. **e)** Décroissante. *(avec récurrence)*

Exercice 0.10: **a)** Minorée et majorée ; borne inférieure vaut 0, borne supérieure vaut 1.

b) Minorée et majorée ; borne inférieure vaut 0, borne supérieure vaut 3/2.

c) Minorée et non majorée ; borne inférieure vaut 1/2, pas de borne supérieure.

d) Minorée et majorée ; borne inférieure vaut -1, borne supérieure vaut 1.

e) Minorée et majorée ; borne inférieure vaut -1, borne supérieure vaut 3.

Exercice 0.11: **a)** $u_{n+1} - u_n = \frac{25}{(3n+2)(3n+5)} > 0.$

b) Étant strictement croissante, elle est minorée par son premier terme $u_1 = -1$.

c) La valeur -1 est la borne inférieure.

Exercice 0.12: Il s'agit d'abord de montrer que cette suite (u_n) est croissante en vérifiant que $u_{n+1} - u_n > 0$, puis d'en calculer son 1^er^ terme.

Exercice 0.13: **a)** $u_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$$u_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$u_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7} = 2^{\frac{7}{8}}$$

$$u_4 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} = \sqrt[16]{2^{15}} = 2^{\frac{15}{16}}$$

b) $u_n = \sqrt[2^n]{2^{2^n-1}} = 2^{\frac{2^n-1}{2^n}}$, $u_{n+1} = 2^{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2^{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} - \frac{2^n-1}{2^n}} = \ldots = 2^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

c) La fonction $f(t) = 2^t$ avec $t \in \mathbb{Q}$ est la restriction à $\mathbb{Q}$ de la fonction exponentielle $f(x) = 2^x$ avec $x \in \mathbb{R}$ dont on sait qu'elle est strictement croissante. On peut ainsi conclure en rappelant que $f(0) = 1$.

Exercice 0.14: **a)** $s_1 = \frac{1}{2}$; $s_2 = \frac{11}{15}$; $s_3 = \frac{181}{220}$; $s_4 = \frac{12'617}{14'535}$

b) Le plus petit terme de cette somme est le dernier : $\frac{n}{n^2+n}$

c) Le plus grand terme de cette somme est le premier : $\frac{n}{n^2+1}$

d)
$$\begin{aligned} s_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} &\geqslant \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \\ &\geqslant n \cdot \frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} s_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} &\leqslant \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} \\ &\leqslant n \cdot \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1} \end{aligned}$$

Exercice 0.15: $N = 3'333'333'333$

Exercice 0.16: **a)** $N = [\ln(1'000)/\ln(1{,}1)] + 1 = 73.$

b) $N = [\ln(0{,}05)/\ln(0{,}5)] + 1 = 5.$

Exercice 0.17: **a)**

n	1	2	3	4	5
u_n	3,00	3,00	3,67	4,50	5,40

b) Il s'agit de montrer que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

c) La suite semble “converger” vers $+\infty$.

d) $u_n > 10 \iff n^2 - 10n + 2 > 0 \implies n_0 = [5 + \sqrt{23}] + 1 = 10.$

e) $u_n > A \implies N = \left[\frac{A+\sqrt{A^2-8}}{2}\right] + 1.$

Exercice 0.18: Il s'agit donc de montrer pour tout réel positif A, il existe un entier N (que l'on va exhiber) tel que pour tout entier n supérieur ou égal à N, on a $u_n > A$. Il s'agira de $N = \left[\frac{\sqrt{3(4A+5)}}{3}\right] + 1.$

Exercice 0.19:
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall A \in \mathbb{R}_-, \exists\, N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \geqslant N \implies u_n < A$$

Exercice 0.20: **a)** Un petit tableau de signes de l'expression $u_{n+1} - u_n$ permet de s'en convaincre.

b) $N = 999.$

c) $N = \left[\frac{-A+\sqrt{A(A+4)}}{2}\right] + 1.$

Exercice 0.21: **a)** Elle semble tendre vers $A = 1$.

b) $N = 3.$

c) $N = 6.$

Exercice 0.22: **a)** Elle semble tendre vers $A = -1$.

(par exemple : $u_{100} = -0{,}97, u_{1'000} = -0{,}997$).

b) $N = 31.$

c) $N = [3/\varepsilon] + 1.$

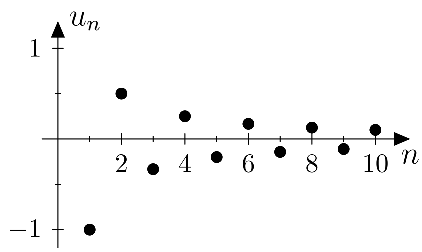
Exercice 0.23: **a)** $u_1 \approx 0{,}22$, $u_{10} \approx 0{,}64$, $u_{1'000} \approx 0{,}749$, $u_{10'000} \approx 0{,}750$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{4}$ probablement.

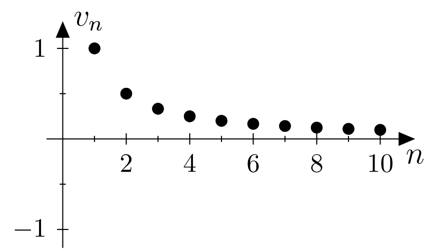
b) Il s'agira de considérer $N = \left[\frac{19-20\cdot\varepsilon}{16\cdot\varepsilon}\right] + 1$.

Exercice 0.24: Cette preuve sera vue ensemble.

Exercice 0.25: Cette suite converge vers 0.



(u_n)



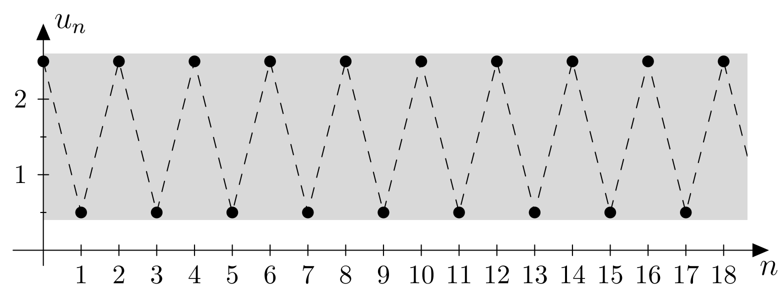
(v_n)

Question : Seriez-vous tenté d'affirmer que si la suite $(|u_n|)$ converge vers 0, alors la suite (u_n) aussi ?

Exercice 0.26: Cette suite ne converge pas.

Exercice 0.27: Le corrigé de cet exercice sera vu ensemble.

Exercice 0.28: **a)**



b) Il s'agit d'un exemple de suite bornée non convergente.

c) Non :

convergente $\Longrightarrow$ **bornée mais bornée** $\not\Longrightarrow$ **convergente**

Exercice 0.29: **a)** Une bonne figure d'étude permet de déterminer la valeur de N tel que ...

b) Comme u_n est bornée, $|u_n| \leqslant B$, il ne restera plus qu'à exhiber la valeur de N tel que ...

c) Tout est dit dans l'indication... non ?

Exercice 0.30: Il suffit donc de trouver un contre-exemple à cette proposition.

Exercice 0.31:

a) La suite (u_n) converge, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

b) La suite (u_n) “converge” vers $-\infty$, $\lim_{n\to+\infty} u_n - \infty$.

c) La suite (u_n) converge, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

d)
- Si $k > 0$, la suite (u_n) “converge” vers $+\infty$, $\lim_{n\to+\infty} u_n + \infty$.
- Si $k = 0$, la suite (u_n) converge, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Si $k < 0$, la suite (u_n) converge, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

e) La suite (u_n) diverge.

f) La suite (u_n) diverge.

g) La suite (u_n) converge, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

h) La suite (u_n) converge, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 0.32:

a) Terme général : $u_n = \frac{2n+5}{10n+1}$ pour $n \geqslant 1$, elle converge vers $1/5$.

b) Terme général : $u_n = \frac{n^2}{2n-1}$ pour $n \geqslant 1$, elle “converge” vers $+\infty$.

c) Terme général : $u_n = (-1)^n \left(\frac{5}{6}\right)^n$ pour $n \geqslant 1$, elle converge vers 0.

Exercice 0.33:

a) Conjecture : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$.

b) Dans le développement du calcul, n’oubliez pas que :

$$\sqrt{n^2 + 6n} = |n| \cdot \sqrt{1 + \frac{6}{n}}$$

Vous obtiendrez alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{6}{\sqrt{1 + 6/n} + 1} = \frac{6}{2} = 3$.

Exercice 0.34: Un corrigé peut être vu à votre demande.

Exercice 0.35: Un corrigé peut être vu à votre demande.

Exercice 0.36:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 0$

1.1 Généralités sur les fonctions

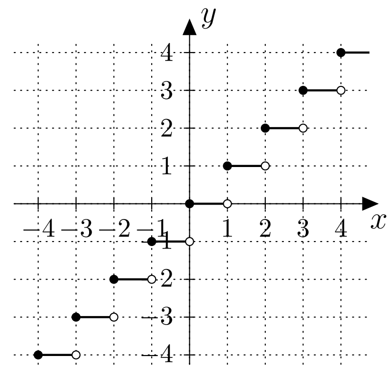
Exercice 1.1:

a) Non, car pour certaines valeurs de x correspondent deux valeurs $f(x)$.

b) Oui.

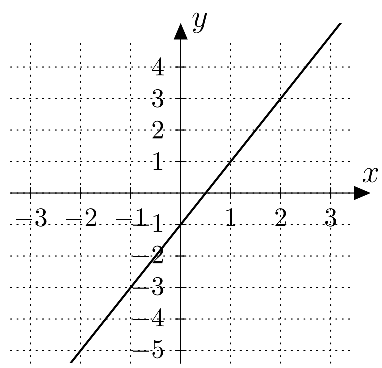
c) Le graphique est ambigu, on ne sait pas si à tout nombre entier ne correspond qu'une et une seule valeurs ; par exemple $f(2) = 2$, ou $f(2) = 1$ ou les deux valeurs simultanément.

On remplacera ce graphique plutôt par celui ci-contre qui correspond alors bien à celui d'une fonction.

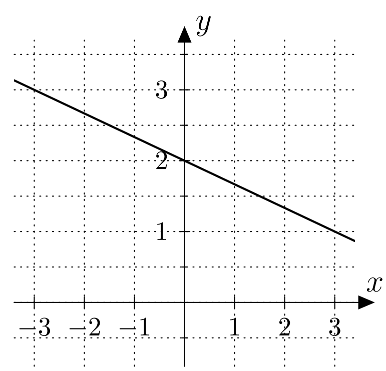


d) Non.

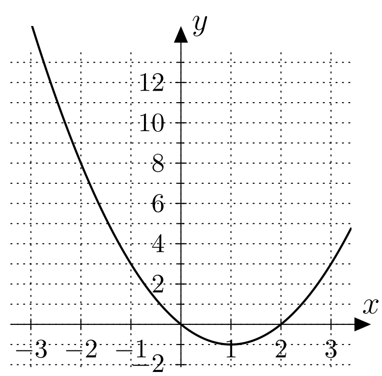
Exercice 1.2:



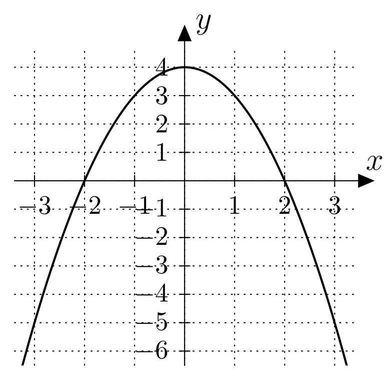
a)



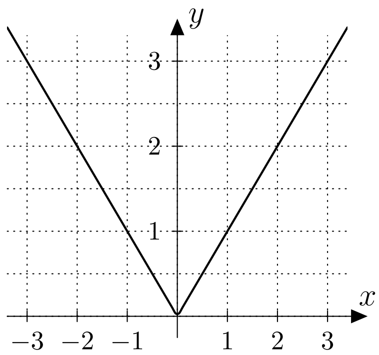
b)



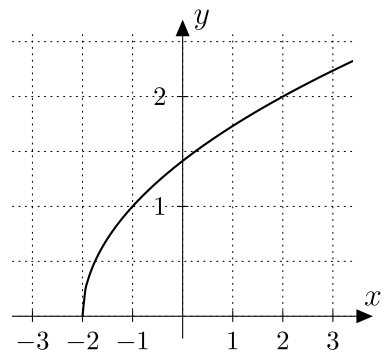
c)



d)



e)



f)

Exercice 1.3: Pas de corrigé.

Exercice 1.4: **a)** $x_1 = -7/2$; $x_2 = 1$ (*il s'agit de **résoudre** l'équation* $f(x) = 0$)

b) $y = -7$ (*il s'agit de **calculer*** $f(0)$)

Exercice 1.5: **a)** $f(0) = -5$ et $f(-3) = 19$

b) ${}^{r}f(5) = \{5/3\,;-2\}$ et ${}^{r}f(-6)$ n'existe pas.

Exercice 1.6: **c)** $f(\{-1\,;0\,;2\}) = \{0\,;2\,;6\}$ ${}^{r}f(\{-6\,;0\,;4\}) = \left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2}\,;1\,;2\,;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$

$f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{4};+\infty\right[$ $f([3\,;6[) = [2\,;20[$

$f([1\,;2]) = \left[-\frac{1}{4}\,;0\right]$ ${}^{r}f([-3\,;-2]) = \varnothing$

${}^{r}f([1\,;2]) = \left[0\,;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \bigcup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;3\right]$

${}^{r}f([2\,;4[) = \left]\frac{3-\sqrt{17}}{2}\,;0\right] \bigcup \left[3\,;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right[$

Exercice 1.7: **a)** $\mathrm{Im}(f) =]-\infty\,;6]$ **b)** $\mathrm{Im}(f) = [5\,;+\infty[$

Exercice 1.8: **a)** $f(4) = 1$ **b)** $f(3)$ n'est pas définie **c)** $4f(x) = \dfrac{4}{x-3}$

d) $f(4x) = \dfrac{1}{4x-3}$ **e)** $f(x+4) = \dfrac{1}{x+1}$ **f)** $f(4) + f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$

g) $f(-x) = -\dfrac{1}{x+3}$ **h)** $-f(x) = \dfrac{1}{3-x}$

Exercice 1.9:

a) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ **b)** $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$

c) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ **d)** $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 3\sqrt{2}\}$

e) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}^* - \{-1\}$ **f)** $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-2/3\,;7\}$

g) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ **h)** $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-2 \pm \sqrt{22}\}$

Exercice 1.10:

a) $\mathrm{E_D}(f) = \left]-\infty\,;2\right]$ **b)** $\mathrm{E_D}(f) = [-3\,;3]$

c) $\mathrm{E_D}(f) = [1\,;+\infty[$ **d)** $\mathrm{E_D}(f) = \left]-\infty\,;-5\right] \cup [1\,;+\infty[$

e) $\mathrm{E_D}(f) = \left]5\,;+\infty\right[$ **f)** $\mathrm{E_D}(f) = \left]-\infty\,;3\right] \cup \left]5\,;+\infty\right[$

Exercice 1.11:

	$\mathrm{E_D}$	Zéro(s)	Tableau de signes
a)	$\mathbb{R}$	$x = \dfrac{4}{5}$	$\begin{array}{c\|ccc} & & 4/5 & \\ \hline f(x) & + & 0 & - \end{array}$
b)	$\mathbb{R}$	$x = -1$ et $x = 2$	$\begin{array}{c\|ccccc} & & -1 & & 2 & \\ \hline f(x) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$
c)	$\mathbb{R}$	$x = -4$ et $x = -2$	$\begin{array}{c\|ccccc} & & -4 & & -2 & \\ \hline f(x) & - & 0 & - & 0 & + \end{array}$
d)	$\mathbb{R}$	$x = 0, \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{3}{2}$	$\begin{array}{c\|ccccccc} & & 0 & & 1/3 & & 3/2 & \\ \hline f(x) & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$
e)	$\mathbb{R}$	$x = \pm 2$	$\begin{array}{c\|ccccc} & & -2 & & 2 & \\ \hline f(x) & - & 0 & - & 0 & + \end{array}$
f)	$\mathbb{R}$	$x = \pm 2$	$\begin{array}{c\|ccccc} & & -2 & & 2 & \\ \hline f(x) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$
g)	$\mathbb{R} - \{3/2\}$	$x = -4$ et $x = 0$	$\begin{array}{c\|ccccccc} & & -4 & & 0 & & 3/2 & \\ \hline f(x) & + & 0 & - & 0 & + & \| & - \end{array}$
h)	$\mathbb{R} - \{\pm 4\}$	$x = 0$	$\begin{array}{c\|ccccccc} & & -4 & & 0 & & 4 & \\ \hline f(x) & + & \| & - & 0 & + & \| & - \end{array}$
i)	$\mathbb{R} - \{-1\,;0\}$	$x = -2$	$\begin{array}{c\|ccccccc} & & -2 & & -1 & & 0 & \\ \hline f(x) & - & 0 & - & \|0\| & - & \| & + \end{array}$
j)	$\mathbb{R}^*$	$x = \pm 1$	$\begin{array}{c\|ccccccc} & & -1 & & 0 & & 1 & \\ \hline f(x) & - & 0 & + & \| & - & 0 & + \end{array}$
k)	$\mathbb{R} - \{-1\,;0\}$	$x = -\dfrac{1}{4}$	$\begin{array}{c\|ccccccc} & & -1 & & -1/4 & & 0 & \\ \hline f(x) & - & \| & + & 0 & - & \| & + \end{array}$

Exercice 1.12: **b)** La réunion des 2 graphes des fonctions correspond au cercle d'équation : $x^2 + y^2 = 9^2$.

Exercice 1.13: **a)** $f(x) = 2x^2 - 3x - 3$ **b)** $f(x) = -x^2 + 2x - 3$
c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

Exercice 1.14: **a)** Le canon se situe à 10 km de Lausanne.
b) La cible se situe à 55 km de Lausanne.
c) La flèche se situe à une altitude de 1012,5 m.
d) La cible se situe à 15 km ou à 50 km de Lausanne.

Exercice 1.15: **a)** $f(x) = 3x^2 - 4x - 1$ **c)** $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

Exercice 1.16: **a)** $f(6-k) = f(6+k) = k^2 - 32$
b) Axe de symétrie : $x = 6$ *(il s'agit bien d'une droite verticale)*

Exercice 1.17: **a)** $f\left(-\dfrac{b}{2a} - k\right) = f\left(-\dfrac{b}{2a} + k\right) = \dfrac{4a^2k^2 + 4ac - b^2}{4a}$
b) Axe de symétrie : $x = -\frac{b}{2a}$ *(il s'agit bien d'une droite verticale)*

Exercice 1.18: **a)** Pas de zéro ; $S\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{4}\right)$.
b) Zéros en $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$; $S\left(\dfrac{5}{4}\,;-\dfrac{9}{8}\right)$.
c) Zéros en $x = 2$ et $x = 5$; $S\left(\dfrac{7}{2}\,;\dfrac{9}{4}\right)$.
d) Zéros en $x = 0$ et $x = 9$; $S\left(\dfrac{9}{2}\,;-\dfrac{81}{4}\right)$.

Exercice 1.19: Un corrigé peut être vu ensemble à votre demande.

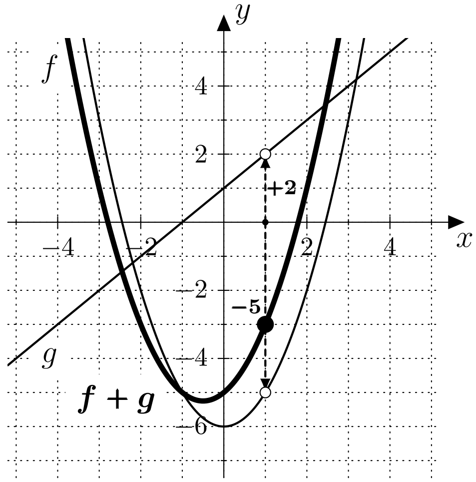
Exercice 1.20: **a)**
- $(f+g)(x) = \dfrac{3x^2 + 6x + 1}{x+2}$
- $(f-g)(x) = \dfrac{3x^2 + 6x - 1}{x+2}$
- $(f \cdot g)(x) = \dfrac{3x}{x+2}$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = 3x(x+2)$

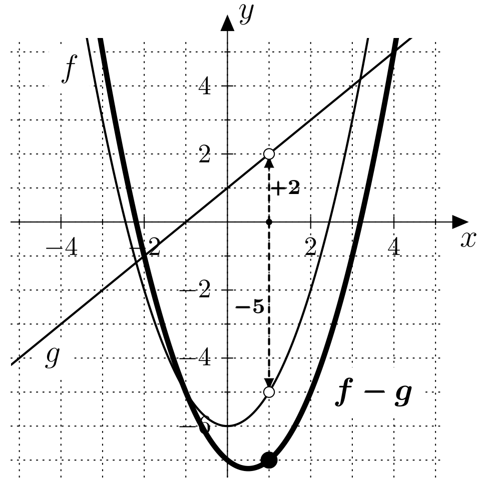
$\mathrm{E_D} = \mathbb{R} - \{-2\}$ dans chacun des cas.

b)
- $(f+g)(x) = \dfrac{3x^2 + 6x}{(x-4)(x+5)}$
- $(f-g)(x) = \dfrac{x^2 + 14x}{(x-4)(x+5)}$
- $(f \cdot g)(x) = \dfrac{2x^2}{(x-4)(x+5)}$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{2x+10}{x-4}$

$\mathrm{E_D} = \mathbb{R} - \{-5\,;4\}$ pour les 3 premiers cas puis, $\mathrm{E_D} = \mathbb{R}^* - \{-5\,;4\}$.

Exercice 1.21:





$$\begin{aligned}(f+g)(1) &= f(1)+g(1)\\ &= \mathbf{-5}+(\mathbf{+2})\\ &= \mathbf{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f-g)(1) &= f(1)-g(1)\\ &= \mathbf{-5}-(\mathbf{+2})\\ &= \mathbf{-7}\end{aligned}$$

Et de même pour d'autres valeurs de x

Exercice 1.22:

a) On obtient la courbe $y = f(x) + c$ par une translation verticale de c unités vers le haut de la courbe $y = f(x)$.

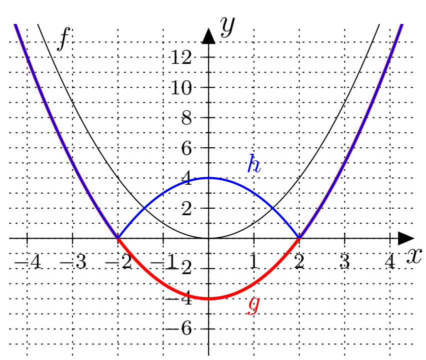
b) On obtient la courbe $y = f(x + c)$ par une translation horizontale de c unités **vers la gauche** de la courbe $y = f(x)$.

c) On obtient la courbe $y = c \cdot f(x)$ par une augmentation (ou diminution) d'un rapport c de l'amplitude de la courbe $y = f(x)$.

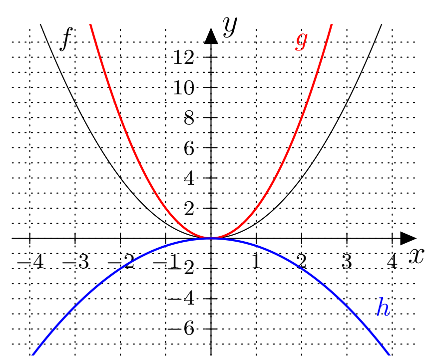
d) On obtient la courbe $y = -f(x)$ par une symétrie axiale de la courbe $y = f(x)$ par rapport à l'axe Ox.

e) On obtient la courbe $y = |f(x)|$ par "un rebond" de la courbe $y = f(x)$ au-dessus de l'axe Ox.

Exercice 1.23:



a)



b)

Exercice 1.24:

a) $f\big(g(x)\big) = 3x - 6$

b) $g\big(f(x)\big) = 3x - 2$

c) $f\big(f(x)\big) = 9x$

d) $f\big(g(h(x))\big) = 6x - 15$

e) $g\big(f(h(x))\big) = 6x - 11$

f) $h\big(g(h(x))\big) = 4x - 13$

Exercice 1.25:

$\circ\nearrow$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_0	f_4	f_5	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_0	f_1	f_5	f_4
f_3	f_3	f_2	f_5	f_4	f_0	f_1
f_4	f_4	f_5	f_1	f_0	f_3	f_2
f_5	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0

Exercice 1.26: **a)** $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = 3x + 1$ **b)** $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h(x) = 2x + 3$

c) $g(x) = x^2$ et $h(x) = x + 3$ **d)** $g(x) = \log(x)$ et $h(x) = x^2 + 4$

e) $g(x) = 3^x$ et $h(x) = 2x$ **f)** $g(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ et $h(x) = \sqrt{x}$

Exercice 1.27: **a)** Oui **b)** Non **c)** Non **d)** Oui

Exercice 1.28:

- ${}^rf_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$
- ${}^rf_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{3} \end{array}$
- ${}^rf_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x-3}{2} \end{array}$
- ${}^rf_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$
- ${}^rf_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$
- ${}^rf_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_- \\ x & \mapsto & -\sqrt{x} \end{array}$
- ${}^rf_7 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}-\{2\} & \to & \mathbb{R}-\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array}$
- ${}^rf_8 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}-\{1\} & \to & \mathbb{R}-\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$

Exercice 1.29: Les graphes de f et ${}^rf$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 1.30: **a)** $\mathrm{E_D} = \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}-\{-1\}$ **b)** ${}^rf(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

c) La fonction est égale à sa réciproque **d)** $f(x) = x$ (*par exemple*)

Exercice 1.31: **a)** VRAI **b)** FAUX **c)** VRAI

d) FAUX **e)** FAUX (*en général*) **f)** VRAI

g) VRAI **h)** VRAI **i)** VRAI

Exercice 1.32: **a)** • $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{E_D}(g) = \mathbb{R}^*$, $\mathrm{E_D}(g \circ f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$, $\mathrm{E_D}(f \circ g) = \mathbb{R}^*$

• $\big(g \circ f\big)(x) = \dfrac{1}{(2+x)(2-x)}$ $\big(f \circ g\big)(x) = \dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x^2}$

b) • $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$, $\mathrm{E_D}(g) = \mathbb{R} - \{3\}$, $\mathrm{E_D}(g \circ f) = \mathbb{R} - \{3\,;5\}$,
$\mathrm{E_D}(f \circ g) = \mathbb{R} - \{3\,;11/2\}$

• $\big(g \circ f\big)(x) = \dfrac{3x-5}{-2x+10}$ $\big(f \circ g\big)(x) = \dfrac{2x-1}{-2x+11}$

c) • $\mathrm{E_D}(f) = [6\,;+\infty[$, $\mathrm{E_D}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{E_D}(g \circ f) = [6\,;+\infty[$,
$\mathrm{E_D}(f \circ g) =]-\infty\,;-2] \cup [2\,;+\infty[$

• $\big(g \circ f\big)(x) = x - 4$ $\big(f \circ g\big)(x) = \sqrt{x^2-4}$

Exercice 1.33: • $\big(f \circ f\big)(x) = x$, $\mathrm{E_D}(f \circ f) = \mathbb{R} - \{1\}$
• $\big(g \circ g\big)(x) = x$, $\mathrm{E_D}(g \circ g) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Exercice 1.34: **a)** $\mathrm{E_D}(f \circ g \circ h) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, $\big(f \circ g \circ h\big)(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2-1}$

b) $\mathrm{E_D}(f \circ g \circ h) = \mathbb{R}^* - \{3/2\}$, $\big(f \circ g \circ h\big)(x) = \dfrac{(2x-1)(x-1)}{x(2x-3)}$

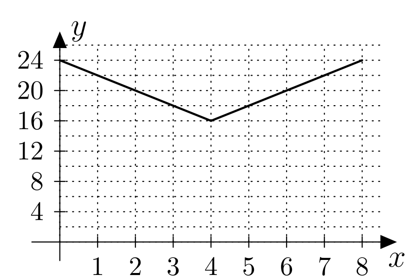
Exercice 1.35: **a)** $\mathrm{E_D} = \mathbb{R}$, f est impaire. **b)** $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, f est paire.
c) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R}$, f est impaire. **d)** $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} - \{1\}$, f est quelconque.
e) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R}$, f est paire.

Exercice 1.36: **a)** $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$, f est paire. **b)** $\mathrm{E_D} = [1\,;+\infty[$, f est quelconque.
c) $\mathrm{E_D} =]-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty[$, f est paire.

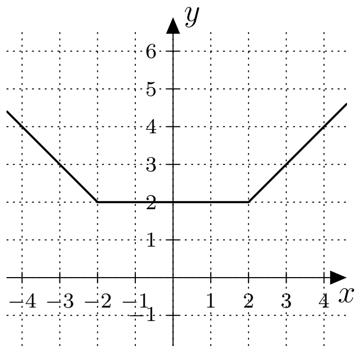
Exercice 1.37: **b)** $\ell(x) = \begin{cases} -2x+24 & \text{si } x \in [0\,;4], \\ 2x+8 & \text{si } x \in]4\,;8]. \end{cases}$

c) Il y aurait une contradiction au niveau de la croissance de la fonction ainsi que la *symétrie géométrique* de la situation.

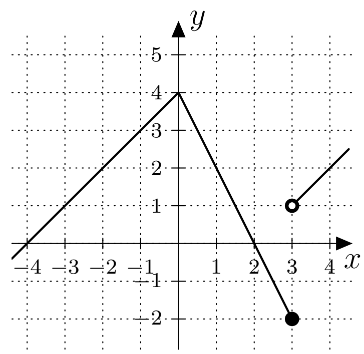
d) Cf. ci-contre.



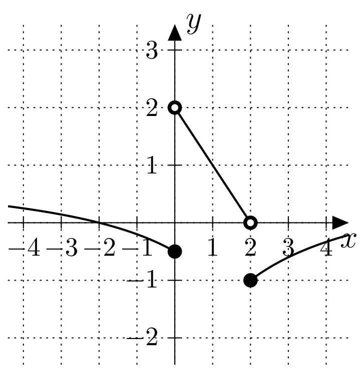
Exercice 1.38: **a)** $E_D = \mathbb{R}$, pas de zéro, paire.



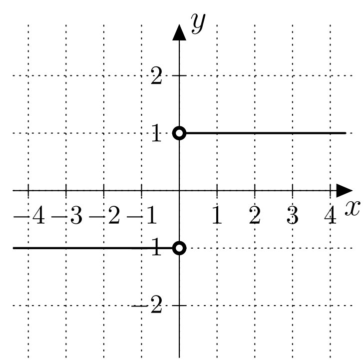
b) $E_D = \mathbb{R}$, zéro en $x = -4$ et $x = 2$, ni paire ni impaire.



c) $E_D = \mathbb{R}$, zéro en $x = -2$ et $x = 6$, ni paire ni impaire.



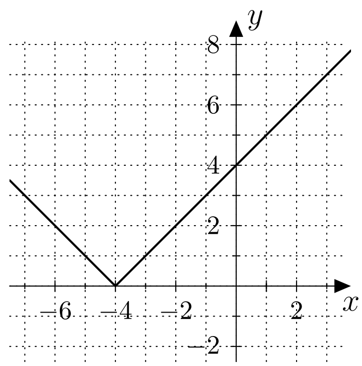
d) $E_D = \mathbb{R}^*$, pas de zéro, impaire.

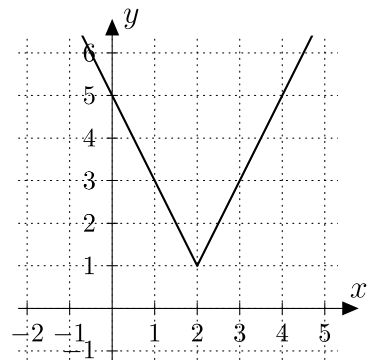


Exercice 1.39: **a)** $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0, \\ 4 & \text{si } x = 0, \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

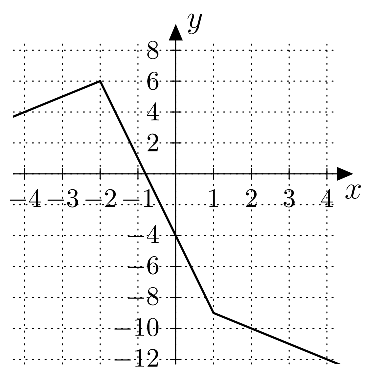
Exercice 1.40: **a)** $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant -2, \\ \frac{1}{2}x + 3 & \text{si } x \in]-2\,;2], \\ -4x + 12 & \text{si } x > 2. \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } x \leqslant 2, \\ 2x - 4 & \text{si } x > 2. \end{cases}$

Exercice 1.41: **a)** $f(x) = \begin{cases} -x-4 & \text{si } x \leqslant -4, \\ x+4 & \text{si } x > -4. \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} -2x+5 & \text{si } x \leqslant 2, \\ 2x-3 & \text{si } x > 2. \end{cases}$





c) $h(x) = \begin{cases} x+8 & \text{si } x \leqslant -2, \\ -5x-4 & \text{si } x \in]-2\,;1], \\ -x-8 & \text{si } x > 1. \end{cases}$



Exercice 1.42: **a)** $f(x) = \begin{cases} -6x+11 & \text{si } x \leqslant 2, \\ 6x-13 & \text{si } x > 2. \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} -2x+21 & \text{si } x \leqslant -2, \\ -8x+9 & \text{si } x \in]-2\,;3], \\ 2x-21 & \text{si } x > 3. \end{cases}$

1.2 Limites et asymptotes

Exercice 2.1:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ???$

c) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) =$ non défini

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 0$

d) $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = 1$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 2.2: **a)** 1,386 **b)** $-\infty$ **c)** 3 **d)** non défini

Exercice 2.3: $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ non défini $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \sqrt{2}+1$

Exercice 2.4:

a) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-8\,;-6\,;-4\,;3\,;7\}$

b) Zéros $= \{-5\,;-3\,;-1\,;6\}$

c)

a	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	Caractéristiques
$-\infty$			2	AHG en $y = 2$
-8	0	0	0	Trou en $(-8\,;0)$
-6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	AV en $x = -6$
-4	1	1	1	Trou en $(-4\,;1)$
-2	-2	-2	-2	Aucune
0	4	4	4	Aucune
3	5	2	Non défini	Trous en $(3\,;5)$ et $(3\,;2)$
7	$-\infty$	$+\infty$	Non défini	AV en $x = 7$
$+\infty$			3	AHD en $y = 3$

Exercice 2.5:

a) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ 10

b) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ 7

c) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ -3

d) $\mathrm{E_D}(f) = [-5\,;5]$ 3

e) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ -3/5

f) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ 1/5

g) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-3\,;4\}$ 1/7

h) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm3\}$ 9/2

i) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{2\,;3\}$ -4

j) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-3\,;-1\}$ 1/2

k) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm2\}$ 1/4

l) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{2\,;4\}$ -1/2

Exercice 2.6:	**a)** $E_D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$	$+\infty$	puis $-\infty$
	b) $E_D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$	$+\infty$	puis $-\infty$
	c) $E_D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$	$-\infty$	puis $+\infty$
	d) $E_D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$	-4	puis -4 *(il s'agit d'un trou !)*

Exercice 2.7:	**a)** $E_D(f) = \mathbb{R}^*$	-2	**b)** $E_D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$	2
	c) $E_D(f) = \mathbb{R} - \{-5\,;-3\}$	4	**d)** $E_D(f) = \mathbb{R} - \{-5\,;-3\}$	0
	e) $E_D(f) = \mathbb{R} - \{-5\,;-3\}$	non déf.		

Exercice 2.8: $\lim\limits_{t \to 44^-} V(t) = 1{,}01$, $\lim\limits_{t \to 44^+} V(t) = 1{,}045$, $\lim\limits_{t \to 44} V(t)$ non défini

Exercice 2.9:	**a)** $E_D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$	3	**b)** $E_D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$	-1
	c) $E_D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$	non déf.	**d)** $E_D(f) = \mathbb{R} - \{1\,;5\}$	non déf.

Exercice 2.10:	**a)** $E_D(f) = [0\,;+\infty[-\{1\}$	1/2	**b)** $E_D(f) = [0\,;+\infty[-\{9\}$	6
	c) $E_D(f) = [1/2\,;+\infty[-\{5\}$	3	**d)** $E_D(f) = \mathbb{R}^*$	2
	e) $E_D(f) = [-2\,;+\infty[-\{2\}$	1/4	**f)** $E_D(f) = [-7\,;+\infty[-\{2\}$	-1/6

Exercice 2.11: 1/2

Exercice 2.12: **a)** -1 **b)** 20 **c)** non défini **d)** $-\infty$

Exercice 2.13: **a)** 2/3 **b)** 0 **c)** 1/2 **d)** 1/2 **e)** 0 **f)** -2

Exercice 2.14: **a)** $-\infty$ **b)** $+\infty$ **c)** 1 **d)** 2/5

Exercice 2.15: **a)** La première **b)** La deuxième **c)** La première

Exercice 2.16:
a) AV en $x = \pm 3$ **b)** AV en $x = -2$ et $x = 5$
c) AV en $x = -1$ et $x = 3$ **d)** Il n'y a pas d'AV mais un trou

Exercice 2.17: **a)** AH en $y = 0$ **b)** AH en $y = 2$ **c)** AH en $y = 1$

Exercice 2.18:

	AV en	**AO en**
a) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$	$x = 0$	$y = x$
b) $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1}$	$x = 1$	$y = x - 1$
c) $f(x) = x + \dfrac{8}{x^2+2x+4}$	aucune	$y = x$
d) $f(x) = -2x + 5 + \dfrac{1}{x-5}$	$x = 5$	$y = -2x + 5$

Exercice 2.19: a) ❷ b) ❻ c) ❺ d) ❶ e) ❹ f) ❸

Exercice 2.20: $a = -2$; $b = 4$; $c = 1$; $d = -3$ (*par exemple*)

Exercice 2.21: **a)** f_7 **b)** f_{12} **c)** f_1 **d)** f_5 **e)** f_9 **f)** f_8
g) f_3 **h)** f_{10} **i)** f_2 **j)** f_4 **k)** f_{11} **l)** f_6

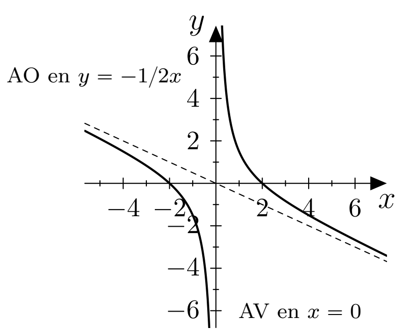
Exercice 2.22: **a)** $f(x) = \dfrac{\text{polynôme de degré} \geqslant 3 \textbf{ et } \text{non divisible par } (x-2)}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{5x}{x+3}$ **c)** Impossible

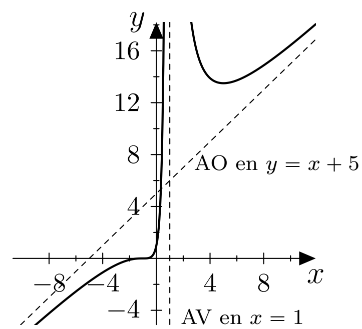
Exercice 2.23:

Si $n = 0$	AV en $x = \pm 3$	AH en $y = 0$
Si $n = 1$	AV en $x = 3$	AH en $y = 0$
Si $n = 2$	AV en $x = \pm 3$	AH en $y = 1$
Si $n = 3$	AV en $x = \pm 3$	AO en $y = x$
Si $n > 3$	AV en $x = \pm 3$	pas de AH et pas d'AO

Exercice 2.24: Seules les 2 esquisses sont proposées :

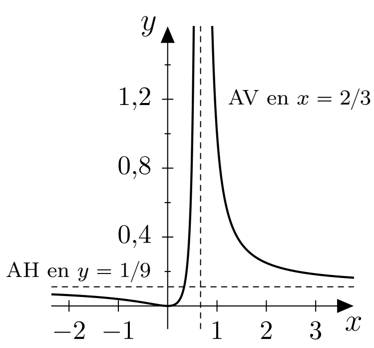


a)

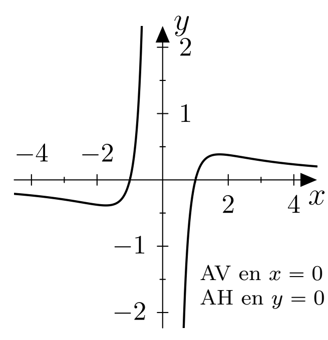


b)

Exercice 2.25: Seules les 2 esquisses sont proposées :



a)



b)

Exercice 2.26: **a)** $f(x) = \dfrac{-2x^2}{(x+3)(x-2)}$

b) $g(x) = x + \dfrac{x-1}{x(x+2)} = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x(x+2)}$

Exercice 2.27: $a = 1$; $b = -2$; $c = 0$

Exercice 2.28:

a) $f(2)$ n'est pas définie.

b) Les 3 expressions $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $f(2)$ ne sont pas égales.

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$.

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ n'est pas définie.
On dira que cette fonction est **continue à droite** de $x = 2$.

Exercice 2.29: $f(2) = 5$

Exercice 2.30: $h(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$ pour $x \in [-1\,;4]$.

Exercice 2.31: $\lim\limits_{v\to c^-} L = 0$ et $\lim\limits_{v\to c^-} m = \infty$

En théorie, si un objet se déplace à une vitesse proche de la vitesse de la lumière, sa taille va se contracter et sa masse va augmenter. Par exemple, un objet de 1 m et 1 kg au repos aura s'il se déplace à 90% de la vitesse de la lumière une longueur de 0,44 m et une masse de 2,29 kg.

Exercice 2.32:

a) Considérons $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 109$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{application du théorème}\\ \text{de la valeur intermédiaire}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{il y a au moins 1 sol}\\ (\text{en fait un nbre impair de sol})\end{array}$$

b) Considérons $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1$

$$\left.\begin{array}{r}f(-2) = -61\\ f(1) = -4\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{on ne peut pas directement}\\ \text{appliquer le théorème}\\ \text{de la valeur intermédaire}\end{array} \quad \text{Mais} \quad \begin{array}{c}\text{et si vous calculiez}\\ \text{l'ordonnée à l'origine} \ldots\end{array}$$

Exercice 2.33: On ne peut pas utiliser l'application du théorème de la valeur intermédiaire sur $f(x) = 6x^2 - 17x + 12$ car l'hypothèse sur les signes de $f(1)$ et $f(2)$ n'est pas vérifiée (positifs les deux).
On ne doit donc pas conclure qu'il n'y a pas de solution pour $x \in [1\,;2]$.
En fait, par factorisation, on obtient deux solutions entre $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 2.34: Je vous laisse représenter un ou plusieurs graphiques de la situation pour vous en convaincre.

Exercice 2.35:

$$\left.\begin{array}{l}T(4000) = 98{,}0995°\text{C}\\ T(4500) = 97{,}9478°\text{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{la fct } T(h) \text{ est continue sur } [4000\,;4500]\text{, on peut}\\ \text{appliquer le théorème de la valeur intermédiaire.}\end{array}$$

Exercice 2.36:

a) Pour un $\varepsilon > 0$ donné, il s'agit de considérer $\delta \leqslant \varepsilon/4$.

b) Pour un $\varepsilon > 0$ donné, il s'agit de considérer $\delta \leqslant 6\varepsilon$.

Exercice 2.37: **a)** $\delta \approx 3{,}7037 \cdot 10^{-4}$ **b)** $\delta = 0{,}79$

Exercice 2.38: **a)** $\delta = 0{,}005$ **b)** $\delta = 1/30$

Exercice 2.39:

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tel que :
$$-\delta < x - a < 0 \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tel que :
$$0 < x + a < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Exercice 2.40: Un corrigé pourra être vu ensemble à votre demande.

Exercice 2.41: **Définition I $\iff$ Définition II**

- $|x - a| < \delta \iff -\delta < x - a < \delta \iff a - \delta < x < a + \delta$
$\iff x \in]a - \delta\,; a + \delta[$
- $|f(x) - L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \iff L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$
$\iff f(x) \in]L - \varepsilon\,; L + \varepsilon[$

Exercice 2.42:

a) Pour un $\varepsilon > 0$ donné, $\delta \leqslant \min\left\{a - \sqrt[3]{a^3 - \varepsilon}\ ;\ \sqrt[3]{a^3 + \varepsilon} - a\right\}$.

b) Pour un $\varepsilon > 0$ donné, $\delta \leqslant \min\{a - (\sqrt{a} - \varepsilon)^2\ ;\ (\sqrt{a} - \varepsilon)^2 - a\}$ qui peut être simplifié en $\delta \leqslant \varepsilon^2$.

Exercice 2.43: Un corrigé pourra être vu ensemble à votre demande.

Exercice 2.44: Un corrigé pourra être vu ensemble à votre demande.

Exercice 2.45: Un corrigé pourra être vu ensemble à votre demande.

1.3 Introduction à la notion de dérivée

Exercice 3.1: Les solutions seront vues ensemble.

Exercice 3.2: Les solutions seront vues ensemble.

Exercice 3.3: **a)** $m = 0$ **b)** $m = 12$ **c)** $m = \frac{\sqrt{3}}{6}$ **d)** $m = 3$ (*prévisible, non ?*)
e) $m = -2$ puis pente non définie (cf. ED)

Exercice 3.4: **a)** $f'(x) = 2x - 2$ **b)** $f'(x) = 3$ **c)** $f'(x) = -2x + 4$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **e)** $f'(x) = 0$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x}$

Exercice 3.5: **a)** $f'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{x}}{2x^2}$

b) $m = f'(1/4) = -4$

c) $$\left.\begin{array}{r} y = mx + h \\ m = -4 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} y = -4x + h \\ \text{passe par } (1/4\,;2) \end{array}\right\} \Longrightarrow h = 3$$
$$\Longrightarrow y = -4x + 3$$

Exercice 3.6:
- $f'(x) = \dfrac{-3}{x^2} \Longrightarrow m = f'(3) = -1/3$
- $$\left.\begin{array}{r} y = mx + h \\ m = -1/3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} y = -1/3x + h \\ \text{passe par } (3\,;3) \end{array}\right\} \Longrightarrow h = 4$$
$$\Longrightarrow y = -1/3x + 4$$

Exercice 3.7:
① La dérivée à gauche vaut 2, la dérivée à droite vaut -2.
② La dérivée à gauche vaut $-1/2$, la dérivée à droite vaut $1/2$.
③ La dérivée à gauche vaut 0, la dérivée à droite n'est pas définie.

Exercice 3.8: **a)**
- f est continue car $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
- f est dérivable car $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

b)
- f est continue car $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$
- f est n'est pas dérivable car

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

Exercice 3.9: La dérivée n'est pas définie, la tangente est verticale d'équation : $x = 0$.

Exercice 3.10: ① *Vrai*, par le théorème précédent.

② *Faux*, la fonction $f(x) = |x|$ est un bon contre-exemple.

③ *Faux*, il ne s'agit pas d'une équivalence car ② est faux.

Exercice 3.11: **a)** f n'est pas dérivable en $x = 0$.

b) $g'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ +1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1.4 Dérivées et règles de dérivation

Exercice 4.1: *Indication : plusieurs réponses sont possibles. Demandez-moi si vous avez un doute.*

a) $f'(x) = 3$ **b)** $f'(x) = 42t^5$ **c)** $f'(x) = 7\sqrt{2}x^6$ **d)** $f'(x) = 2ax$

e) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2x}$ **f)** $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$

g) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

h) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^3}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x}}$ ou encore mieux $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{x}}{x^2}$

i) $f'(x) = \dfrac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{2\sqrt[7]{x^2}}{7x}$

j) $f'(x) = 2(m-1)x$ **k)** $f'(x) = 0$

Exercice 4.2: *Indication : plusieurs réponses sont possibles. Demandez-moi si vous avez un doute.*

a) $f(x) = 17x^2$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4$

c) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^{3/2} = \underline{\underline{\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}}}$ **d)** $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

Exercice 4.3: *Indication : plusieurs réponses sont indiquées. Il faut préférer celles qui sont soulignées (mise au même dénominateur, factorisées, ...)*

a) $f'(x) = 3$ **b)** $f'(x) = 8x - 2$

c) $f'(x) = 9x^2 - 2$ **d)** $f'(x) = a$

e) $f'(x) = 2x + \dfrac{3}{x^2} = \underline{\underline{\dfrac{2x^3+3}{x^2}}}$ **f)** $f'(x) = 2x + \dfrac{\sqrt{x}}{2x} = \underline{\underline{\dfrac{4x^2+\sqrt{x}}{2x}}}$

g) $f'(x) = \dfrac{-6}{x^3} + 3 = \underline{\underline{\dfrac{3x^3-6}{x^3}}}$ **h)** $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \underline{\underline{\dfrac{-x-2}{x^3}}}$

i) $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{3x^2} = \underline{\underline{\dfrac{(3x+1)(3x-1)}{3x^2}}}$ **j)** $f'(x) = 2ax + b$

Exercice 4.4: *Indication : plusieurs réponses sont possibles. En particulier, vous pouvez choisir le dernier terme sous la forme d'un nombre.*

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \text{ nbre}$ **b)** $f(x) = x^4 + x^3 + \text{ nbre}$

c) $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x} + \text{ nbre}$ **d)** $f(x) = \dfrac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + \text{ nbre}$

Exercice 4.5: *Indication : La réponse est attendue sous une forme factorisée.*

a) $f'(x) = 2(2x-3)(3x+2)$ **b)** $f'(x) = 2(x+4)$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{(3-x)^2}$ **d)** $f'(x) = \dfrac{11}{(4-x)^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{-2\left(x^3-3x^2+1\right)}{(x-2)^2}$ **f)** $f'(x) = 2(3x-5)$

g) $f'(x) = \dfrac{-4x^2-4x+43}{2(2x+1)^2}$ **h)** $f'(x) = 48x^3-84x^2-30x+35$

Exercice 4.6: **a)** $f'(x) = 10(2x+4)^4$ **b)** $f'(x) = 15x\sqrt{5x^2-3}$

c) $f'(x) = \dfrac{8x-1}{\sqrt{8x^2-2x+3}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{(8x-1)\sqrt{8x^2-2x+3}}{8x^2-2x+3}$

d) $f'(x) = \dfrac{5}{2(x+1)^2}\sqrt{\dfrac{x+1}{3x-2}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{5\sqrt{(x+1)(3x-2)}}{2(x+1)^2(3x-2)}$

e) $f'(x) = 6x(x-1)^2(x+1)^2$ **f)** $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}{2x^3}$

g) $f'(x) = -(x-1)^2(x+2)(5x+4)$ **h)** $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$

i) $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{(x-3)(x+2)}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{(2x-1)\sqrt{(x-3)(x+2)}}{2(x-3)(x+2)}$

j) $f'(x) = \dfrac{(3x-1)^2(6x+31)}{(2x+3)^3}$

Exercice 4.7: **a)** $f(x) = \left(x^2-1\right)^5 +$ nbre **b)** $f(x) = (4-x)^3+$ nbre

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} +$ nbre ou mieux $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x} +$ nbre

d) $f(x) = \left(x^2-1\right)^2+$ nbre

Exercice 4.8:

a) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = x - 3$

b) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 2(x+1)$

c) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = -3(4-x)^2$

d) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 4x\,(3x^2+1)$

e) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 3(x+1)(x-1)$

f) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 2acx + ad + bc$

g) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 10(2x-1)^2(x+1)(x+2)$

h) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}^*$ $\quad f'(x) = -\dfrac{a}{x^2}$

i) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\quad f'(x) = \dfrac{6(x-2)}{(x+1)^3}$

j) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-6}{(x-1)^2}$

k) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\quad f'(x) = \dfrac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$

l) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ $\quad f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

m) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{3x}$

n) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

ou mieux $f'(x) = \dfrac{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$

o) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}_+ - \{1\}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$

ou vraiment peu sympathique !

p) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}_+$ $\quad f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}(\sqrt{x+\sqrt{x}})}$ et ici...

Exercice 4.9: **a)** $y = -6x - 5$ $\qquad$ **b)** $y = \dfrac{33}{4}x - 25$ $\qquad$ **c)** $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{13}{5}$

Exercice 4.10: Au point $P\left(\dfrac{-3}{2}\,;\dfrac{9}{4}\right)$

Exercice 4.11: **a)** En $x = 2$ et en $x = -4/3$.

b) • L'équation de la tgte : $y = 3x - 10$ en $T_1(2\,;-4)$

• L'équation de la tgte : $y = 3x + \dfrac{230}{27}$ en $T_2\left(-\dfrac{4}{3}\,;\dfrac{122}{27}\right)$

Exercice 4.12: Aux points $P\left(3\,;\dfrac{1}{6}\right)$ et $Q\left(-3\,;-\dfrac{1}{6}\right)$

Exercice 4.13: $a = 3$

Exercice 4.14: **a)** Oui, la cible n°4 **b)** Non

Exercice 4.15: *Indication : Il s'agit de résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues.*

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{5}{3}x + 3$ **b)** $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

Exercice 4.16: **a)** 0° au point $P(0\,;0)$ 8,13° au point $Q(1\,;1)$

b) 35,54° au point $P(2\,;1)$ 45° au point $Q(6\,;9)$

c) 0° au point $P(-2\,;-13)$ 52,94° au point $Q(1/3\,;-8/27)$

d) 75,96° au point $P(0\,;0)$ 6,91° au point $Q(2\,;0)$

Exercice 4.17: **a)** $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

b) On utilise que si $m \cdot m' = -1$ alors les droites sont $\perp$.

c) Mêmes démarches.

Exercice 4.18: Un corrigé pourra être proposé à votre demande.

Exercice 4.19: Un corrigé pourra être proposé à votre demande.

Exercice 4.20: Un corrigé pourra être proposé à votre demande.

Exercice 4.21: **a)** Comme $f(x) = x^2 + 4$ alors $f^*(x) = 2x = f'(x)$.

Comme $f(x) = 1/x$ alors $f^*(x) = \dfrac{-1}{x^2} = f'(x)$

b) Il s'agit donc bien d'une définition équivalente de la fonction dérivée.

Exercice 4.22: **a)** $f'(x) = \left((x-2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$

b) $f'(x) = \left((3x-5)^3\right)' = 9(3x-5)^2$

c) $f'(x) = \left((x^2-4)^{-\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{-2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2+4)^4}}$

Exercice 4.23: Un corrigé pourra être proposé à votre demande.

Exercice 4.24: Un corrigé pourra être proposé à votre demande.

Exercice 4.25: $y = 4x - 4$

Exercice 4.26: Elle se déduit presque immédiatement de $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

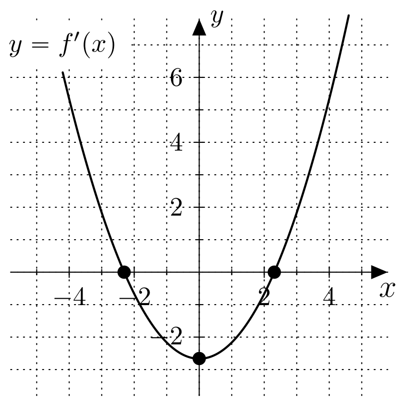
Exercice 4.27:
a) $y = 4x - 3$
b) $y = 13x - 2$
c) $y = -4/5x + 5$

Exercice 4.28: $y = 1/2x + 1$

Maria Agnesi (1718 - 1799)
Mathématicienne italienne

1.5 Croissance et étude de fonctions

Exercice 5.1: On obtient approximativement le graphique suivant :



Exercice 5.2:
- Le graphe de f' correspond à l'esquisse ⑤.
- Le graphe de g' correspond à l'esquisse ⑥.

Exercice 5.3:

a)

		$1/3$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
croissance	↘	min	↗

- **Min**$(1/3\,;11/3)$

b)

		-1		4	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
croissance	↗	max	↘	min	↗

- **Max**$(-1\,;18)$
- **Min**$(4\,;-107)$

c)

		-2		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
croissance	↗	replat	↗	max	↘	min	↗

- **Replat**$(-2\,;0)$
- **Max**$(1\,;108)$
- **Min**$(3\,;0)$

d)

		-5	
$f'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$
croissance	↗		↗

e)

		-5		-2		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
croissance	↗	max	↘		↘	min	↗

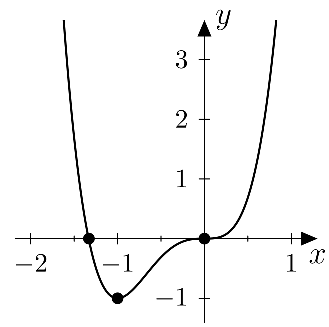
- **Max**$(-5\,;-12)$
- **Min**$(1\,;0)$

f)

		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
croissance	↘	min	↗	max	↘

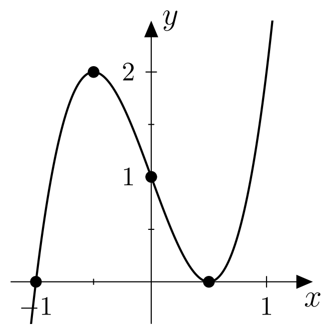
- **Min**$(-1\,;-1/2)$
- **Max**$(1\,;1/2)$

Exercice 5.4: **a)**



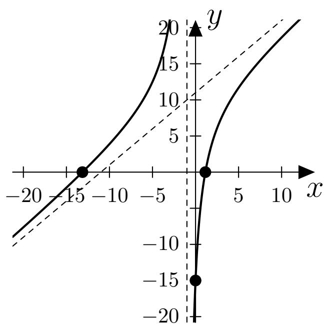
- $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$
- zéros en $x = -4/3$ et $x = 0$
- $f'(x) = 12x^3 + 12x^2$
- Min (-1 ; -1)
- Replat (0 ; 0)
- Ord. origine en $y = 0$

b)



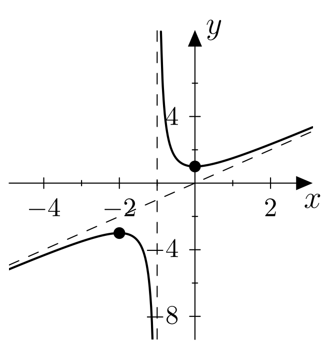
- $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$
- zéros en $x = -1$ et $x = 1/2$
- $f'(x) = 12x^2 - 3$
- Max (-1/2 ; 2)
- Min (1/2 ; 0)
- Ord. origine en $y = 1$

c)



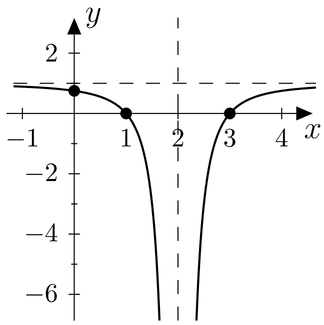
- $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$
- zéros en $x = -6 \pm \sqrt{51}$
- AV en $x = -1$
- AO en $y = x + 11$
- $\delta(x) = \dfrac{-26}{x+1}$
- $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 27}{(x+1)^2}$
- Ord. origine en $y = -15$

d)



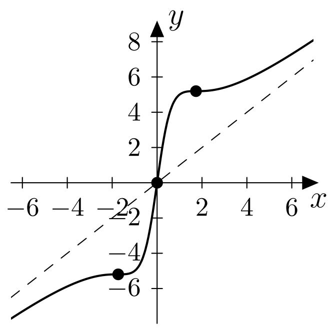
- $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$
- AV en $x = -1$, AO en $y = x$
- $\delta(x) = \dfrac{1}{x+1}$
- $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$
- Min (0 ; 1), Max (−2 ; −3)
- Ord. origine en $y = 1$

e)



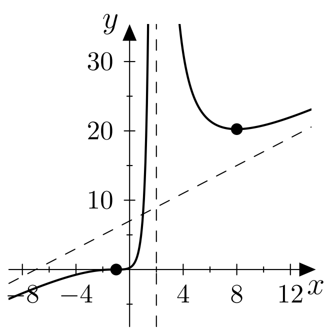
- $E_D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- zéros en $x = 1$ et $x = 3$
- AV en $x = 2$, AH en $y = 1$
- $\delta(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$
- $f'(x) = \dfrac{2}{(x-2)^3}$
- Ord. origine en $y = 3/4$

f)



- $E_D(f) = \mathbb{R}$
- zéro en $x = 0$
- AO en $y = x$
- $\delta(x) = \dfrac{8x}{x^2+1}$
- $f'(x) = \dfrac{(x^2-3)^2}{(x^2+1)^2}$
- Replat $(-\sqrt{3}\,;-3\sqrt{3})$
- Replat $(\sqrt{3}\,;3\sqrt{3})$
- Ord. origine en $y = 0$

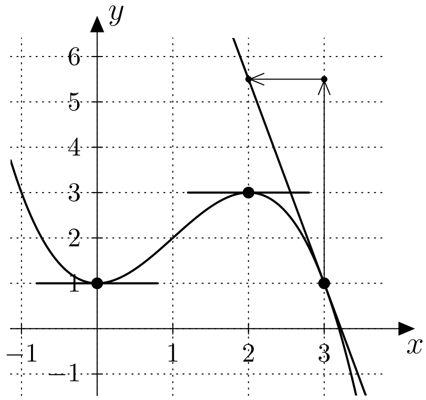
g)



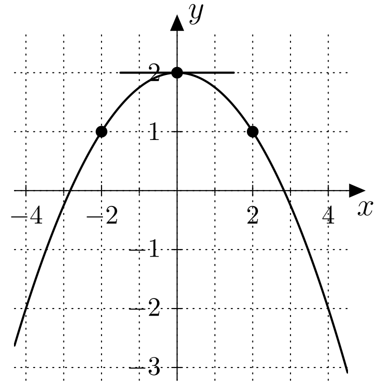
- $E_D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- zéro en $x = -1$
- AV en $x = 2$, AO en $y = x + 7$
- $\delta(x) = \dfrac{27(x-1)}{(2-x)^2}$
- $f'(x) = \dfrac{(-x+8)(x+1)^2}{(2-x)^3}$
- Replat $(-1\,;0)$, Min $(8\,;81/4)$
- Ord. origine en $y = 1/4$

Exercice 5.5: Une animation GeoGebra est à votre disposition sur `www.javmath.ch`

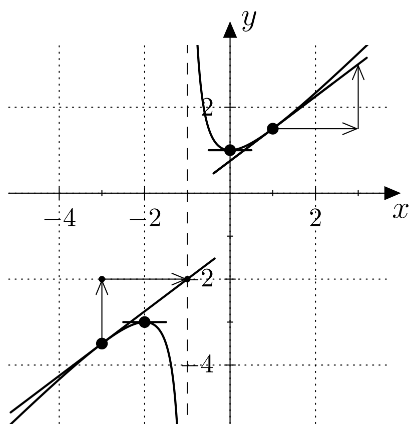
Exercice 5.6:



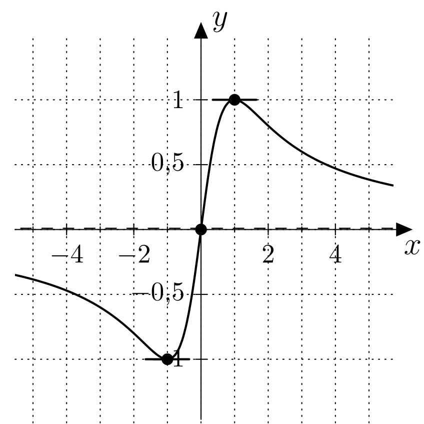
a)



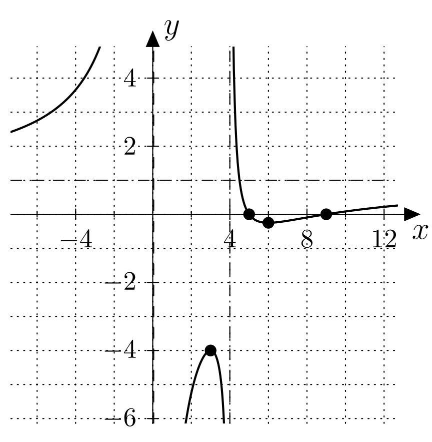
b)



c)



d)



e)

Exercice 5.7: **a)**

- $E_D(f) = \mathbb{R}^*$, zéros en $x = -3$ et $x = 3$.
-

		-3		0		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$

- AV en $x = 0$; AH en $y = 1$.
-

		0	
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$+$
croissance	$\searrow$		$\nearrow$

ni Min, ni Max.

b)

- $E_D(f) = \mathbb{R} - \{-5\,;2\}$, zéros en $x = -8$, $x = 0$ et $x = 10$.
-

		-8		-5		0		2		10	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

- AV en $x = -5$ et $x = 2$; AH en $y = -1$.
-

		-12		-5		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$
croissance	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

Min $(-12\,;-1{,}5)$.

Exercice 5.8: **a)**

- $E_D(f) = \mathbb{R} - \{-8\,;-4\,;4\}$, zéro en $x = 0$.
-

		-8		-4		0		4	
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$

- AV en $x = -8$, $x = -4$ et $x = 4$; AH en $y = 1/2$.
-

		-8		-5		-4		0		4		11	
$f'(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$
croissance	$\nearrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	replat	$\nearrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

- Min $(-5\,;2)$; Min $(11\,;0{,}3)$.

b)

- $E_D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, zéro en $x = -1$.
-

		-1		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$

- AV en $x = 2$; AO en $y = x + 7$.
-

		-1		2		8	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$
croissance	$\nearrow$	replat	$\nearrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

Min $(8\,;20{,}2)$.

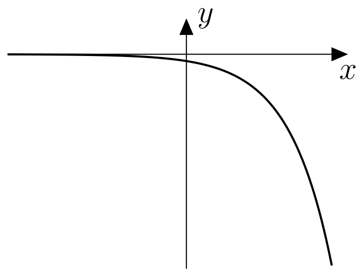
Exercice 5.9:

a) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 24x - 32 = 4(x-2)(x+1)(x+4)$
zéros en $x = 2$, $x = -1$ et $x = -4$

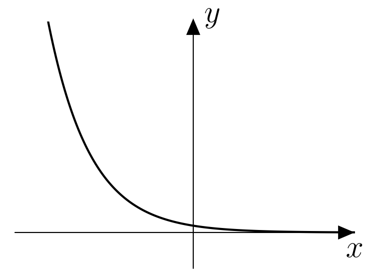
b) $(f'(x))' = f''(x) = 12x^2 + 24x - 24 = 12(x^2 + 2x - 2)$
zéros en $x = -1 \pm \sqrt{3}$

c) Sera vu ensemble. Un indice serait d'étudier comment varient les pentes des tangentes ainsi que la forme générale des courbes.

Exercice 5.10:



Exercice 5.11:



Exercice 5.12: Si $D(t)$ est le montant de la dette publique en fonction du temps t, alors, au moment du discours, $D'(t) > 0$, mais $D''(t) < 0$.

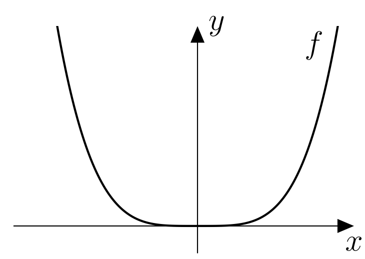
Exercice 5.13: Le taux initial est faible, puis il croît rapidement. Après s'être stabilisé, il décroît et devient négatif.
Ainsi, on peut estimer les points d'inflexion en (1960 ; 2,5) et (∼1985 ; ∼4,3) ; le taux de variation commençant à décroître en 1960 et recommençant à croître aux environs de 1985.

Exercice 5.14: La fonction c est la première dérivée de a, la fonction b est la seconde dérivée de a. Ainsi $f = a$, $f' = c$ et $f'' = b$.

Exercice 5.15: Posons $f(x) = x^4$.

a) Malgré le fait que $f''(0) = 0$, cette courbe n'admet pas de point d'inflexion.

b) Le graphe de f est représenté ci-contre.



Exercice 5.16: Sera vu ensemble. L'exercice précédent permet de s'en convaincre.

Exercice 5.17: Concave pour $x \in]-\infty\,;\ 3[$, point d'inflexion en $I(3\,;\ 24)$.

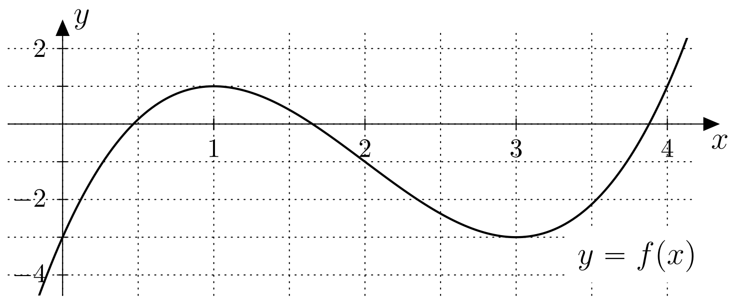
Exercice 5.18:

a) La fonction n'est jamais convexe.

b) Elle n'admet pas de point d'inflexion.

c) Il s'agit du premier graphique proposé.

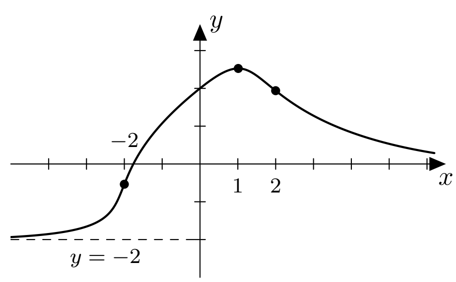
Exercice 5.19: On obtient approximativement ceci :



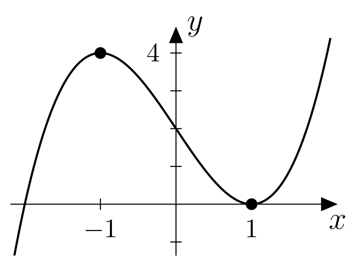
Exercice 5.20: • Alors $x = a$ est *un maximum.* • Alors $x = a$ est *un minimum.* • Alors $x = a$ est *un replat.*

Exercice 5.21: Min$(-1\,;-70)$, Max$(1\,;10)$ et finalement Min$(5\,;-502)$.

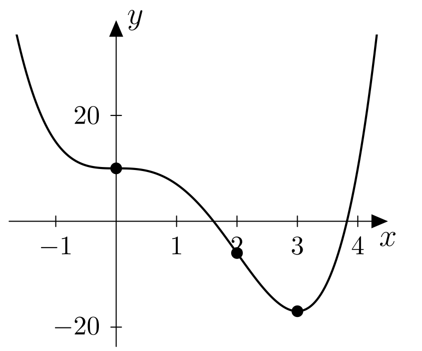
Exercice 5.22:



Exercice 5.23:

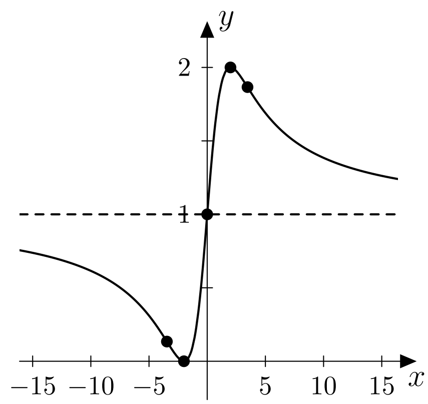


Exercice 5.24: **a)**



- $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$
- ni paire, ni impaire
- f non factorisable
- $f'(x) = 4x^2(x-3)$
- Replat$(0\,;10)$ et Min$(3\,;-17)$
- $f''(x) = 12x(x-2)$
- $I_1(0\,;10)$ et $I_2(2\,;-6)$
- Ord. origine en $y = 10$

b)

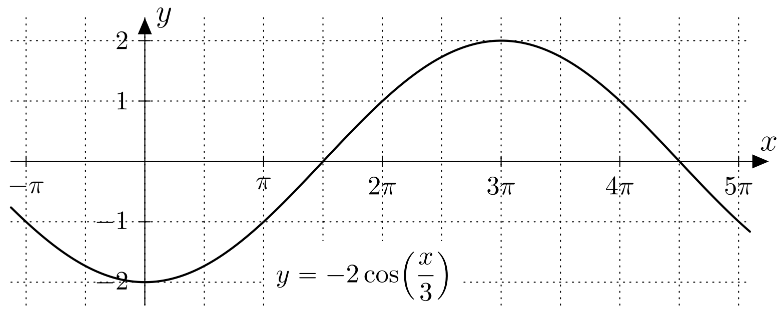


- $\mathrm{E_D}(g) = \mathbb{R}$
- ni paire, ni impaire
- zéro en $x = -2$
- AH en $y = 1$
- $g'(x) = \frac{-4(x-2)(x+2)}{(4+x^2)^2}$
- Min$(-2\,;0)$ et Max$(2\,;2)$
- $g''(x) = \frac{8x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})}{(4+x^2)^3}$
- $I_1(-2\sqrt{3}\,;0{,}13)$, $I_2(0\,;1)$ et $I_3(2\sqrt{3}\,;1{,}87)$
- Ord. origine en $y = 1$

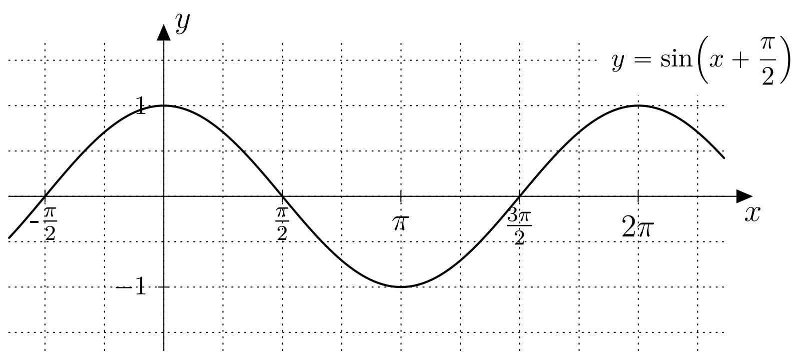
Exercice 5.25: Et si vous utilisiez le site `www.lovemaths.fr`

1.6 Fonctions trigonométriques

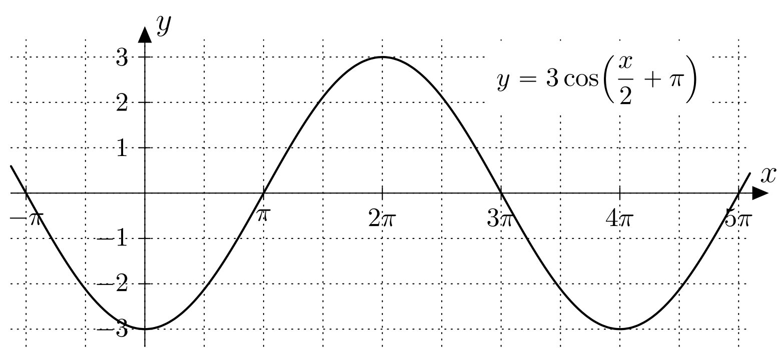
Exercice 6.1: **a)** Période de 6π et une amplitude de 2.



b) Période de 2π et une amplitude de 1.



c) Période de 4π et une amplitude de 3.



Exercice 6.2:

fonctions	période	amplitude	graphe
f	2π	1	③
g	$2\pi/3$	2	②
h	4π	1	④
i	$2\pi/3$	2	①

Exercice 6.3: Dans toutes les réponses de cet exercice, $k \in \mathbb{Z}$:

a) $S = \{120° + k \cdot 360°\} \cup \{240° + k \cdot 360°\}$
b) $S = \{41{,}33° + k \cdot 120°\} \cup \{18{,}67° + k \cdot 120°\}$
c) $S = \{-37{,}02° + k \cdot 180°\}$
d) $S = \varnothing$
e) $S = \{158{,}75° + k \cdot 360°\}$
f) $S = \{-20° + k \cdot 120°\} \cup \{80° + k \cdot 120°\}$

Exercice 6.4: Dans toutes les réponses de cet exercice, $k \in \mathbb{Z}$:

a) $S = \left\{\frac{7\pi}{12} + k \cdot 2\pi\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{12} + k \cdot 2\pi\right\}$
b) $S = \left\{\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right\} \cup \{k \cdot 2\pi\}$
c) $S = \{k \cdot \pi\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi\right\}$
d) $S = \left\{\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$
e) $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$
f) $S = \left\{\frac{-\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right\}$

Exercice 6.5: Dans toutes les réponses de cet exercice, $k \in \mathbb{Z}$:
Si votre réponse ne correspond pas exactement à celle proposée, il est probable que la vôtre soit équivalente, mais formulée sous une autre forme.

a) $S = \{k \cdot 2\pi\} \cup \{\pi + k \cdot 2\pi\}$
ou de façon plus synthétique : $S = \{k \cdot \pi\}$

b) $S = \left\{\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right\}$
ou de façon plus synthétique : $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{3} + k \cdot \pi\right\}$

d) $S = \left\{\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right\} \cup \left\{\frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right\}$
ou de façon plus synthétique : $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi\right\}$

e) $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{4} + k \cdot \pi\right\}$

f) Et si vous compariez cette équation à la précédente !!

Exercice 6.6: Dans toutes les réponses de cet exercice, $k \in \mathbb{Z}$:

a) $S = \{150° + k \cdot 360°\} \cup \{30° + k \cdot 360°\}$
b) $S = \{60° + k \cdot 360°\} \cup \{-60° + k \cdot 360°\} \cup \{k \cdot 360°\}$
c) $S = \{-45° + k \cdot 180°\}$

Exercice 6.7: Dans toutes les réponses de cet exercice, $k \in \mathbb{Z}$:

a) $S = \{135° + k \cdot 360°\} \cup \{45° + k \cdot 360°\} \cup \{225° + k \cdot 360°\} \cup \{-45° + k \cdot 360°\}$

ou mieux : $S = \{45° + k \cdot 90°\}$

b) $S = \{30° + k \cdot 360°\} \cup \{150° + k \cdot 360°\} \cup \{-90° + k \cdot 360°\}$

ou mieux : $S = \{30° + k \cdot 120°\}$

c) $S = \{41{,}81° + k \cdot 360°\} \cup \{138{,}19° + k \cdot 360°\}$

Exercice 6.8: **a)** Le graphe de f correspond au graphe n° 2, celui de g au graphe n° 1.

b) En utilisant la relation $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ en cours de résolution de l'équation $f(x) = g(x)$, vous obtiendrez finalement :

$$A\left(\frac{\pi}{12}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) \quad \text{et} \quad B\left(\frac{7\pi}{12}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$$

Exercice 6.9: **a)** $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$ **b)** $f'(x) = x\big(2\cos(x) - x\sin(x)\big)$

c) $f'(x) = -\sin(x) - 2\tan^2(x) - 2$ **d)** $f'(x) = \dfrac{x - \sin(x) \cdot \cos(x)}{x^2\cos^2(x)}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos(x) + 1}$

f) $f'(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x) + x\sin(x) - x\cos(x)}{2\sin(x)\cos(x) + 1}$

Exercice 6.10: Il s'agit de calculer $\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'$ avec la règle de dérivation des fractions.

Voyez-vous pourquoi deux réponses peuvent être proposées ?

Exercice 6.11: **a)** $y = x - \pi$ **b)** $y = -x$

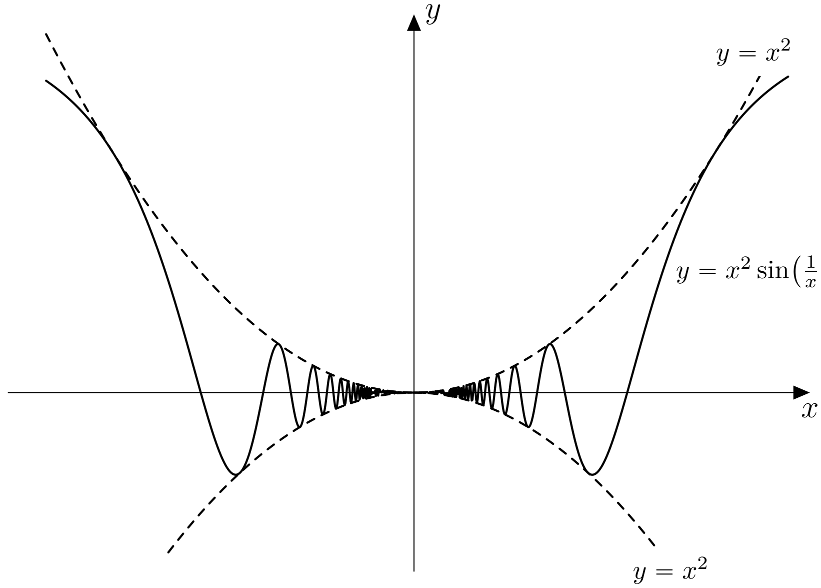
Exercice 6.12: en $x = 2\pi/3$ et $x = 4\pi/3$ (n'oubliez pas d'utiliser un cercle trigo)

Exercice 6.13: **a)** $f'(x) = 3\tan^2(3x) + 3$ **b)** $f'(x) = -3x^2\sin\big(x^3\big)$

c) $f'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)$ **d)** $f'(x) = \dfrac{-\cos(1/x)}{x} + \sin(1/x)$

Exercice 6.14: **a)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$ **b)** $3 \leqslant \lim\limits_{x\to 2} f(x) \leqslant 5$

Exercice 6.15:
- $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$
- On observe cette même limite en constatant que f est prise en sandwich entre les deux parabole $y = x^2$ et $y = -x^2$ sur le graphique ci-dessous :



Exercice 6.16: Un corrigé sera peut être vu ensemble à votre demande.

Exercice 6.17: Un corrigé sera peut être vu ensemble à votre demande.

Exercice 6.18: **a)** 2 **b)** 3/2 **c)** 1 **d)** 1

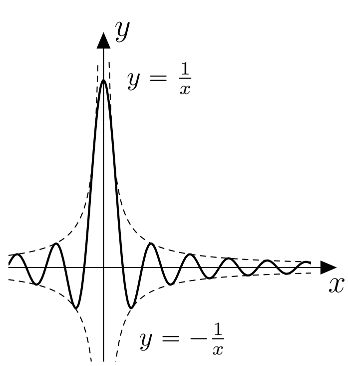
Exercice 6.19: **a)** Non défini **b)** 1 **c)** 1/2

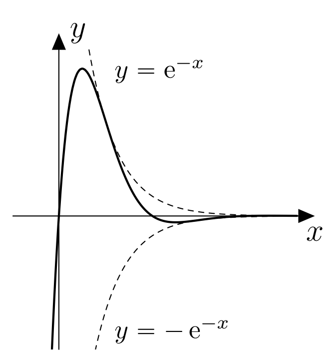
Exercice 6.20: Pas de corrigé

Exercice 6.21: Les 2 graphiques permettent d'observer que les fonctions en **a)** et **b)** sont prises "en sandwich" :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} \cdot \sin(x) = 0$





c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x + \cos(x)}{x+1} = 2$

Exercice 6.22: Un corrigé peut être vu ensemble à votre demande.

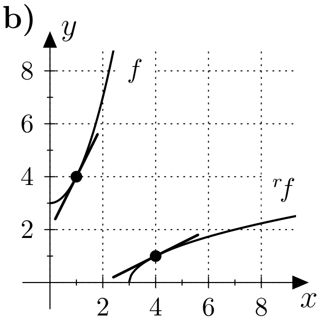
Exercice 6.23: Un corrigé peut être vu ensemble à votre demande.

Exercice 6.24: Un corrigé sera peut être vu ensemble à votre demande.

Exercice 6.25: **a)** $1/2$ **b)** $-\pi/3$ **c)** $5\pi/6$ **d)** $-\pi/4$

Exercice 6.26: **a)** ${}^rf(x) = \sqrt{x-3}$

b)



c) $f'(x) = 2x$

$\left({}^rf\right)'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$

d) $f'(1) = 2$

$\left({}^rf\right)'(f(1)) = \left({}^rf\right)'(4) = \dfrac{1}{2}$

e) Ces 2 valeurs sont inverses l'une de l'autre.

f) Oui, $f'(2) = -\dfrac{3}{2}$ et $\left({}^rf\right)'(-2) = -\dfrac{2}{3}$

g) $\left({}^rf\right)'(0) = -6$

Exercice 6.27: **a)** $\left(\sqrt[3]{4x}\right)' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{2x^2}}$ **b)** $\left(\dfrac{1}{m}x\right)' = \dfrac{1}{m}$

Exercice 6.28: Un corrigé peut être vu ensemble à votre demande.

Exercice 6.29: Un corrigé peut être vu ensemble à votre demande.

Exercice 6.30: **a)** $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x(x+1)}}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$

Ne pourrait-on pas alors simplifier celle-ci en $f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$?

c) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}\cdot(\arcsin(x))^2}$

Cette dernière réponse peut également être proposée sous la forme :

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin^2(x)}$$

Exercice 6.31: **a)** $y = 2x - \dfrac{\pi}{2} + 1$ **b)** $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 6.32: **a)** $f(1) = 3,\ f'(1) = 12$ **b)** ${}^rf(3) = 1,\ \left({}^rf\right)'(3) = \dfrac{1}{12}$

Si vous souhaitez commander ou utiliser ce polycopié dans vos classes, merci de prendre contact avec son auteur en passant par son site web :

`www.javmath.ch`