

Géométrie analytique

2 – 3M_{renf}

Jean-Philippe Javet



Reptiles (1943), lithographie de M. C. Escher

Chapitre 0 :	Introduction (rappels de 1 ^{ère})	
Chapitre 1 :	Équations de la droite dans le plan	1
Chapitre 2 :	Distance point-droite et bissectrice	17
Chapitre 3 :	Équations du cercle dans le plan	25
Chapitre 4 :	Géométrie analytique dans l'espace	35
Annexe :	12 exercices de répétition (2 ^{ème} – 3 ^{ème})	65
	Quelques éléments de réponses	67

Chapitre 0 : Introduction à la géométrie analytique

§ 0.1 Préambule :

« **Les 3 géométries** » : La *géométrie euclidienne* porte sur l'étude de figures du plan (droites, cercles, triangles, etc.). Les théorèmes sont démontrés en procédant par déduction à partir de certains postulats.



Euclide
né vers -325, mort vers -265

La *géométrie vectorielle* porte sur l'étude des vecteurs (défini par une direction, un sens et une mesure). L'introduction de cet outil mathématique permet en particulier de contrôler l'alignement de points, le parallélisme ou la perpendicularité de droites, de déterminer les coordonnées de points particuliers, de distance entre deux points, de calculer des angles...

En *géométrie analytique*, les figures géométriques planes sont étudiées en introduisant des systèmes de coordonnées, puis en utilisant **des équations** et des formules.

En fait, il s'agit ici de réaliser le « rêve de Descartes », c'est-à-dire de remplacer les démonstrations basées sur des raisonnements géométriques par des calculs en utilisant les coordonnées cartésiennes. Descartes proposait dans ses ouvrages « Règles pour la direction de l'esprit » et « Discours de la méthode », la démarche suivante :



René Descartes
1596 - 1650

- "Ramener" d'abord tout problème à un problème de mathématique.
- "Ramener" ensuite tout problème mathématique à un problème d'algèbre.
- "Ramener" enfin tout problème d'algèbre à la résolution d'équations.

Nous étudierons (chapitre 1 à 3) du cas des droites, triangles, droites particulières du triangle et cercles **dans le plan**.

Le chapitre 4 (pour le niveau renforcé) nous permettra d'étudier les plans et les sphères dans l'espace.

Dans le plan, comme dans l'espace, il s'agira avant tout de calculs de type algébrique.

L'outil de départ pour introduire les nouvelles notions de géométrie analytique est **obligatoirement** la géométrie vectorielle.

Ceci justifie ce chapitre 0. À l'aide de celui-ci, vous devrez au plus vite vous rafraîchir la mémoire sur les notions importantes de géométrie vectorielle.

Savoir faire en géométrie vectorielle $1M_{renf}$ (à compléter):

Questions	De mémoire	Dans le polycopié	n° des pages
• Comment est caractérisé un vecteur ?			
• Règle Chasles ?			
• Quelles différences entre composantes et coordonnées ?			
• Comment déterminer si deux vecteurs sont colinéaires ? (2 méthodes)			
• $A(2 ; 5)$; $B(3 ; 8)$ et $C(-2 ; -7)$ sont-ils alignés ?			

Questions	De mémoire	Dans le polycopié	n° des pages
Comment déterminer le milieu du segment défini par $A(3 ; 6)$ et $B(-5 ; -4)$?			
$A(2 ; 3)$; $B(5 ; 2)$; $C(-1 ; -1)$ et $D(1 ; -2)$. $ABCD$ est-il un parallélogramme ?			
$A(8 ; -3)$ et $B(5 ; 7)$. Que vaut $\ \overrightarrow{AB}\$?			
Les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont-ils perpendiculaires ?			

Questions	De mémoire	Dans le polycopié	n° des pages
Déterminer l'angle entre les deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$			
Déterminer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$			
Comment est défini le produit vectoriel de deux vecteurs ? Comment se souvenir de la formule ? $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$			

Questions	De mémoire	Dans le polycopié	n° des pages
Relation entre angle et produit vectoriel			
Trois vecteurs de V_3 sont coplanaires si: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}$			
Comment calculer le volume d'un parallélépipède construit sur trois vecteurs ? $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}$			

Questions	De mémoire	Dans le polycopié	n° des pages

Chapitre 1 : Équations de la droite dans le plan

§ 1.1 Introduction

Exercice d'introduction : On considère l'équation vectorielle: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Représenter, dans un système d'axes Oxy , les points $(x ; y)$ correspondant aux valeurs du paramètre

$$k = -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3.$$

➤ Par exemple, si $k = 4$, alors on obtient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$,
on représente le point $P(9 ; 10)$.

Vous aurez constaté que tous les points obtenus sont situés sur une même droite. Nous allons maintenant caractériser les droites dans le plan par leurs équations.

§ 1.2 Équation vectorielle paramétrique de la droite dans le plan

La droite « vectorielle » : • Une droite d est entièrement caractérisée par l'un de ses points

$A(a_1 ; a_2)$ et un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ définissant son orientation.

- Ce vecteur $\vec{v}$ est appelé **vecteur directeur** de d .
- L'ensemble de tous les points $M(x ; y)$ du plan qui appartiennent à la droite d est caractérisé par l'**équation vectorielle paramétrique de la droite** suivante:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{v} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Que l'on utilisera aussi sous forme d'**un système d'équations paramétriques**:

$$\begin{cases} x = a_1 + k \cdot v_1 \\ y = a_2 + k \cdot v_2 \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Remarque: Si la droite est donnée par deux points A et B , on prend le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur.

Exemple: Donner une **équation vectorielle paramétrique** de la droite passant par $A(2 ; -5)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exemple: Donner un **système d'équations paramétriques** de la droite passant par $A(2 ; -5)$ et $B(-3 ; 2)$.

Exercice 1.1:

a) Que peut-on affirmer au sujet des vecteurs directeurs de deux droites parallèles ?

b) On considère la droite d d'équation : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'équation paramétrique de la droite parallèle à d et passant par $P(8 ; -9)$.

c) Déterminer l'équation paramétrique de la droite perpendiculaire à d et passant par $P(8 ; -9)$.

§ 1.3 Équation cartésienne de la droite dans le plan

Rappels : Vous avez étudié dans un cours d'algèbre de base qu'une droite dans un système d'axes pouvait s'exprimer sous la forme d'une fonction du type:

$$x \mapsto mx + h$$

- m s'appelle la pente et correspond au calcul :

$$m = \frac{\text{variation verticale}}{\text{variation horizontale}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- h s'appelle ordonnée à l'origine et donne la hauteur à laquelle la droite coupe l'axe y . Ce point d'intersection admet donc les coordonnées $H(0 ; h)$

Une telle droite peut également s'écrire sous la forme d'une **équation**:

$$y = mx + h$$

ou encore en "amenant" tous les termes du même "côté du =" :

$$ax + by + c = 0$$

où a , b et c sont si possible des entiers.

Les 2 formes d'équations cartésiennes d'une droite dans le plan:

(1) $y = mx + h$

(2) $ax + by + c = 0$

Exemples: • Donner une 2^e forme d'équation cartésienne de $y = -\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}$.

• Donner la 1^{re} forme d'équation cartésienne de $5x + 2y - 8 = 0$.

• Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite d'équation : $3x - 2y + 7 = 0$.

• Donner les 2 formes de l'équation cartésienne de la droite d passant par le point $H(0 ; 8)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.2: Déterminer les 2 formes de l'équation cartésienne de la droite :

a) de pente $m = -1/7$ et d'ordonnée à l'origine $h = -2$

b) de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ passant par $H(0 ; 1/2)$

Exercice 1.3: Les points suivants $P_1 (0 ; 1/4)$; $P_2 (-2/3 ; 0)$; $P_3 (5 ; -1)$ appartiennent-ils à la droite d'équation: $3x - 8y + 2 = 0$?

Exercice 1.4: On considère la droite $-3x + 2y - 6 = 0$. Chercher le point de cette droite:

- a) ayant une abscisse égale à 3 (*rappel: axe des abscisses = axe Ox*) ;
- b) ayant une ordonnée égale à -4 (*rappel: axe des ordonnées = axe Oy*)
- c) ayant ses deux coordonnées égales ;
- d) situé sur l'axe des abscisses ;
- e) situé sur l'axe des ordonnées ;
- f) situé sur la droite $5x - 7y + 4 = 0$.

§ 1.4 Les 4 démarches pour déterminer les équations cartésiennes d'une droite :

Type point – pente : Donner les 2 formes d'équation cartésienne de la droite passant par $A(2 ; 3)$ et de pente -2 .

Exercice 1.5: Appliquer la même démarche avec $A(-1 ; 7)$ et une pente de 3.

Type point – point : Donner les 2 formes d'équation cartésienne de la droite passant par $A(2 ; 3)$ et $B(-3 ; -5)$.

Exercice 1.6: Appliquer la même démarche avec $A(-3 ; 4)$ et $B(5 ; 7)$.

Type point – vect. dir : Donner les 2 formes d'équation cartésienne de la droite passant par $A(4 ; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.7: Appliquer la même démarche avec $A(1 ; -2)$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Type point – vect. normal : Donner les 2 formes d'équation cartésienne de la droite passant par $A(4 ; -1)$ et de vecteur normal $\vec{v}_\perp = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.8: Appliquer la même démarche avec $A(1 ; -2)$ et $\vec{v}_\perp = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.9: Déterminer la pente puis une des équations cartésiennes de la droite donnée par:

- a) un point $A(-5 ; 4)$ et le vecteur directeur $\vec{v} = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$;
- b) un point $A(3 ; -7)$ et la pente $m = -1/5$;
- c) un point $A(-1/2 ; 3/4)$ et le vecteur directeur $\vec{v} = -\frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2$;
- d) les deux points $A(7 ; 2)$ et $B(-5 ; 8)$;
- e) les deux points $A(4/3 ; 2/5)$ et $B(3/4 ; -1/3)$;
- f) un point $A(-7 ; 8)$ et le vecteur directeur $\vec{v} = \vec{e}_1$;
- g) un point $A(4 ; 5)$ et sachant qu'elle est parallèle à l'axe y .

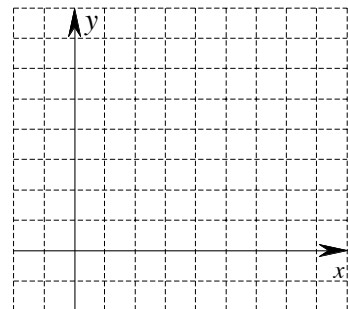
§ 1.5 Représentation d'une droite dans un système d'axes

1^{re} méthode: On calcule les coordonnées de deux points $(x ; y)$ satisfaisant l'équation de la droite.

- 2^e méthode:*
- (1) On exprime la droite sous la forme $y = mx + h$.
 - (2) On pose le point $H(0 ; h)$ qui correspond à l'ordonnée à l'origine.
 - (3) On construit depuis H le triangle de la pente m en utilisant que $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
 - (4) On relie H au point ainsi obtenu.
-

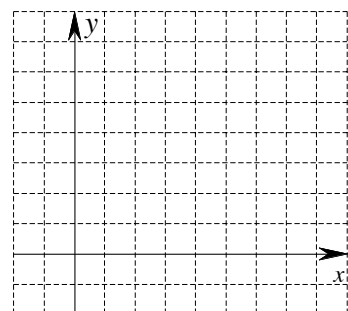
Exemple: Utiliser la 1^{re} méthode pour construire la droite :

$$(d) : 2x + 4y = 24$$

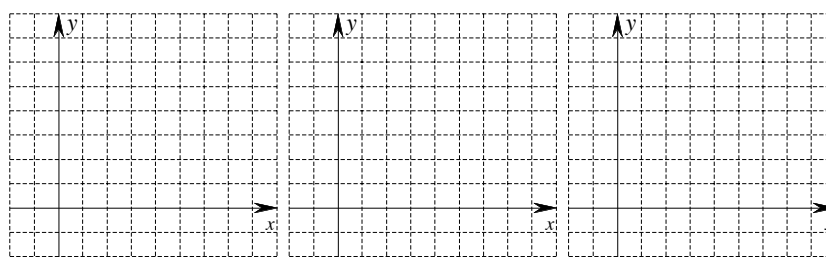


Exemple: Utiliser la 2^e méthode pour construire la droite :

$$(d) : 2x + 4y = 24$$



Exercice 1.10: Représenter les 3 droites sur les systèmes d'axes ci-dessous :



$$2x - 3y - 6 = 0$$

$$5x + 4y - 24 = 0$$

$$y = \frac{3}{4}x$$

☞ Cas particuliers des droites parallèles aux axes de coordonnées

Exemple: • Donner l'équation cartésienne de la droite passant par :
 $A(2 ; 3)$ et $B(4 ; 3)$.

- Donner l'équation cartésienne de la droite passant par
 $A(2 ; 3)$ et $B(2 ; 9)$.

Règles:

$x = c$, où c est une constante est l'équation cartésienne d'une **droite verticale**.
 $y = c$, où c est une constante est l'équation cartésienne d'une **droite horizontale**.

Exercice 1.11: En observant uniquement les coordonnées des points A et B , déterminer si la droite AB est horizontale, verticale ou oblique.

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| a) $A(2 ; -3)$ et $B(5 ; -3)$ | b) $A(2 ; -3)$ et $B(3 ; -5)$ |
| c) $A(2 ; -3)$ et $B(2 ; -8)$ | d) $A(0 ; 0)$ et $B(0 ; 1)$ |
| e) $A(-5 ; -3)$ et $B(-5 ; -3)$ | f) $A(1 ; 2)$ et $B(3 ; 4)$ |

Exercice 1.12: Exprimer dans chacun des cas suivants (si cela est possible) la pente et l'ordonnée à l'origine des droites puis les représenter dans un système d'axes orthonormé Oxy :

- | | |
|-----------------------------|-----------------------|
| a) $2x - 3y + 6 = 0$ | b) $5x + 3y - 15 = 0$ |
| c) $2,1x + 4,7y - 13,8 = 0$ | d) $-5y = 0$ |
| e) $2x + 5 = 0$ | f) $-3x + 9 = 0$ |
| g) $2x = 0$ | |

Exercice 1.13: Déterminer l'équation cartésienne de la droite parallèle à la droite $4x - 3y + 7 = 0$ et qui passe par le point $P(-7 ; 8)$. Même question avec $P(-2 ; 3)$ et $-3x + 5y + 15 = 0$.

§ 1.6 Transformation entre équation paramétrique et équation cartésienne

Exemples: • Donner l'équation cartésienne de : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Donner une équation paramétrique de $6x + 3y - 9 = 0$.

Exercice 1.14: Déterminer l'équation cartésienne de la droite donnée par le système d'équations paramétriques suivant: $\begin{cases} x = 7 - 4k \\ y = 3 + 5k \end{cases}$.

Exercice 1.15: Montrer que les équations suivantes représentent toutes la même droite.

a) $3x + 2y = 11$ b) $\begin{cases} x = 5 - 2k \\ y = -2 + 3k \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 1 - 3k \end{cases}$

d) $y = -3/2x + 11/2$ e) $6x + 4y = 22$ f) $\frac{9-x}{2} = \frac{y+8}{3}$

Exercice 1.16: On donne deux points $A(7 ; 2)$ et $B(-5 ; 8)$.
Soit $P(x ; y)$ un troisième point aligné avec A et B .

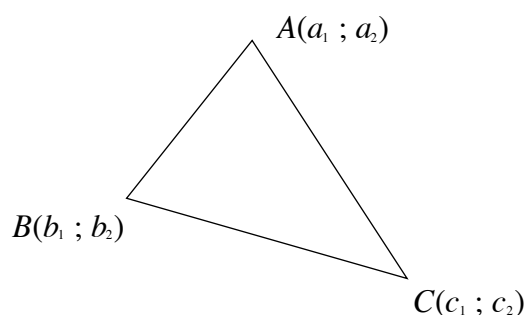
- a) Exprimer les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AP}$.
- b) Justifier pourquoi $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$.
- c) En déduire l'équation cartésienne de la droite AB .

Exercice 1.17: En utilisant la même méthode qu'à l'exercice précédent, déterminer l'équation cartésienne de la droite passant par les points $A(2 ; 3)$ et $B(5 ; -6)$.

Exercice 1.18: Passer en couleurs sur la figure ci-dessous l'ensemble de tous les points $P(x ; y)$ possibles tels que :

a) $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ b) $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$

c) $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ d) $\det \begin{pmatrix} c_1 - b_1 & x - a_1 \\ c_2 - b_2 & y - a_2 \end{pmatrix} = 0$



Exercice 1.19: On considère le triangle ABC défini par:
 $A(-1 ; 2)$, $B(3 ; -2)$ et $C(1 ; 3)$.

À l'aide de l'exercice qui précède, déterminer l'équation de:

- a) la médiatrice de AB .
b) la hauteur h_B issue de B .
c) la parallèle au côté BC passant par A .

Exercice 1.20: Soit les points $A(8 ; -3)$ et $B(5 ; 4)$.

Soit l'ensemble $E = \{ P(x ; y) \text{ tels que } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \}$

- a) Déterminer quel est cet ensemble de points.
- b) Représenter la situation dans un système d'axes Oxy .

§ 1.7 Intersection de deux droites

Exemple: • Déterminer les coordonnées du point d'intersection des 2 droites d et g d'équations : $y = \frac{-2}{3}x + 3$ et $7x - 12y - 9 = 0$

- Qu'en est-il si $(d): 3x + 2y - 1 = 0$ et $(g): \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \end{cases}$

Exercice 1.21: Trouver le point d'intersection I des paires de droites suivantes :

- a) $4x - 3y = 6$ et $6x + y = 20$
- b) $4(x + 3) = 3(6 - y)$ et $3x + 2y = 4$
- c) $5x + 4y = 7$ et $\begin{cases} x = 7 - 4k \\ y = 1 + k \end{cases}$
- d) $\begin{cases} x = -2 + k \\ y = -5 + 2k \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$

Exercice 1.22: Déterminer les éventuels points d'intersection I des 2 droites:

a) $4x - 6y = 3$ et $-2x + 3y = 5$

b) $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 - k \end{cases}$ et $x + y = 3$

Exercice 1.23: On considère les points $A(-2 ; -1)$, $B(4 ; 3)$, $C(1 ; 3)$, $D(5 ; 0)$.
Calculer les coordonnées de l'intersection des droites AB et CD .

Exercice 1.24: Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites AB et CD

a) $A(0 ; 2)$ $B(2 ; 3)$ $C(3 ; 5/2)$ $D(-2 ; 5/2)$

b) $A(0 ; 2)$ $B(2 ; 3)$ $C(1 ; 0)$ $D(3 ; 1)$

c) $A(1 ; 3)$ $B(3 ; 4)$ $C(5 ; 5)$ $D(-1 ; 2)$

Exercice 1.25: On considère les points $A(0 ; 1)$, $B(0 ; 6)$, $C(0 ; 5)$, $D(13/2 ; -1)$,
 $E(7 ; -4)$ et $F(-3 ; 13)$.
Déterminer les coordonnées des sommets du triangle défini par
les droites AB , CD et EF .

Exercice 1.26: a) On considère les points $A(3 ; -2)$, $B(-3 ; 2)$ et $C(0 ; -1)$.
Déterminer les équations cartésiennes des côtés du ΔABC .
b) Déterminer les équations cartésiennes des médianes du
 ΔABC .

Exercice 1.27: Déterminer les coordonnées des sommets du triangle ABC dont
les côtés sont situés sur les droites d'équations :

$$4x + 3y = 5 \quad ; \quad -x + 3y = 10 \quad ; \quad x = 2$$

Exercice 1.28: On donne trois sommets $A(1 ; 2)$, $B(6 ; 0)$ et $C(9 ; 2)$ d'un
parallélogramme $ABCD$. Déterminer les équations des côtés et
des diagonales du parallélogramme ainsi que les coordonnées du
sommet D .

Exercice 1.29: On donne les équations de deux côtés d'un parallélogramme
 $x - 2y = 4$, $x + 5y = -24$ et l'équation de l'une de ses diagonales
 $2x + 3y = -13$. Trouver l'équation de la seconde diagonale et les
coordonnées des sommets.

Exercice 1.30: Déterminer les équations des médianes du triangle de côtés:

$$2x - 3y = -5 \quad ; \quad 5x - 2y = 26 \quad ; \quad 3x + y = 9.$$

Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de ces
médianes ?

§ 1.8 La position relative de 2 droites

Exemple: Donner deux vecteurs perpendiculaires à la droite :

$$(d) : 5x + 2y - 7 = 0$$

puis l'équation de la droite perpendiculaire à d passant par $P(2 ; -3)$.

Exercice 1.31: Déterminer l'équation cartésienne de la droite perpendiculaire à la droite $4x - 3y + 7 = 0$ et qui passe par le point $P(-7 ; 8)$.
Même question avec $P(-2 ; 3)$ et $-3x + 5y + 15 = 0$.

Exercice 1.32: On donne les points $A(2 ; 1)$, $B(4 ; 5)$.
a) Déterminer l'équation cartésienne de la droite AB .
b) Déterminer l'équation cartésienne de la perpendiculaire à AB passant par A .
c) Déterminer l'équation cartésienne de la perpendiculaire à AB passant par B .

Exercice 1.33: On donne les points $A(2 ; 1)$, $B(4 ; 5)$. Considérons encore le point $P(x ; y)$ situé sur une perpendiculaire à AB passant par A .
En utilisant le produit scalaire, démontrer que x et y doivent vérifier la relation $x + 2y = 4$.

Ceci nous fournit une 2^e méthode pour déterminer l'équation cartésienne d'une droite $\perp$ à une autre.

Déterminer l'équation cartésienne de la perpendiculaire à AB passant par B .

Exercice 1.34: Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice de BC où $B(13 ; 4)$ et $C(11 ; 10)$.

THÉORÈME: On considère deux droites d et g dont les pentes valent m_d et m_g

$$d \text{ et } g \text{ sont } \mathbf{parallèles} \text{ ou } \mathbf{confondues} \Leftrightarrow m_d = m_g$$

$$d \text{ et } g \text{ sont } \mathbf{perpendiculaires} \Leftrightarrow m_d \cdot m_g = -1$$

preuve :

Exercice 1.35: Pour quelle(s) valeur(s) de t , les droites

$$(d): y = (t - 2)x + 3 \quad \text{et} \quad (g): 3x - ty = 0$$

sont-elles :

a) parallèles ?

b) perpendiculaires ?

THÉORÈME: Si d est une droite de pente m et α désigne l'angle d'inclinaison (orienté) entre l'axe Ox et d alors :

$$m = \tan \alpha$$

preuve :

Exercice 1.39: Calculer les sommets d'un parallélogramme dont on donne le sommet $A(10 ; 1)$, les équations de 2 côtés :

$$x - 2y + 5 = 0 \quad \text{et} \quad -x + 2y + 8 = 0,$$

ainsi que l'équation d'une diagonale : $6x - 25y = -43$.

Exercice 1.40: Représenter les droites $(d) : 4x + y = 3$ et $(g) : y = 1/2x + 2$. Déterminer

- a) l'angle entre Ox et d b) l'angle entre Ox et g
c) l'angle entre d et g .

Exercice 1.41: On donne $A(-4 ; -1)$ $B(-3 ; 2)$ $C(1 ; 4)$. Calculer le pt D tel que $ABCD$ soit un trapèze isocèle de base $[AD]$.

- Exercice 1.42:** a) Déterminer l'orthocentre (intersection des hauteurs) du triangle $A(2 ; 1)$ $B(-1 ; -1)$ $C(3 ; 2)$.
b) Prouver que les pieds des perpendiculaires, issues de $P(9 ; 5)$, aux côtés du triangle $A(8 ; 8)$ $B(0 ; 8)$ $C(4 ; 0)$ sont alignés.
c) Calculer les sommets d'un rectangle dont on donne 2 côtés $x = 2y$; $2y - x = 15$ et une diagonale $7x + y = 15$.

Exercice 1.43: Un rayon lumineux parcourt la droite $(d) : x - 2y = -5$, et il se réfléchit sur la droite $(e) : 3x - 2y = -7$. Quelle est l'équation du rayon réfléchi ?

- Exercice 1.44:** a) Calculer le sommet C du triangle ABC si $5x - 3y = -2$ est l'équation de AB , $4x - 3y = -1$ est l'équation de la hauteur issue de A et $7x + 2y = 22$ est celle de la hauteur issue de B .
b) Déterminer les équations des côtés du triangle ABC connaissant $C(4 ; -1)$, ainsi que les équations de la hauteur h et de la médiane m issue d'un même sommet:
 $(h) : 2x - 3y + 12 = 0$ et $(m) : 2x + 3y = 0$

Exercice 1.45: Déterminer les sommets A et C du triangle ABC dont on donne $B(2 ; -7)$, ainsi que les équations de la hauteur h issue de C et de la médiane m issue de A :
 $(h) : 3x + y = -11$ et $(m) : x + 2y = -7$.

Indication: pour déterminer C on posera $C(\alpha ; \beta)$ et on exprimera que $C \in h$ et que le milieu M de $[BC]$ est sur m .

Exercice 1.46: L'aire du triangle ABC vaut $3/2$. Deux de ses sommets sont $A(2 ; -3)$ et $B(3 ; -2)$, le centre de gravité du triangle se trouve sur la droite d d'équation $(d) : y = 3x - 8$.
Calculer les coordonnées de C .

Exercice 1.47:

D'un triangle ABC , on sait que $A(7 ; -5)$, $B(2 ; 3)$, son centre de gravité est situé sur la droite d d'équation

$$(d) : x - 3y - 3 = 0.$$

Déterminer les coordonnées du troisième sommet C , si l'on sait encore que sa première coordonnée est le double de sa deuxième.

Chapitre 2 : Distance point-droite et bissectrices

§ 2.1 L'équation normale d'une droite

Introduction : L'équation normale d'une droite nous permettra de calculer la distance d'un point à une droite ainsi que d'établir les équations cartésiennes des bissectrices d'une paire de droites données.

Définition : L'équation normale d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est définie par :

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

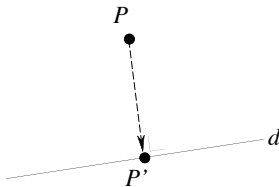
Exemple : Soit $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ l'équation cartésienne d'une droite. L'équation normale de cette droite est :

Exercice 2.1: Déterminer l'équation normale des droites suivantes :

- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| a) $3x + 4y - 4 = 0$ | b) $y = 2,4x - 0,4$ |
| c) $15x + 8y - 7 = 0$ | d) $y = \frac{4}{3}x - 5$ |
| e) $y - 4 = 0$ | f) $x = 5$ |
| g) $y = x$ | h) $6x - 8y = 29$ |

§ 2.2 Projection orthogonale et distance d'un point à une droite

Définition : Soit d une droite et P un point hors de d . On appelle **projection orthogonale de P sur d** le point P' de d tel que :



$$PP' \perp d$$

- Exercice 2.2:**
- Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du point $P(-2 ; 6)$ sur la droite AB avec $A(0 ; -3)$ et $B(5 ; 0)$.
 - Calculer les coordonnées du symétrique du point $P(12 ; 1)$ relativement à la droite $3x + 2y = 12$.

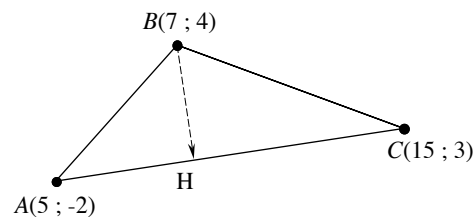
Exercice 2.3: On considère le triangle ABC donné par ses sommets :

$$A(2 ; -3), B(3 ; 2) \text{ et } C(-2 ; 5)$$

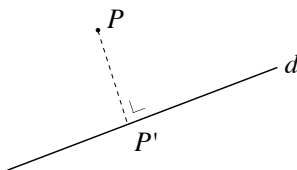
- a) Déterminer la mesure de la hauteur issue de A .
- b) En déduire l'aire du triangle ABC .

Exercice 2.4: Soit le triangle ABC , on considère le point H projection orthogonale de B sur AC .

- a) En déduire les coordonnées de H .
- b) Déterminer $\|\overrightarrow{BH}\|$.
- c) En déduire la distance entre le point B et la droite AC .



Définition : La **distance** du point P à la droite d est notée $\delta(P ; d)$. Elle est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{PP'}$, où P' est la projection de P sur d .



THÉORÈME : La distance du point $P(x_P ; y_P)$ à la droite $(d) : ax + by + c = 0$ est donnée par la formule suivante:

$$\delta(P ; d) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

*Preuve: l'utilisation et la mémorisation de cette formule sont prioritaires par rapport à une preuve.
Ainsi nous acceptons cette formule sans preuve.*

Exemple : • Calculer $\delta(P ; d)$ où $(d) : 3x - 4y = 6$ et $P(1 ; -2)$.

Une autre méthode sûre, mais longue consisterait à:

- (a) Exprimer la pente de d puis la pente d'une droite $\perp$ à d
 - (b) Déterminer l'équation de la droite $g \perp d$ et passant par P
 - (c) Déterminer le point $P' = d \cap g$
 - (d) Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{PP'}$
- Soit encore la droite $(h) : x + y = 1$, trouver les points de h qui sont situés à une distance égale à 3 de d .

Exercice 2.5: Reprendre l'exercice 2.3 en utilisant la formule $\delta(A, d)$ où d est l'équation de BC .

Exercice 2.6: Calculer la distance du point A à la droite d :

a) $A(2 ; -1)$, $(d) : 4x + 3y + 10 = 0$

b) $A(0 ; -3)$, $(d) : 5x = 12y + 23$

c) $A(-2 ; 3)$, $(d) : 4y = 3x - 2$

d) $A(1 ; -2)$, $(d) : x = 2y + 5$

Exercice 2.7: Calculer l'aire d'un carré dont l'un des sommets est $A(2 ; -5)$ et dont l'un des côtés a pour support la droite $(d) : x = 2y + 7$.

Exercice 2.8: Calculer l'aire d'un rectangle connaissant le sommet $A(-2 ; 1)$ ainsi que les équations de deux côtés non parallèles : $3x = 2y + 5$ et $4x + ay + 14 = 0$.

Exercice 2.9: Calculer la distance qui sépare les droites d'équation $4x - 3y = 8$ et $8x = 6y$, après avoir vérifié leur parallélisme. Déterminer l'équation de la droite g située à équidistance de ces 2 droites.

Exercice 2.10: Déterminer les équations des droites situées à distance 1 de la droite $4x - 3y = 8$.

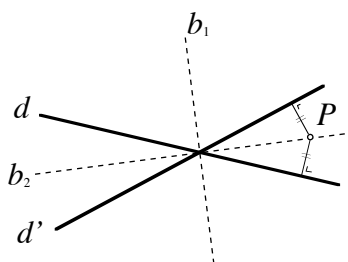
Exercice 2.11: On donne 3 droites par leurs équations:

$$(d) : x + y = 1 \quad (g) : 3x + 4y = 0 \quad (h) : x + 5 = 0$$

Calculer $P \in d$ tel que $\delta(P ; g) = 2 \cdot \delta(P ; h)$.

§ 2.3 Bissectrices de deux droites.

Remarque préliminaire : Un point P se trouve sur l'une des bissectrices des droites d et d'



$$\delta(P ; d) = \delta(P ; d').$$

On peut facilement prouver que les deux bissectrices sont perpendiculaires.

THÉORÈME: Soit d et d' deux droites sécantes :

$$(d) : ax + by + c = 0 \quad , \quad (d') : a'x + b'y + c' = 0.$$

Les équations des deux bissectrices de d et d' sont données par:

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

Preuve:

Exemple : Déterminer les équations des bissectrices des droites :

$$(d) : 3x + 4y + 2 = 0 \quad \text{et} \quad (g) : y = \frac{-5}{12}x + \frac{1}{12}.$$

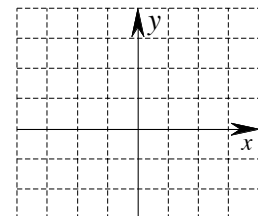
Exercice 2.12: a) Calculer les équations des bissectrices des droites d'équation

$$3x - 4y + 2 = 0 \quad \text{et} \quad 5x + 12y - 1 = 0.$$

b) Idem pour $x + 2y = 7$ et $4x - 2y - 9 = 0$.

Exemple : Déterminer les équations des bissectrices de l'axe Ox et de la droite d'équation $(d) : y = \frac{4}{3}x$.

Exemple : Quelle est, parmi les 2 solutions, la bissectrice passant dans le 1^{er} quadrant ?



Exercice 2.13: Déterminer l'équation de la bissectrice de l'angle obtus déterminé par les droites d'équation :

$$x = 3y - 5 \quad \text{et} \quad y = 3x + 15.$$

Exercice 2.14: On donne $(d) : y = x$ et $(g) : 3x + 4y - 12 = 0$. Déterminer un point de d situé à la même distance de g et de l'axe Ox .

Exercice 2.15: Déterminer l'équation de la bissectrice de l'angle déterminé par les droites d'équation $2x = 3y + 5$ et $4y = 6x + 7$ qui coupe Ox dans sa partie négative.

Exercice 2.16: Déterminer les équations des bissectrices intérieures du triangle formé par $A(-5 ; -5)$ $B(-5 ; 10)$ $C(15 ; -5)$.

Exercice 2.17: Calculer les coordonnées du centre et le rayon du cercle inscrit dans le triangle, dont les côtés ont pour équation :

$$(a) : 3y = 4x + 24, \quad (b) : 12x + 5y = 33, \quad (c) : 3x + 4y + 11 = 0.$$

Exercice 2.18: On donne:

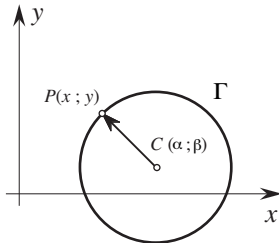
- le point $P(2 ; -1)$;
- les droites d et g d'équation respective:
 $y = 2x + 5$ et $3x + 6y = 1$;
- le point A , situé à l'intersection des droites d et g .

Déterminer les équations des droites passant par P et qui forment avec les droites d et g des triangles isocèles en A .

Exercice 2.19: On donne deux droites $(d) : x + 7y = 23$ et $(g) : x - y + 9 = 0$, ainsi que les points $P(3 ; 0)$ et $Q(-9 ; 6)$.
 Calculer les points qui sont à la fois équidistants de d et de g et équidistants de P et de Q .

Chapitre 3 : Équation du cercle dans le plan

§ 3.1 Les deux formes d'équation de cercle



- **La forme “centre et rayon”**

Soit Γ un cercle de centre $C(\alpha ; \beta)$ et de rayon R .

$$\begin{aligned} \text{Le point } P(x ; y) \in \Gamma &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{CP}\| = R \Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} \right\| = R \\ &\Leftrightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \end{aligned}$$

Formule : L'équation cartésienne du cercle centré en $C(\alpha ; \beta)$ et de rayon R est donnée par la formule:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Exemple : $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ est l'équation d'un cercle centré en $C(4 ; -1)$ et de rayon 3.

- **La forme développée**

On rencontrera aussi des équations de cercle sous la forme développée : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Forme centre-rayon :



Forme développée

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

Forme développée :



Forme centre-rayon

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$$

Exercice 3.1: Les équations suivantes sont-elles des équations développées de cercle ? Si oui, préciser le centre et le rayon

- a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$ b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$
 c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$ d) $x^2 + y^2 + x = 0$

Exercice 3.2: Déterminer l'équation du cercle défini par les conditions suivantes:

- a) le centre est $C(2 ; -3)$ et le rayon vaut 7 ;
 b) le cercle passe par l'origine et son centre est $C(6 ; -8)$;
 c) $[AB]$ est un diamètre du cercle où $A(3 ; 2)$ $B(-1 ; 6)$;
 d) le centre du cercle est $C(1 ; -1)$ et le cercle est tangent à $(d) : 5x + 9 = 12y$;
 e) le cercle passe par $A(3 ; 1)$ et $B(-1 ; 3)$ et est centré sur $(d) : 3x = y + 2$;
 f) le cercle est tangent à $(d) : x + y = 4$ en $T(1 ; 3)$ et est centré sur Ox ;
 g) le cercle passe par $A(-1 ; 5)$ $B(-2 ; -2)$ $C(5 ; 5)$.

Exercice 3.3: Déterminer les équations des cercles qui ont leur centre sur la droite $4x - 5y = 3$ et qui sont tangents aux deux droites :

$$2x = 3y + 10 \text{ et } 2y = 3x + 5.$$

Exercice 3.4: Déterminer les équations des cercles de rayon $\sqrt{5}$ qui sont tangents à la droite $x - 2y = 1$ au point $T(3 ; ?)$.

Exercice 3.5: Déterminer l'équation du cercle qui, ayant son centre sur la droite $2x + y = 0$, est tangent aux droites :

$$3y = 4x + 10 \quad \text{et} \quad 4x = 3y + 30.$$

Exercice 3.6: Déterminer les équations des cercles tangents aux droites

$$y = 7x - 5 \quad \text{et} \quad x + y + 13 = 0,$$

l'un des points de contact étant $T(1 ; 2)$.

Exercice 3.7: Déterminer les équations des cercles tangents aux trois droites :

$$3y = 4x - 10 \quad ; \quad 3x = 4y + 5 \quad \text{et} \quad 3x - 4y = 15.$$

Exercice 3.8: On propose dans cet exercice une autre méthode pour déterminer l'équation d'un cercle passant par trois points

$$A(1 ; 1) \quad B(1 ; -1) \quad \text{et} \quad C(2 ; 0).$$

Poser que l'équation du cercle est de la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

et former un système de 3 équations à 3 inconnues.

Exercice 3.9: Soit les points $A(3 ; 3)$ et $B(5 ; 3)$. Déterminer l'ensemble E de tous les points $P(x ; y)$ du plan vérifiant $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 8$. Représenter la situation sur une figure d'étude.

§ 3.2 Intersections et position relative:

Exemple : • Combien y a-t-il de points d'intersection entre Γ et d si:

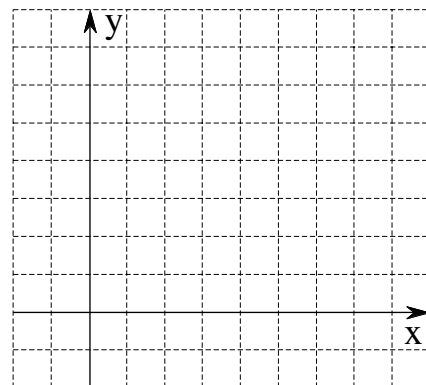
$$(\Gamma) : x^2 + (y + 2)^2 = 25 \quad \text{et} \quad (d) : x - 2y + 1 = 0.$$

- Quelles sont les coordonnées de ces points d'intersection ?

Exemple : • Calculer les points d'intersection entre les cercles Γ et Γ' si :

$$(\Gamma) : (x - 1)^2 + y^2 = 4 \quad \text{et} \quad (\Gamma') : (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 20$$

Représenter approximativement la situation :



Exercice 3.10: Quelle est la position du point $B(3 ; 9)$ par rapport au cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 - 26x + 30y = -313$?

Déterminer la plus courte distance d'un point de Γ au point B .

Exercice 3.11: Déterminer si la droite et le cercle se coupent, sont tangents ou extérieurs dans les cas suivants:

a) $y = 2x - 3$ $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$

b) $x - 2y - 1 = 0$ $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$

c) $y = x + 10$ $x^2 + y^2 = 1$

Exercice 3.12: Calculer le(s) point(s) d'intersection entre le cercle et la droite d'équations:

a) $x^2 + y^2 = 25$ et $2x - y - 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ et $3x - 4y - 19 = 0$

Exercice 3.13: Calculer la longueur de la corde commune aux cercles :

$$(\Gamma_1) : x^2 + y^2 = 10x + 10y \quad (\Gamma_2) : x^2 + y^2 + 6x + 2y = 40$$

Exercice 3.14: Déterminer l'équation du diamètre du cercle :

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y = 17$$

qui est perpendiculaire à la droite $5x + 2y = 13$.

Exercice 3.15: Calculer les points d'intersection entre le cercle $x^2 + y^2 + 15x - 12y + 36 = 0$ et les axes de coordonnées.

Exercice 3.16: Déterminer l'équation d'un cercle tangent à Ox et passant par $A(-2 ; 1)$ et $B(5 ; 8)$.

Exercice 3.17: Déterminer les équations des cercles tangents à $x + y - 10 = 0$ et passant par $A(7 ; 1)$ et $B(-5 ; 5)$.

Exercice 3.18: Déterminer les équations des cercles passant par l'origine et qui sont tangents aux droites $x + 2y = 9$ et $y = 2x + 2$.

Exercice 3.19: Déterminer les équations des cercles passant par $A(-1 ; 5)$ et qui sont tangents aux droites $3x + 4y = 35$ et $4x + 3y + 14 = 0$.

§ 3.3 Tangentes à un cercle:

Remarque initiale : On sera souvent confronté au problème suivant:
Mener par un point P une tangente à un cercle Γ .

- Ce problème admet deux solutions si
- Ce problème admet une solution si
- Aucune solution si

Pour savoir dans quel cas on se trouve, on compare le rayon du cercle Γ et la distance entre le point P et le centre du cercle.

- **Problème 1** Trouver la tangente à un cercle Γ par un point T du cercle.

Résoudre ce problème si $(\Gamma) : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 2$ et $T(2 ; -2)$

1^{ère} démarche (analytique):

2^{ème} démarche (vectorielle):

Exercice 3.20: Après avoir vérifié que le point T est sur le cercle Γ , déterminer les équations des tangentes à Γ au point T dans les cas suivants:

- *1^{ère} démarche (analytique):*
 - a) $T(-1 ; 2)$ $(\Gamma) : x^2 + y^2 = 5$
 - b) $T(-5 ; 7)$ $(\Gamma) : (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$
- *2^{ème} démarche (vectorielle):*
 - c) $T(0 ; 0)$ $(\Gamma) : x^2 + y^2 = 3x - 7y$
 - d) $T(-1 ; 2)$ $(\Gamma) : x^2 + y^2 - 2x + 6y = 19$
- *démarche libre:*
 - e) $T(2 ; 3)$ $(\Gamma) : 2x^2 + 2y^2 = x + 4y + 12$

- **Problème 2** Trouver les tangentes à un cercle Γ ayant une direction connue.

Trouver les tangentes à $(\Gamma) : (x + 1)^2 + y^2 = 4$ qui sont parallèles à $(d) : 3x + 4y = 2$

Exercice 3.21:

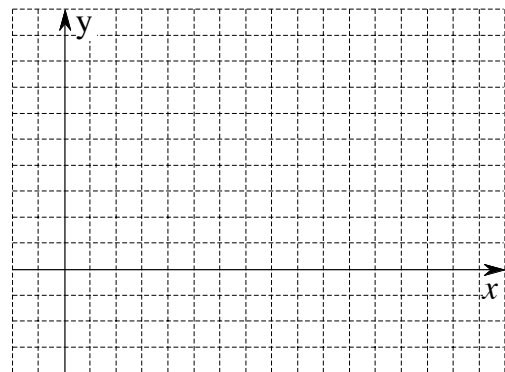
a) Déterminer les équations des tangentes au cercle

$$x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6,$$

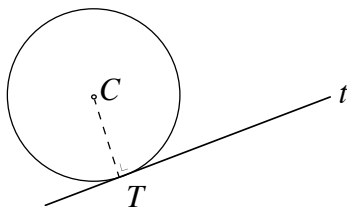
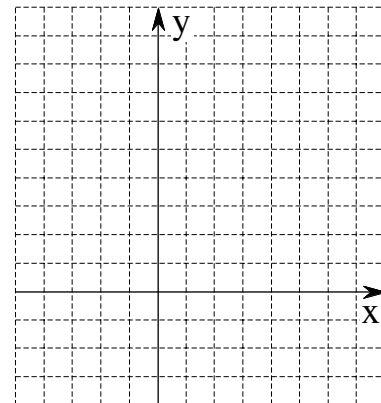
de direction parallèle à la droite $2x + y = 7$.

b) Déterminer les équations des tangentes au cercle

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0,$$

de direction perpendiculaire à la droite $x = 2y + 345$.**Exercice 3.22:**On donne une droite $(g) : 3x + 4y - 34 = 0$ et un cercle
 $(\Gamma) : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Vérifier que g est tangent à Γ et trouver les équations des 3 droites formant avec g un carré circonscrit à Γ .
• **Problème 3**Trouver les tangentes à un cercle Γ issues d'un point extérieur P .Résoudre ce problème si $(\Gamma) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ et $P(16 ; -3)$ 

Résoudre ce problème si $(\Gamma) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ et $P(-4 ; 9)$



Remarque finale : Si l'on veut calculer les coordonnées des points de tangence connaissant les équations du cercle et des 2 tangentes, la méthode la plus rapide consiste à utiliser la perpendiculaire à la tangente, passant par le centre du cercle.

Exercice 3.23: Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 5$ issues du point $A(5/3 ; -5/3)$.

Exercice 3.24: Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 19 - 2x$ issues du point $A(1 ; 6)$.
Calculer les coordonnées des points de tangence.

Exercice 3.25: Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$ issues du point $A(6 ; 5)$.

Exercice 3.26: Prouver que les cercles d'équation $x^2 + y^2 = 49$ et $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ sont tangents en un point A à déterminer. Sont-ils tangents intérieurement ou extérieurement ?

Exercice 3.27: Calculer le sommet C du triangle ABC connaissant $A(-15 ; -5)$, $B(1 ; 7)$ et sachant que l'origine est le centre du cercle inscrit au triangle ABC .

Chapitre 4: Géométrie analytique dans l'espace

Prérequis: Géom. vectorielle dans V_3 , géom. analytique dans le plan

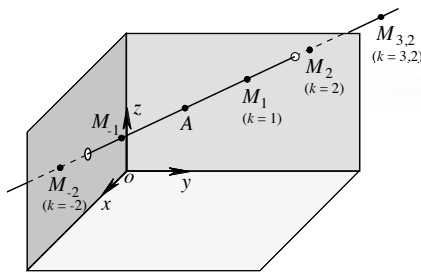
Requis pour: Algèbre linéaire, examen de maturité.

§ 4.1 Équation paramétrique de la droite dans l'espace

Convention Dans tout ce chapitre de géométrie analytique dans l'espace, nous travaillerons dans l'espace V_3 , muni d'un repère orthonormé direct.

Définition Une droite est définie par un de ses points et par un **vecteur directeur** donnant la direction de la droite.

On trouve tous les points de la droite en faisant varier le paramètre $k \in]-\infty ; +\infty[$.



- Soit la droite d passant par le point $A(a_1 ; a_2 ; a_3)$ et de

vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Alors

$$M(x ; y ; z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{v} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{v} \quad k \in \mathbb{R}$$

Équation paramétrique d'une droite dans l'espace

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$$

Système d'équations paramétriques d'une droite dans l'espace

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 + k \cdot v_1 \\ y = a_2 + k \cdot v_2 \\ z = a_3 + k \cdot v_3 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

Exemple Soit la droite (d) : $\begin{cases} x = 3k + 1 \\ y = 2k \\ z = -5k + 2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

Donner deux équations paramétriques différentes de cette droite d .

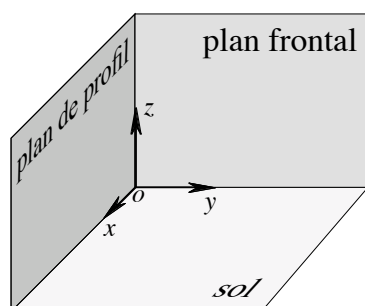
Exercice 4.1 : Soit le point $A(2 ; 0 ; 3)$. Donner un système d'équations paramétriques des droites suivantes:

- a) d_1 passant par A et $B(1 ; 4 ; 5)$.
- b) d_2 passant par A et parallèle à la droite (g) :
$$\begin{cases} x = 2k - 1 \\ y = 3k \\ z = 5k + 2 \end{cases}$$
- c) d_3 passant par A et parallèle à l'axe Oy .

Exercice 4.2 : Une droite d est définie par un point $A(2 ; 4 ; 5)$ et un vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) Le point $P(5 ; -8 ; 12)$ appartient-il à la droite d ?
- b) Le point $Q(x ; y ; \lambda)$ appartient à d . Compléter les 2 premières coordonnées de Q en fonction de λ .

Exercice 4.3 : Préciser la position particulière des droites d ci-dessous :



- a) d passe par $A(2 ; 1 ; 3)$ et $B(0 ; -1 ; 3)$
- b) d passe par $A(2 ; 3 ; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- c) d passe par $A(0 ; 0 ; 1)$ et $B(0 ; 1 ; -2)$
- d) d passe par $A(1 ; -2 ; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exemple Calculer le point d'intersection des 2 droites suivantes :

$$(d): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (e): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

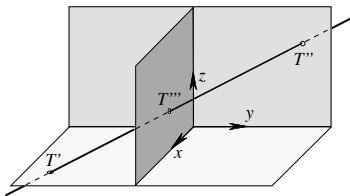
Exercice 4.4 : Calculer le point d'intersection des deux droites sécantes suivantes:

$$\text{a) } (d): \begin{cases} x = 13 + 5k \\ y = -3 - 2k \\ z = 5 + 3k \end{cases} \quad (e): \begin{cases} x = n \\ y = -2n + 7 \\ z = -1 \end{cases}$$

b) La droite d passant par $A(1 ; 2 ; -3)$ et $B(-2 ; 3 ; -1)$ et la droite e passant par $C(-3 ; 0 ; -15)$ et $D(-1 ; -4 ; -31)$.

$$\text{c) } (d): \begin{cases} x = 5 - k \\ y = 7k \\ z = -1 + 2k \end{cases} \quad (e): \begin{cases} x = 4 + n \\ y = 7 - 3n \\ z = 2 + n \end{cases}$$

Définition On appelle **traces d'une droite** les points d'intersection de cette droite avec les plans de référence Oxy , Oxz et Oyz .



La plupart du temps, la trace est un point, mais cela peut aussi être une droite.

$$T'(\dots ; \dots ; 0) , \quad T''(0 ; \dots ; \dots) , \quad T'''(\dots ; 0 ; \dots)$$

Il peut aussi ne pas y avoir de trace sur un plan de référence.

Exercice 4.5 : Déterminer les traces T' , T'' et T''' des droites suivantes:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9/2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dans chaque cas, **représentez la situation** dans un système d'axes.

Exercice 4.6 : Soit la droite d passant par les points $A(6 ; 2 ; 1)$ et $B(-3 ; 8 ; -2)$.

- Déterminer les trois traces de d .
- Représenter la situation dans un système d'axes.
- Construire sur votre figure les projections de d sur les trois plans.

§ 4.2 Équations cartésiennes de la droite dans l'espace

Définition Dans le cas où les composantes v_1 , v_2 et v_3 du vecteur directeur $\vec{v}$ sont toutes trois non nulles, la droite d peut être caractérisée par *la double égalité* :

$$(d): \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3} \quad v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \neq 0$$

Appelées **équations cartésiennes** de d .

Exemple Déterminer les équations cartésiennes de la droite:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.7 : Déterminer les équations cartésiennes des droites suivantes:

a) $\begin{cases} x = 4 - 3k \\ y = 6k \\ z = 8 - 5k \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 - 2k \\ z = 1 + k \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = -13 \\ x + z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

Exercice 4.8 : Donner une équation paramétrique de la droite :

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{2}$$

Exercice 4.9 : Montrer que les systèmes d'équations suivants déterminent la même droite.

$$\text{a) } (d): \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 - 2k \\ z = 1 + k \end{cases} \quad (g): \begin{cases} x = 5 + 2r \\ y = 3 - 2r \\ z = 2 + r \end{cases} \quad (h): \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 9 - s \\ z = -1 + 0,5s \end{cases}$$

$$\text{b) } (d): \begin{cases} 16x - 2y - 11z = 0 \\ 14x - y - 10z = 3 \end{cases} \quad (g): \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{4}$$

Exercice 4.10 : *Souvenirs, souvenirs... de 1^{re} année :*

Dans chacun des cas suivants, les droites AB et CD sont-elles gauches, strictement parallèles, confondues ou sécantes ?

Si elles sont sécantes, déterminer leur point d'intersection.

- | | |
|--------------------|------------------|
| a) $A(6 ; 4 ; -4)$ | $B(4 ; 0 ; -2)$ |
| $C(7 ; 0 ; -2)$ | $D(11 ; -4 ; 0)$ |
| b) $A(-4 ; 2 ; 1)$ | $B(-1 ; 1 ; 3)$ |
| $C(0 ; 5 ; -2)$ | $D(9 ; 2 ; 4)$ |
| c) $A(8 ; 0 ; 3)$ | $B(-2 ; 4 ; 1)$ |
| $C(8 ; 3 ; -2)$ | $D(0 ; 0 ; 5)$ |
| d) $A(2 ; -3 ; 1)$ | $B(3 ; -2 ; 3)$ |
| $C(0 ; -5 ; -3)$ | $D(5 ; 0 ; 7)$ |

Exercice 4.11 : On considère la droite d_1 , passant par le point $A(2 ; 1 ; 1)$, de vecteur directeur $\vec{v}$ ainsi que la droite d_2 passant par le point $B(-5 ; 2 ; -7)$, de vecteur $\vec{w}$, où

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m-1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} = \begin{pmatrix} 2-m \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R}.$$

Étudier, selon les valeurs de m , les positions des droites d_1 et d_2 .

Exercice 4.12 : On donne deux droites g et h par leur représentation paramétrique:

$$(g): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } (h): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Soit P un point variable de la droite g et Q un point variable de la droite h . Quelle condition les paramètres réels k et n doivent-ils vérifier pour que la droite PQ soit parallèle au plan d'équation $z = 0$.
- Cette condition étant vérifiée, quel est le lieu géométrique des milieux des segments PQ ?

- Remarques**
- 1) Contrairement à ce que l'on a vu dans le cas du plan, la représentation en équations cartésiennes d'une droite dans l'espace est moins pratique à manipuler que sous sa forme de systèmes d'équations paramétriques.
 - 2) Une équation cartésienne d'une droite dans le plan était donnée sous la forme:

$$ax + by + c = 0$$

Question

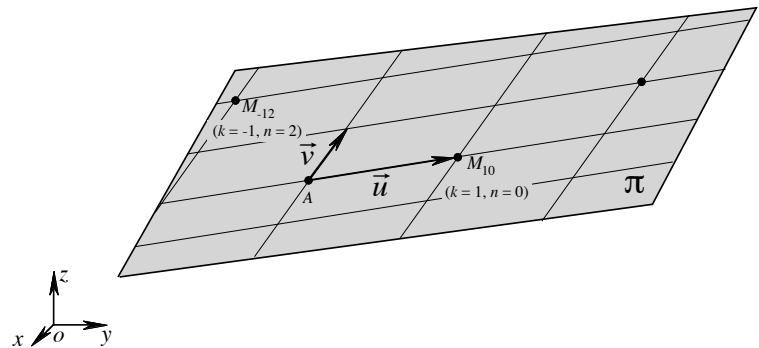
Pourquoi ne peut-on pas généraliser ceci dans l'espace et obtenir une équation cartésienne sous la forme:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad ?$$

§ 4.3 Équation du plan dans l'espace

Rappel: Un plan peut être déterminé par:

- trois points non alignés
- deux droites sécantes
- deux droites parallèles distinctes
- une droite et un point n'appartenant pas à cette droite



Soit le plan π passant par le point $A(a_1 ; a_2 ; a_3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

$$M(x ; y ; z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v} \quad k, n \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v} \quad k, n \in \mathbb{R}$$

*Équations paramétriques
d'un plan dans l'espace*

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad k, n \in \mathbb{R}$$

*Système d'équations paramétriques
d'un plan dans l'espace*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 + k \cdot u_1 + n \cdot v_1 \\ y = a_2 + k \cdot u_2 + n \cdot v_2 \\ z = a_3 + k \cdot u_3 + n \cdot v_3 \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{R}$$

Exemple: Déterminer une équation paramétrique du plan α passant par les points $A(2 ; 3 ; 5)$, $B(1 ; 0 ; 5)$ et $C(6 ; 5 ; 6)$.

Exercice 4.13 : Déterminer une équation paramétrique des plans suivants:

a) α contenant le point $A(1 ; 2 ; 5)$ et la droite d définie par

$$B(6 ; 0 ; 0) \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) α contenant les deux droites :

$$d \text{ passant par } A(2 ; 0 ; 3) \text{ de vecteur directeur } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g \text{ passant par } B(4 ; 0 ; 0) \text{ de vecteur directeur } \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.14 : On donne le plan α par son équation paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Les points ci-dessous appartiennent-ils au plan α ?

a) $A(-2 ; 7 ; 8)$ b) $B(4 ; 4 ; 3)$ c) $C(11/6 ; -29/6 ; 15)$

Rappel de 1^{re}

3 vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \end{array}$$

Exemple Les 3 vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 4.15 : Montrer que les quatre points $A(-4 ; 0 ; 3)$, $B(-2 ; 3 ; 0)$, $C(0 ; 2 ; 1)$ et $D(2 ; 1 ; 2)$ sont coplanaires.

- a) En montrant qu'un des points vérifie l'équation du plan formé par les trois autres.
- b) Par un critère de coplanarité de 3 vecteurs.

Exercice 4.16 : On donne les points $A(1 ; -3 ; -1)$, $B(0 ; 1 ; 1)$, $C(-1 ; -4 ; 0)$ définissant un plan α . On considère encore un point $M(x ; y ; z)$ appartenant à α .

- a) Que pouvez-vous affirmer au sujet des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- b) Exprimer le $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et en déduire une équation du plan α .

Équation cartésienne d'un plan

Soit le plan π passant par le point $A(a_1 ; a_2 ; a_3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

$$M(x ; y ; z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v} \text{ coplanaires}$$

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - a_1 & u_1 & v_1 \\ y - a_2 & u_2 & v_2 \\ z - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

En développant ce déterminant, on obtient **une équation cartésienne** du plan du type:

$$ax + by + cz + d = 0$$

où a, b et c non tous nuls.

Exemple: Déterminer une équation cartésienne du plan α passant par les points $A(2 ; 3 ; 5)$, $B(1 ; 0 ; 5)$ et $C(6 ; 5 ; 6)$.

Exercice 4.17 : Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans suivants:

a)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{cases} x = 2 + k - 3n \\ y = 5 - k + 2n \\ z = 1 + k - n \end{cases}$$

Exercice 4.18 : Déterminer une équation cartésienne du plan passant par les points $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$ et $C(0 ; 0 ; c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 4.19 : Déterminer une équation cartésienne du plan α passant par le point $P(4 ; 2 ; 1)$ et contenant la droite $(d) :$

$$\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 - 3k \\ z = 3 + k \end{cases}$$

Exercice 4.20 : Déterminer une équation cartésienne des plans α et β tels que α est perpendiculaire au plan Oxy , β passe par le point $B(2 ; -3 ; 1)$ et $\alpha \cap \beta$ est la droite d'équations paramétriques:

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = 1 + 3k \end{cases}$$

Exercice 4.21 : a) Déterminer une équation cartésienne du plan α passant par le point $P(2 ; -5 ; 3)$ et parallèle au plan :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Même question avec le point $P(2 ; 2 ; -2)$ et le plan

$$x - 2y - 3z = 0$$

Exercice 4.22 : a) Déterminer un vecteur perpendiculaire au plan formé par les points $A(2 ; 3 ; 5)$, $B(1 ; 0 ; 5)$ et $C(6 ; -2 ; 5)$.

Indication : Comment est défini le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$?

b) Déterminer $\vec{n}$ un vecteur perpendiculaire au plan $2x + 3y - z + 3 = 0$

Définition On appelle **vecteur normal** à un plan π tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan.

Formule Le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ admet le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Preuve : La preuve sera vue plus loin après des rappels sur le produit scalaire.

Exemple Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan $2x - y + 3z + 5 = 0$.

Application

- Si deux plans sont parallèles, alors les vecteurs normaux sont colinéaires et donc les coefficients a , b et c de leur équation cartésienne sont proportionnels.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y - z + 4 = 0 \\ -x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z - 19 = 0 \end{array} \right\} \text{ sont deux plans parallèles.}$$

- Les deux plans seront strictement parallèles (et donc non confondus) si le coefficient d de leur équation cartésienne n'admet pas le même facteur de proportionnalité que les autres coefficients.

Exemple Déterminer une équation cartésienne du plan β parallèle au plan (α) : $3x + 5y - 2z + 5 = 0$ passant par le point $P(2 ; 3 ; -1)$.

Exercice 4.23 : Déterminer une équation cartésienne du plan :

- a) passant par $P(-2 ; 6 ; 7)$ et admettant le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal;
- b) passant par $P(-6 ; 10 ; 16)$ et étant perpendiculaire à la droite $(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$
- c) passant par $P(3 ; 1 ; 1)$ et étant perpendiculaire à la droite AB où $A(1 ; 0 ; 5)$ et $B(3 ; -3 ; 2)$.

Exercice 4.24 : On donne les six points $A(1 ; 4 ; 1)$, $B(-2 ; -8 ; 3)$, $C(-5 ; -11 ; 5)$, $P(3 ; 5 ; -1)$, $Q(3 ; -11 ; -1)$ et $R(0 ; -3 ; 1)$.

Montrer que les plans ABC et PQR sont parallèles.

Exercice 4.25 : Déterminer une équation cartésienne d'un plan parallèle au ...

- a) plan $2x - 5y + z - 3 = 0$ et passant par l'origine.
- b) plan $2x - 5y + z - 3 = 0$ et passant par $A(2 ; -1 ; 4)$.

Exercice 4.26 : On donne les équations de deux plans. Déterminer si ces plans sont sécants, strictement parallèles ou confondus.

- a) $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et $3x + 2y + 5z - 4 = 0$
- b) $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et $6x - 4y + 10z - 7 = 0$
- c) $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et $-15x + 10y - 25z + 20 = 0$
- d) $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et $\begin{cases} x = 4 + 2k + 5n \\ y = 2 + 3k \\ z = -3n \end{cases}$
- e) $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et $\begin{cases} x = 2 + k - n \\ y = 1 + 3k - 2n \\ z = -k + n \end{cases}$
- f) $\begin{cases} x = 1 + 3k - 2n \\ y = 1 - k + n \\ z = 3 + k - n \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 2 + p + 5q \\ y = 2 - 2q \\ z = 2 + 2q \end{cases}$

Exemple Position d'une droite par rapport à un plan

On considère la droite d et le plan α définis par:

$$(d) : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 5 - k \\ z = 1 + 3k \end{cases} \quad \text{et} \quad (\alpha) : 3x - 2y - z = 3$$

- a) Calculer $\vec{v}_d \cdot \vec{n}_\alpha$. Qu'en déduisez-vous ?
- b) Déterminer le point d'intersection de la droite d et du plan α .

Exercice 4.27 :

On donne une droite d et un plan α . La droite d est-elle strictement parallèle au plan α , incluse dans α ou coupe-t-elle α ?

Le cas échéant, calculer les coordonnées du point I d'intersection.

$$\text{a) } (d) : \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 - 2k \\ z = 3 + 2k \end{cases} \quad \text{et} \quad (\alpha) : 2x + y - z = 0$$

$$\text{b) } (d) : \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\alpha) : 3x - 2y + 4z = 19$$

$$\text{c) } (d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\alpha) : 4x + y - 11z = 0$$

$$\text{d) } (d) : \begin{cases} x + y - 3z = -5 \\ x - y - z = -19 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\alpha) : \begin{cases} x = 5 - k + 2n \\ y = 10 + k - 3n \\ z = 5 + k - n \end{cases}$$

Exercice 4.28 : On donne les points $A(3 ; 4 ; 0)$, $B(-3 ; 8 ; 1)$, $C(1 ; 2 ; -3)$, $D(11 ; 1 ; 1)$, $E(3 ; 3 ; -1)$, $F(8 ; 3 ; 1)$, $G(0 ; 5 ; -1)$, $P(-5 ; -2 ; -5)$ et $Q(0 ; 4 ; -3)$.

- Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite PQ et du plan ABC .
- Montrer que la droite DE est incluse dans le plan ABC .
- Montrer que la droite FG est strictement parallèle au plan ABC .

Exercice 4.29 : Pour quelle valeur du paramètre m la droite

$$(d) : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2} \text{ est-elle parallèle au plan}$$

$$(\alpha) : x - 3y + 6z + 7 = 0$$

Exercice 4.30 : Déterminer les coordonnées du point d'intersection des 3 plans α , β et γ :

$$\begin{aligned} \text{a) } (\alpha) : 3x + 4y - z - 5 &= 0 & (\beta) : 2x - y + 2z - 5 &= 0 \\ (\gamma) : x + y - 3z + 4 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (\alpha) : x + 2y - 3z - 6 &= 0 & (\beta) : 2x + 4y - z - 18 &= 0 \\ (\gamma) : 3x - 2y + z - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 4.31 : On appelle **trace d'un plan** les droites d'intersection de ce plan avec les plans de référence Oxy , Oxz et Oyz .

$$\text{Soit le plan } 3x - 4y - 2z + 12 = 0.$$

- Déterminer les équations de ses traces.
- Calculer l'intersection de ce plan avec chacun des axes de coordonnées.
- Représenter cette situation sur une représentation graphique.

Exercice 4.32 : Montrer que les plans d'équations $3x - y + 9z + 4 = 0$, $x + y - z = 0$ et $x + 2y - 4z - 1 = 0$ ont une infinité de points communs.

Déterminer une équation paramétrique de leur droite commune.

Exemple Droite d'intersection de deux plans

Déterminer une équation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans α et β :

$$(\alpha) : x + y - 3z - 1 = 0 \quad (\beta) : 2x - y - 9z - 2 = 0$$

Exercice 4.33 : Déterminer une équation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans α et β dans les cas suivants :

a) $(\alpha) : x - 3y + 2z + 6 = 0 \quad (\beta) : 2x + 5y - z - 9 = 0$

b) $(\alpha) : \begin{cases} x = 3 + k \\ y = 1 + n \\ z = 2 + n \end{cases} \quad (\beta) : \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 + 2p \\ z = -p + q \end{cases}$

Exercice 4.34 : Montrer que les plans d'équations respectives :

$$x - 2y + 1 = 0, \quad 7y - z - 4 = 0 \quad \text{et} \quad 7x - 2z + 6 = 0$$

sont parallèles à une même droite dont on donnera un vecteur directeur $\vec{d}$.

Exercice 4.35 : On donne le point $P(0 ; -1 ; 2)$ et deux droites d_1 et d_2 :

$$(d_1): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (d_2): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d qui passe par P et qui coupe chacune des deux droites d_1 et d_2 .
- Déterminer également les points d'intersection de cette droite avec d_1 et d_2 .

Exercice 4.36 : Soit les points $B(4 ; 3 ; -3)$, $C(1 ; 0 ; 6)$ et $P(-1 ; 7 ; -8)$, le plan α d'équation $x - 10y - 3z + 17 = 0$ et la droite d donnée

$$\text{par le système d'équations paramétriques} \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 2 \\ z = 3 + 2k \end{cases}$$

Vérifier que les points B et C appartiennent au plan α , puis déterminer les sommets non donnés du parallélépipède $ABCDEFGH$ sachant que :

- le plan α est le plan de la face $ABCD$,
- le plan β de la face $EFGH$ passe par P ,
- le support de la diagonale AG est la droite d .

§ 4.4 Applications du produit scalaire

Rappels Le produit scalaire dans l'espace

- Le résultat d'un produit scalaire est un **nombre**
- Expression analytique :**

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

- Expression trigonométrique :**

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$$

- Orthogonalité :**

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$$

THÉORÈME 1 Si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$, alors $\vec{u}$ est orthogonal à toute combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 4.37 : a) Représenter la situation du théorème sur une figure d'étude.
b) Démontrer ce théorème.

THÉORÈME 2 Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points C de l'espace tel que $\overrightarrow{AC}$ orthogonal à $\vec{u}$ forme un plan.

Exercice 4.38 : Déterminer deux vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ non nuls orthogonaux au vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. En déduire, par le calcul d'un déterminant l'équation cartésienne d'un plan passant par l'origine et perpendiculaire à $\vec{u}$.

THÉORÈME 3 Un plan est entièrement défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}$.

Exercice 4.39 : On considère le plan $(\alpha) : ax + by + cz + d = 0$ ($a \cdot b \cdot c \cdot d \neq 0$)
Le but de cet exercice sera de montrer que le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal au plan α .
a) Que peut-on affirmer au sujet du point $A(-d/a ; 0 ; 0)$.
b) À l'aide d'une démarche comparable, déterminer deux autres points B et C contenu dans α .
c) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}$. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 4.40 : Déterminer l'équation cartésienne de la droite d passant par $A(2 ; 3 ; 5)$ et $\perp$ au plan $(\alpha) : 3x - 2y + z + 5 = 0$.

Exercice 4.41 : Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ au plan ABC où $A(2 ; 1 ; 3)$, $B(-1 ; 4 ; 2)$ et $C(3 ; -4 ; -2)$
a) en utilisant le produit vectoriel (cf. 1^{re} année)
b) en calculant l'équation cartésienne du plan ABC .

Exercice 4.42 : Déterminer l'équation cartésienne du plan α passant par le point $A(2 ; 3 ; 5)$ et $\perp$ à la droite $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{3}$.

Exercice 4.43 : Déterminer l'équation cartésienne du plan α passant par l'origine et par le point $A(1 ; 1 ; 1)$ et $\perp$ au plan : $x - y + z + 2 = 0$.

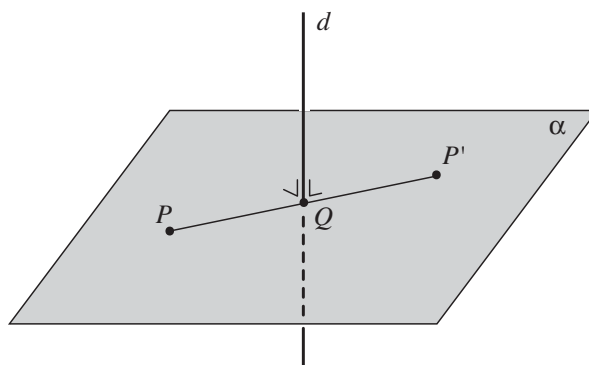
Exercice 4.44 : Déterminer une équation paramétrique de la droite n passant par le point $P(8 ; -4 ; 4)$ et perpendiculaire à la droite d d'équations paramétriques:

$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 - k \\ z = 1 + 2k \end{cases}$$

§ 4.5 Projections, distances et angles dans l'espace

Projection d'un point sur une droite et distance

- Soit P un point et d une droite. On appelle **projection orthogonale de P sur d** le point d'intersection Q de d et du plan α perpendiculaire à d passant par P .
- La norme du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ correspond alors à $\delta(P; d)$, **distance du point P à la droite d** .



Symétrique d'un point par rapport à une droite

- Le point P' pour lequel Q est le milieu du segment PP' s'appelle **le symétrique de P par rapport à d** .

Exercice 4.45 : On considère le point $P(3 ; 5 ; 10)$ et la droite d d'équation:

$$\frac{x-7}{6} = \frac{y+4}{-6} = z-5$$

- Calculer la projection orthogonale Q du point P sur la droite d .
- Calculer la distance du point P à la droite d .
- Calculer les coordonnées du point P' , symétrique du point P par rapport à la droite d .

Dans votre formulaire, page, on trouve:

On note P un point et d une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{d}$

Projection de P sur la droite d
$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} \vec{d}$$

Distance de P à la droite d
$$\delta(P; d) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

Symétrique de P par rapport à d
$$\overrightarrow{OP'} = 2 \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} \vec{d}$$

Exercice 4.46 : Retrouver les réponses de l'exercice précédent en appliquant ces dernières formules.

Construction la perpendiculaire commune à 2 droites gauches

Exercice 4.47 : On donne deux droites gauches a et b . Déterminer les coordonnées du point A de a et du point B de b tels que la droite AB soit la perpendiculaire commune à a et à b . En déduire la plus courte distance δ entre les droites a et b dans les cas suivants:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (a): \begin{cases} x = 6 - 4k \\ y = -4 + k \\ z = 1 + k \end{cases} & (b): \begin{cases} x = 3 - 6n \\ y = -1 + n \\ z = 4 + 2n \end{cases} \\ \text{b) } (a): \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -k \\ z = 2 + k \end{cases} & (b): \begin{cases} x = 2 + n \\ y = 1 + 2n \\ z = 2 + n \end{cases} \end{array}$$

Dans votre formulaire, page, on trouve:

On note d_1 une droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\vec{d}_1$ et
 d_2 une droite passant par A_2 et de vecteur directeur $\vec{d}_2$

Distance de deux droites
$$\delta(d_1; d_2) = \frac{|(\vec{d}_1 \times \vec{d}_2) \cdot \overrightarrow{A_1 A_2}|}{\|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\|}$$

Exercice 4.48 : Retrouver les distances obtenues de l'exercice précédent en appliquant cette dernière formule.

Angle entre deux droites de l'espace (gauches ou non)

De $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$, on en déduit que

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right)$$

où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs directeurs de ces droites.

Exemple : Déterminer l'angle aigu entre les droites :

$$(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (e) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

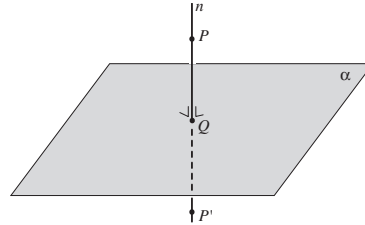
Exercice 4.49 : a) En reprenant les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'exemple précédent, calculer $\gamma = \sin^{-1} \left(\frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right)$
 b) Que remarquez-vous ? Et comment l'expliquez-vous ?

Projection de P sur le plan α

- Soit P un point et α un plan. On appelle **projection orthogonale de P sur α** le point d'intersection Q du plan α et de la normale n à α par P .

Distance de P au plan α

- La norme du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ correspond alors à $\delta(P; \alpha)$, **distance du point P au plan α** .

**Symétrique d'un point par rapport à un plan**

- Le point P' pour lequel Q est le milieu du segment PP' s'appelle le **symétrique de P par rapport à α** .

Exercice 4.50 :

Trouver les coordonnées de Q , projection orthogonale du point $P(3 ; 1 ; -1)$ sur le plan α d'équation cartésienne:
 $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

Exercice 4.51 :

Trouver une représentation paramétrique de la projection orthogonale de la droite d d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + k \\ z = 6 - 5k \end{cases}$$

sur le plan d'équation $x - 2y + z - 1 = 0$

Exercice 4.52 :

Un rayon lumineux issu du point $P(4 ; 5 ; -1)$ se réfléchit sur un miroir plan α dont l'équation est $x + 3y - 2z - 7 = 0$. Le rayon réfléchi passe par le point $Q(-7 ; 8 ; -9)$.

Trouver les coordonnées du point d'incidence M .

Rappel de 2^e année**La distance d'un point à une droite (dans le plan)**

$$\delta(P, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

où $P(x_0 ; y_0)$ et $(d) : ax + by + c = 0$.

La distance d'un point à un plan

La distance d'un point P à un plan α est la distance du point P à sa projection orthogonale Q sur α .

Soit α le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, la distance du point $P(x_0 ; y_0 ; z_0)$ au plan α est donné par :

$$\delta(P, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Preuve : Cf. exercice 4.56

Exemple : Vérifier d'abord que les deux plans d'équation:
 $(\alpha) : 3x + 12y - 4z = 0$ et $(\beta) : 3x + 12y - 4z + 73 = 0$
sont parallèles, puis calculer la distance entre eux.

Exercice 4.53 : Montrer que la distance du point $P(15 ; -2 ; 5)$ au plan
 $(\alpha) : 3x - 2y + z = 12$ vaut $3\sqrt{14}$.

Exercice 4.54 : Déterminer les équations cartésiennes des plans α et α'
situés à une distance 6 du plan d'équation $9x + 2y - 6z = 0$.

Exercice 4.55 : On donne le tétraèdre de sommets $A(2 ; 4 ; 6)$, $B(-4 ; -4 ; 4)$,
 $C(5 ; 0 ; 3)$ et $D(-1 ; 7 ; 5)$.

- Calculer la longueur de la hauteur, issue de A de ce tétraèdre.
- Rappeler ici la formule vectorielle pour calculer l'aire d'un triangle donné par ses 3 sommets B , C et D .
- En déduire le volume de ce tétraèdre.
- Utiliser la formule d'un volume d'un tétraèdre développé en 1^{re} année.

Exercice 4.56: Adapter les outils introduits et la preuve de la distance d'un point à une droite (cf. Chapitre 2) à la distance d'un point à un plan dans l'espace.

Dans votre formulaire, page, on trouve en plus:

On note P un point, π un plan contenant un point A et $\vec{n}$ un vecteur normal à π

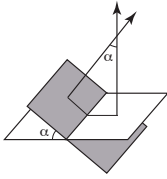
Projection de P sur le plan π

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$$

Symétrique de P par rapport à π

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 2 \cdot \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$$

Angle entre deux plans



On appelle angle (aigu ou obtus) de deux plans **l'angle entre les deux vecteurs normaux** à ces deux plans.

Exercice 4.57 :

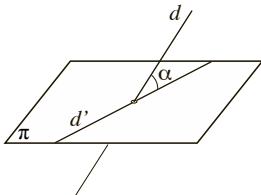
Calculer, de 2 manières différentes, l'angle aigu entre les deux plans sécants :

$$(\alpha) : x + 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad (\beta) : 2x - 3y + 4z - 8 = 0.$$

Angle entre une droite et un plan

On appelle angle (aigu ou obtus) d'une droite d et un plan π l'angle α que forme d avec sa projection d' sur π .

Marche à suivre :



Exercice 4.58 :

Soit la droite d passant par $A(1 ; 2 ; 3)$ et $B(2 ; 1 ; 5)$.

On donne encore le plan $(\alpha) : 3x + 2y - 5z = 0$.

Calculer l'angle formé par d et α .

Exercice 4.59 :

Soit $ABCD$ un tétraèdre de sommets $A(2 ; 3 ; 1)$, $B(4 ; 1 ; -2)$, $C(6 ; 3 ; 7)$, $D(-5 ; -4 ; 8)$, calculer :

- la longueur de la hauteur du tétraèdre issue de D ;
- le volume du tétraèdre ;
- l'angle aigu que forment les faces ABC et ABD ;
- l'angle aigu que forme l'arête AD avec la face ABC .

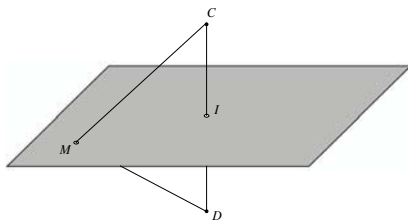
§ 4.6 Plan médiateur, plan bissecteur

Exercice 4.60 : On donne les sommets $B(5 ; 1 ; -3)$ et $C(-1 ; -3 ; 3)$ du triangle isocèle ABC de base BC .

Déterminer les coordonnées du sommet A sachant qu'il

appartient à la droite $(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Définition On appelle **plan médiateur** du segment CD , l'ensemble des points M équidistants de C et de D .



Le plan médiateur du segment CD est le plan orthogonal à la droite CD et qui passe par le milieu I dudit segment.

Exemple Déterminer l'équation du plan médiateur du segment AB où $A(1 ; 1 ; 2)$ et $B(0 ; 3 ; 3)$.

Exercice 4.61 : On considère les quatre points $A(3 ; -1 ; -2)$, $B(-2 ; 0 ; 3)$, $C(1 ; 1 ; 2)$ et $D(0 ; 3 ; 3)$. Trouver les coordonnées du point M équidistant des points C et D et dont la projection orthogonale sur le plan (ABC) est le centre de gravité du triangle ABC .

Définition On appelle **plans bissecteurs** de 2 plans α et β sécants, l'ensemble des points M équidistants aux 2 plans.

Les plans sécants $(\alpha) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et

$(\beta) : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

ont pour plans bissecteurs les deux plans d'équations:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Exercice 4.62 : Déterminer les équations cartésiennes des plans bissecteurs des plans α et β dans les cas suivants:

a) $(\alpha) : x + 2y - 2z - 1 = 0$ et $(\beta) : 2x - y + 2z + 1 = 0$

b) $(\alpha) : 3x + y - z + 25 = 0$ et $(\beta) : x - 7y - 7z + 13 = 0$

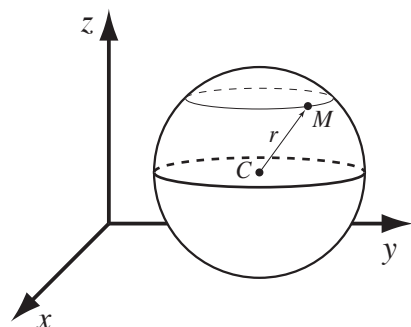
Exercice 4.63 : On donne les trois plans α , β et γ d'équations cartésiennes respectives $x - 2y + 2z + 4 = 0$, $2x + 3y - 6z - 5 = 0$ et $12x + 2y + 5z = 0$. Déterminer les coordonnées des points situés sur la perpendiculaire n issue du point $P(13 ; 4 ; 9)$ au plan γ et équidistants des plans α et β .

Exercice 4.64 : Montrer que les droites d_1 , et d_2 données ci-dessous sont concourantes en un point P et déterminer des représentations paramétriques de leurs bissectrices b_1 et b_2 .

$$(d_1) : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + 3k \\ z = -1 + 2k \end{cases} \quad (d_2) : \begin{cases} x = 2n \\ y = 4 - n \\ z = 2 - 3n \end{cases}$$

Exercice 4.65 : On considère les points $A(5 ; -1 ; -1)$, $B(3 ; -2 ; 1)$ et $C(1 ; 1 ; 7)$. Déterminer une représentation paramétrique de la bissectrice intérieure du triangle ABC issue du sommet B .

§ 4.7 Sphère

**Définition**

On appelle **sphère** Σ de centre $C(\alpha ; \beta ; \gamma)$ et de rayon r l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ de l'espace situés à la distance r du centre C .

On a donc $M \in \Sigma \Leftrightarrow \|\overrightarrow{CM}\| = r$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \\ z - \gamma \end{pmatrix} \right\| = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2}$$

Cette dernière relation s'appelle **équation cartésienne** de la sphère (**centre-rayon**).

En la développant, on obtient l'équation **développée** :

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0}$$

Exemple

Déterminer le centre et le rayon de la sphère suivante :

$$(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 10y - 2z - 51 = 0$$

Exercice 4.66 :

Donner les équations des sphères suivantes sous la forme développée :

- a) sphère centrée en $O(0 ; 0 ; 0)$ et passant par $M(3 ; 2 ; -1)$
- b) sphère centrée en $C(1 ; -2 ; 4)$ et passant par $M(3 ; 2 ; -1)$
- c) sphère de diamètre AB , où $A(-1 ; 0 ; 5)$ et $B(7 ; 4 ; -7)$

Exercice 4.67 :

Les équations suivantes représentent-elles des sphères ? Si oui, déterminer leur centre et leur rayon.

- a) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 10y - 4z + 22 = 0$
- b) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y + 6z + 56 = 0$
- c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 8y + 2z - 87 = 0$

Exercice 4.68 :

Déterminer l'équation de la sphère passant par les deux points $A(4 ; 2 ; -3)$, $B(-1 ; 3 ; 1)$ et ayant son centre sur la droite CD connaissant $C(2 ; 3 ; 7)$ et $D(1 ; 5 ; 9)$.

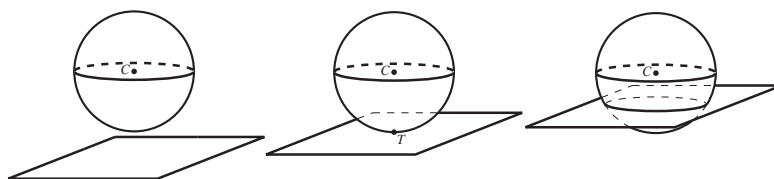
Exercice 4.69 : Dans l'espace, on considère :

- les points $A(-2 ; 1 ; 0)$, $B(0 ; 2 ; 1)$ et $C(3 ; 0 ; -1)$;
- le plan $(\beta) : x - 4y + z + 9 = 0$;
- la droite $(t) : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$

Déterminer l'équation de la sphère Σ centrée sur t et qui est tangente aux plans (ABC) et β .

Intersection d'une sphère et d'un plan

Trois cas possibles :



Attention ! Dans l'espace, un cercle n'a pas d'équation cartésienne. On ne peut le définir qu'en précisant son centre, son rayon et le plan qui le contient.

Quelques remarques pratiques pour les exercices

a) Un plan est **tangent à une sphère** si la distance du centre au plan (cf. formule) est égale au rayon de la sphère

b) $P(x ; y ; z)$ appartient au plan tangent à une sphère dont le point de tangence est T

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0 \end{array}$$

Exemples a) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère Σ de centre $C(1 ; 0 ; 0)$ et tangente à $(\alpha) : 4y + 3z - 25 = 0$

b) Déterminer l'équation du plan β tangent à Σ en $T(1 ; 3 ; 4)$:

Exercice 4.70 : Soit la sphère $(\Sigma) : (x - 1)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2 = 62$.
Soit le plan $(\alpha) : 3x - 7y + 2z + 100 = 0$.

Le plan α est-il tangent à la sphère Σ ?

Exercice 4.71 : Soit la sphère $(\Sigma) : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$.
Soit le plan $(\alpha) : 2x - 2y - z + 9 = 0$.

- a) Prouver que le plan α coupe la sphère Σ .
- b) L'intersection de α et Σ est un cercle. Déterminer son centre et son rayon.

Exercice 4.72 : Soit la sphère $(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 30y - 4z + 13 = 0$ et le point $T(7 ; 4 ; 4)$.

- a) Vérifier que le point T est sur la sphère.
- b) Déterminer l'équation du plan tangent à Σ en T .

Exercice 4.73 : Soit T un point de la sphère Σ de centre C et de rayon r . Soit α le plan tangent à Σ au point T . Soit encore P un point de l'espace. Démontrer l'affirmation suivante :

$$P \in \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2$$

Exercice 4.74 : Soit la sphère $(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 159 = 0$.
Soit le plan $(\alpha) : 12x + 4y + 3z - 12 = 0$.

Déterminer les équations des plans parallèles au plan α et tangents à la sphère Σ .

Exercice 4.75 : Soit les 2 sphères $(\Sigma_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0$
et $(\Sigma_2) : x^2 + y^2 + z^2 = 81$.

- a) Montrer que les deux sphères sont tangentes.
- b) Déterminer l'équation du plan tangent aux deux sphères.

Exercice 4.76 : Soit les 2 sphères $(\Sigma_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y - 2z - 57 = 0$
et $(\Sigma_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 10y - 8z - 27 = 0$.

Prouver que ces deux sphères se coupent, puis déterminer ensuite leur intersection. Représenter la situation sur une bonne figure.

Exercice 4.77 : On donne la sphère $(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 3 = 0$

$$\text{et la droite } (d) : \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 6 - 2k \\ z = -4 + k \end{cases}$$

Calculer les coordonnées des points d'intersection de Σ et d .

- Exercice 4.78 :** Soit la sphère $(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 2z + 17 = 0$ et le point $A(-2 ; 2 ; 3)$.
- a) Vérifier que A est sur la sphère Σ .
 - b) Déterminer l'équation d'une droite d tangente en A à Σ .
 - c) Déterminer l'équation d'une droite g tangente en A à Σ et coupant l'axe Oz .

Problème 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les quatre points $A(1 ; 1)$, $B(-7 ; 7)$, $C(10 ; 13)$ et $D(-5 ; -7)$.

- 1.1 Montrer que le triangle ABC est rectangle. Calculer son aire.
- 1.2 Calculer les coordonnées du point E tel que le quadrilatère $ABEC$ soit un rectangle.
- 1.3 Montrer que les points A , C et D sont alignés et que les segments AB et AD sont de même longueur.
- 1.4 Calculer les coordonnées des points F et G tels que le quadrilatère $ACFG$ soit un carré ne contenant pas B .
- 1.5 Calculer les coordonnées du point M , milieu de BC . Déterminer l'équation cartésienne de la droite AM .
- 1.6 Soit K le point d'intersection des droites DG et AM . Calculer les coordonnées de K et montrer que AK est la hauteur du triangle DAG .
- 1.7 Faire une figure soignée contenant tous les éléments du problème.

Problème 2

Soit un triangle ABC de sommets $A(-7 ; -2)$, $B(-1 ; 10)$ et $C(11 ; -2)$ dans un repère orthonormé (*unité = 1 carré*).

1. Déterminer les coordonnées du centre de gravité G et celles de l'orthocentre H du triangle ABC .
2. Montrer que le point $K(2 ; 1)$ est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
3. Montrer que les points H , G et K sont alignés.

Problème 3

On donne deux droites d_1 et d_2 dont les équations sont respectivement $3x - y = 0$ et $x - 3y + 8 = 0$.

1. Représenter ces deux droites dans un repère orthonormé.
2. Calculer le point d'intersection I de ces deux droites.
3. On appelle b_1 la bissectrice de l'angle aigu entre les droites d_1 et d_2 , et b_2 celle de l'angle obtus. Calculer les équations de b_1 et b_2 .

On considère un losange $ABCD$ dont les diagonales sont portées par les droites b_1 et b_2 . La longueur du côté de ce losange mesure $2\sqrt{17}$ et l'un des sommets est $A(-2 ; 6)$.

4. Construire ce losange en expliquant clairement la méthode.
5. Calculer les coordonnées des autres sommets.

Problème 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les sommets d'un $\triangle ABC$:

$$A(7 ; 3), B(-1 ; 7), C(-2 ; 0)$$

On demande:

- les équations des médiatrices de AB et AC
- les coordonnées du centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC
- l'équation de la hauteur issue de C
- les coordonnées de H , pied de la hauteur issue de C
- l'aire du triangle ABC
- les coordonnées du point D sur le cercle circonscrit tel que $ACBD$ soit un trapèze isocèle.

Problème 5

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on donne la droite d_1 d'équation $3x - y - 8 = 0$ et la droite d_2 d'équation $x - 3y = 0$.

- 5.1 Déterminer les coordonnées des sommets du losange $ABCD$ situé entièrement dans le premier quadrant et construit de la manière suivante :
 - A est le point d'intersection de d_1 et d_2 ;
 - le côté AD est sur d_1 et le côté AB est sur d_2 ;
 - la longueur du côté est $2\sqrt{10}$.
- 5.2 Calculer l'aire du losange $ABCD$.
- 5.3 On considère le cercle γ de rayon $\sqrt{10} - \sqrt{2}$ tangent aux droites d_1 et d_2 et intérieur au losange $ABCD$. Déterminer les coordonnées du centre K de γ .
- 5.4 Montrer que γ est aussi tangent à la diagonale BD .

Problème 6

On donne les trois points $A(0 ; 9)$, $B(8 ; 3)$ et $C(-4 ; -3)$.

- 6.1 Représenter ces trois points dans un repère orthonormé (*unité: 2 carrés*).
- 6.2 Déterminer une équation de la médiatrice du segment AB .
- 6.3 Calculer les coordonnées du point J de l'axe Oy équidistant de A et B .
- 6.4 Calculer les coordonnées du point K tel que le quadrilatère $AJBK$ soit un losange.
- 6.5 Calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
- 6.6 Calculer les coordonnées des points P et Q de l'axe Ox situés à la distance 5 de B .

Problème 7

Dans un système d'axes Oxy , on donne les points

$A(-12 ; 1)$, $B(-4 ; -17)$, $C(14 ; 1)$, $D(6 ; 7)$ et $M(375/31 ; 280/31)$.

Soit R le milieu de AB , S celui de BC , T celui de CD et U celui de DA .

- a) Représenter graphiquement les quadrilatères $ABCD$ et $RSTU$, ainsi que le point M .
[unité sur chaque axe: 1 carré.]
 - b) Calculer les coordonnées des points R , S , T et U .
 - c) Prouver que RT est perpendiculaire à SU .
 - d) Montrer que le triangle RSU est isocèle et calculer ses angles.
 - e) Établir l'équation des droites AD et ST et montrer que M est leur intersection.
-

Problème 8

On considère le quadrilatère $ABCD$, avec $A(-5 ; 1)$, $B(1 ; 9)$, $C(5 ; 6)$ et $D(1 ; -2)$.

⇒ Strictement par calcul (mais un croquis n'est pas interdit !) :

- a) donner la pente de la droite AB ;
 - b) déterminer si $E(7 ; -5)$ est sur la droite AD ;
 - c) donner une équation de la droite BC ;
 - d) prouver que les angles en B et en D sont droits;
 - e) déterminer si $ABCD$ est un rectangle; donner l'aire de ABK , où K est le point commun aux droites AD et BC .
-

Problème 9

Pour ce problème, faire une figure complète en prenant pour unité 4 carrés.

Soit ABC un Δ défini par $A(-2 ; -1)$, $B(4 ; -1)$, $C(2 ; 3)$ et $D(1 ; 0)$ un point du plan.

- 1. Établir l'équation cartésienne de la droite AC ainsi que des hauteurs h_c issue de C et h_b issue de B . Calculer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC .
 - 2. Montrer que le point D est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et calculer le rayon de ce cercle.
 - 3. Calculer les coordonnées de G centre de gravité du triangle ABC , montrer que les points H , G et D sont alignés et vérifier que G est au tiers du segment DH à partir de D .
 - 4. Calculer la longueur des côtés, la mesure des angles intérieurs et l'aire du triangle ABC .
-

Problème 10

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points de coordonnées

$A(-8 ; -6)$ $B(-2 ; 6)$ $C(10 ; -2)$

- a) Calculer les coordonnées des projections respectives A' et B' de A et B sur la droite d d'équation:

$$(d) : x + y + 20 = 0$$

- b) Soit de plus : $C'(-4 ; -16)$ et :

a' la perpendiculaire à BC passant par A' ;
 b' la perpendiculaire à AC passant par B' ;
 c' la perpendiculaire à AB passant par C' ;

Montrer que les droites a' , b' et c' sont concourantes.

Problème 11

On donne une droite a par son équation (a): $3x - 2y + 5 = 0$

- 11.1 Calculer les coordonnées du point $A(x ; y)$ de la droite a tel que $x = 1$
 - 11.2 Établir l'équation de la droite d passant par A et dont la pente vaut le double de celle de la droite a .
 - 11.3 Établir l'équation de la droite b parallèle à la droite a et passant par le point $C(2 ; 4)$.
 - 11.4 Calculer les coordonnées du point d'intersection B des droites b et d .
 - 11.5 Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
 - 11.6 Établir l'équation de la droite p perpendiculaire à b et passant par D .
 - 11.7 Calculer les coordonnées du point d'intersection H des droites b et p .
 - 11.8 Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$.
-

Problème 12:

Calculer les coordonnées du centre et le rayon du cercle inscrit dans le triangle, dont les côtés ont pour équation :

$$(a) : 3x + 4y = 11, \quad (b) : x - 9 = 0, \quad (c) : -3x + 4y - 5 = 0.$$

Connaissez-vous le logiciel **GEOGEBRA** ?

Il peut vous permettre de "réaliser" ces exercices en trois coups de souris !!!

À télécharger de toute urgence : www.geogebra.org



Chapitre 1: Solutions des exercices

Exercice 1.1: a) Ils sont colinéaires b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 1.2: a) $y = -\frac{1}{7}x - 2$ puis $x + 7y + 14 = 0$ b) $y = -3x + \frac{1}{2}$ puis $6x + 2y - 1 = 0$

Exercice 1.3: P_1 : oui P_2 : oui P_3 : non

Exercice 1.4: a) (3 ; 15/2) b) (-14/3 ; -4) c) (-6 ; -6)
d) (-2 ; 0) e) (0 ; 3) f) (-34/11 ; -18/11)

Exercice 1.5: $y = 3x + 10$ et $3x - y + 10 = 0$

Exercice 1.6: $y = \frac{3}{8}x + \frac{41}{8}$ et $3x - 8y + 41 = 0$

Exercice 1.7: $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ et $2x + 3y + 4 = 0$

Exercice 1.8: $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ et $3x - 2y - 7 = 0$

Exercice 1.9: a) $m = -1/3$ $x + 3y - 7 = 0$ b) $m = -1/5$ $x + 5y + 32 = 0$
c) $m = -1/2$ $x + 2y - 1 = 0$ d) $m = -1/2$ $x + 2y - 11 = 0$
e) $m = 44/35$ $-132x + 105y + 134 = 0$ f) $m = 0$ $y - 8 = 0$
g) $x - 4 = 0$ la pente n'est pas définie

Exercice 1.10: Le corrigé sera vu ensemble

Exercice 1.11: a) horizontale b) oblique c) verticale
d) verticale e) il s'agit d'un point ! f) oblique

Exercice 1.12: a) $m = 2/3$ $h = 2$ b) $m = -5/3$ $h = 5$
c) $m \equiv -0,447$ $h \equiv 2,936$ d) $m = 0$ $h = 0$
e) la pente et l'ordonnée à l'origine ne sont pas définies
f) Idem g) Idem

Exercice 1.13: a) $4x - 3y + 52 = 0$ b) $-3x + 5y - 21 = 0$

Exercice 1.14: $5x + 4y - 47 = 0$

Exercice 1.15: Elles représentent toutes la droite $3x + 2y - 11 = 0$

Exercice 1.16: a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} x-7 \\ y-2 \end{pmatrix}$
b) les deux vecteurs sont colinéaires
c) $x + 2y - 11 = 0$

Exercice 1.17: $3x + y - 9 = 0$ (Cette méthode utilisant le déterminant est plus rapide que celle proposée dans la théorie)

Exercice 1.18: Le corrigé est vu ensemble

Exercice 1.19: a) $x - y - 1 = 0$ b) $2x + y - 4 = 0$ c) $5x + 2y + 1 = 0$

Exercice 1.20: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow 8x - 3y - 28 = 0$ (équation de la hauteur issue de B du triangle BOA)

Exercice 1.21: a) $I(3 ; 2)$ b) $I(0 ; 2)$ c) $I(-1 ; 3)$ d) $I(2 ; 3)$

Exercice 1.22: a) pas de pt d'intersection b) $\{(x ; y) \mid x + y - 3 = 0\}$

Exercice 1.23: $I(41/17 ; 33/17)$

Exercice 1.24: a) (1 ; 5/2) b) les droites sont parallèles c) les droites sont confondues

Exercice 1.25: (0 ; 5) (0 ; 79/10) (377/101 ; 157/101)

Exercice 1.26: (a) : $x + y + 1 = 0$ (b) : $x + 3y + 3 = 0$ (c) : $2x + 3y = 0$
(m_A) : $5x + 9y + 3 = 0$ (m_B) : $7x + 9y + 3 = 0$ (m_C) : $x = 0$

Exercice 1.27: $A(2 ; 4)$ $B(2 ; -1)$ $C(-1 ; 3)$

Exercice 1.28: $D(4 ; 4)$ (d_{AB}) : $2x + 5y - 12 = 0$ (d_{CD}) : $2x + 5y - 28 = 0$ (d_{AC}) : $y = 2$
(d_{BD}) : $2x + y - 12 = 0$ (d_{BC}) : $2x - 3y - 12 = 0$ (d_{AD}) : $2x - 3y + 4 = 0$

Exercice 1.29: Les 4 sommets ont les coordonnées : (-4 ; -4) (-2 ; -3) (3 ; -4) $D(1 ; -5)$
l'équation de la diagonale: $y = -4$

Exercice 1.30: $A(4 ; -3)$ $B(2 ; 3)$ $C(8 ; 7)$ $G(14/3 ; 7/3)$
(m_{AA}) : $8x - y - 35 = 0$ (m_{BB}) : $x + 4y - 14 = 0$ (m_{CC}) : $7x - 5y - 21 = 0$

Exercice 1.31: a) $3x + 4y - 11 = 0$ b) $5x + 3y + 1 = 0$

Exercice 1.32: a) $2x - y - 3 = 0$ b) $x + 2y - 4 = 0$ c) $x + 2y - 14 = 0$

Exercice 1.33: $x + 2y - 14 = 0$

Exercice 1.34: $x - 3y + 9 = 0$

Exercice 1.35: a) $t = 3$ ou $t = -1$ b) $t = 3/2$

Exercice 1.36: a) $78,69^\circ$ b) $-75,96^\circ$ c) $25,35^\circ$ d) $11,31^\circ$

Exercice 1.37: a) $75,96^\circ$ b) $18,43^\circ$

Exercice 1.38: $5x - 3y + 11 = 0$

Exercice 1.39: $B(22 ; 7)$ $C(9 ; 7)$ $D(-3 ; 1)$

Exercice 1.40: $(-75,96^\circ ; 26,57^\circ ; (-77,47^\circ$

Exercice 1.41: $D(4 ; 3)$ (l'autre solution correspond à ABCD parallélogramme) **à contrôler !**

Exercice 1.42: a) $(17 ; -19)$ b) les 3 points alignés sont $(9 ; 8)$, $(3 ; 2)$ et $(7 ; 6)$
c) $(1 ; 8)$ $(2 ; 1)$ $(-1 ; 7)$ $(4 ; 2)$

Exercice 1.43: $29x - 2y + 33 = 0$

Exercice 1.44: a) $C(6 ; 1)$ b) $3x + 7y - 5 = 0$ $3x + 2y - 10 = 0$ $9x + 11y + 5 = 0$

Exercice 1.45: $A(5 ; -6)$ $C(-4 ; 1)$

Exercice 1.46: $C_1(1 ; -1)$ ou $C_2(-2 ; -10)$

Exercice 1.47: $C(12 ; 6)$

Chapitre 2: Solutions des exercices

Exercice 2.1: a) $\frac{3x + 4y - 4}{5} = 0$ b) $\frac{12x - 5y - 2}{13} = 0$ c) $\frac{15x + 8y - 7}{17} = 0$
d) $\frac{4x - 3y - 15}{5} = 0$ e) $y - 4 = 0$ f) $x - 5 = 0$
g) $\frac{x - y}{\sqrt{2}} = 0$ h) $\frac{6x - 8y - 29}{10} = 0$

Exercice 2.2: a) $(5/2 ; -3/2)$ b) $(0 ; -7)$

Exercice 2.3: a) $\|\overline{AH}\| = \frac{14\sqrt{34}}{17}$ b) Aire = $14 u^2$

Exercice 2.4: a) $H(9 ; 0)$ b) $\|\overline{BH}\| = 2\sqrt{5}$ c) $\delta(B, AC) = 2\sqrt{5}$

Exercice 2.5: $\delta(A ; d) = \frac{14\sqrt{34}}{17}$

Exercice 2.6: a) 3 b) 1 c) 4 d) 0

Exercice 2.7: 5

Exercice 2.8: 6

Exercice 2.9: $8/5$; $4x - 3y = 4$

Exercice 2.10: $4x - 3y - 13 = 0$; $4x - 3y - 3 = 0$

Exercice 2.11: $(-46/11 ; 57/11)$ ou $(-6 ; 7)$

Exercice 2.12: a) $14x - 112y + 31 = 0$ $64x + 8y + 21 = 0$ b) $2x - 6y = -5$ $6x + 2y = 23$

Exercice 2.13: $x + y + 5 = 0$

Exercice 2.14: $(1 ; 1)$ ou $(6 ; 6)$

Exercice 2.15: $2x + 2y + 17 = 0$

Exercice 2.16: $x - y = 0$ $2x + y = 0$ $x + 3y = 0$

Exercice 2.17: Centre $(-11/10; 17/10)$; rayon $= 29/10$

Exercice 2.18: $x - 3y - 5 = 0$; $3x + y - 5 = 0$

Exercice 2.19: $(-2; 5)$ $(-4; 1)$

Chapitre 3: Solutions des exercices

Exercice 3.1: a) $C(1; -2)$ $R = 5$

b) ce n'est pas un cercle

c) $C(-2; 1)$ $R = 0 \Rightarrow$ cercle = point

d) $C(-1/2; 0)$ $R = 1/2$

Exercice 3.2: a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$

b) $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$

c) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$

d) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

e) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$

f) $(x + 2)^2 + y^2 = 18$

g) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

Exercice 3.3: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 81/13$ et $(x + 8)^2 + (y + 7)^2 = 25/13$

Exercice 3.4: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 5$ et $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$

Exercice 3.5: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$

Exercice 3.6: $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 50$ et $(x - 29)^2 + (y + 2)^2 = 800$

Exercice 3.7: $(x + 10/7)^2 + (y + 25/7)^2 = 1$ et $(x - 30/7)^2 + (y - 5/7)^2 = 1$

Exercice 3.8: $x^2 + y^2 - 2x = 0$

Exercice 3.9: $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 8 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 5) + (y - 3)^2 = 8 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$

E est l'ensemble des points situés sur le cercle centré en $(4; 3)$ et de rayon 3.

Exercice 3.10: extérieur / 17

Exercice 3.11: a) coupe b) tangente c) extérieure

Exercice 3.12: a) $(0; -5)$ et $(4; 3)$ b) $(5; -1)$

Exercice 3.13: 10

Exercice 3.14: $2x - 5y = -19$

Exercice 3.15 $(-12; 0) \quad (-3; 0) \quad (0; 6)$

Exercice 3.16: $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$ ou $(x+7)^2 + (y-13)^2 = 169$

Exercice 3.17: $x^2 + y^2 = 50$ ou $(x+10)^2 + (y+30)^2 = 1250$

Exercice 3.18: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ ou $(x-22/5)^2 + (y+31/5)^2 = 289/5$

Exercice 3.19: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ ou $(x+202/49)^2 + (y-349/49)^2 = (185/49)^2$

Exercice 3.20: a) $x-2y+5=0$ b) $3x-4y+43=0$ c) $3x-7y=0$
d) $2x-5y+12=0$ e) $7x+8y-38=0$

Exercice 3.21: a) $2x+y-1=0$ et $2x+y+19=0$
b) $2x+y=5$ et $2x+y=-5$

Exercice 3.22: $3x+4y+16=0$ $4x-3y+38=0$ $4x-3y-12=0$

Exercice 3.23: $x-2y-5=0$ $2x-y-5=0$

Exercice 3.24: $2x+y-8=0$ $x-2y+11=0$ $T_1(3; 2)$ $T_2(-3; 4)$

Exercice 3.25: $x=6$ et $12x-35y+103=0$

Exercice 3.26: $A(21/5; 28/5)$

Exercice 3.27: $C(10; -5)$

Chapitre 4: Solutions des exercices

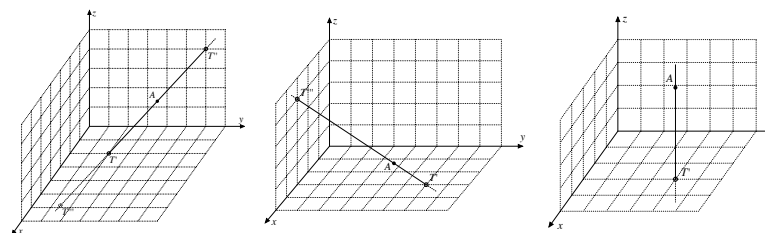
Exercice 4.1: a) $\begin{cases} x = -k+2 \\ y = 4k \\ z = 2k+3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2k+2 \\ y = 3k \\ z = 5k+3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = k \\ z = 3 \end{cases}$

Exercice 4.2: a) Non b) $Q(\frac{\lambda-1}{2}; -2\lambda+14; \lambda)$

Exercice 4.3: a) horizontale (parallèle au plan Oxy) b) de profil (parallèle au plan Oxz)
c) frontale (parallèle au plan Oyz) d) horizontale (parallèle au plan Oxy)

Exercice 4.4: a) $k = -2, n = 3$ et $I(3; 1; -1)$ b) $I(-5; 4; 1)$
c) ces droites ne se coupent pas

Exercice 4.5: a) $T'(2; 2; 0)$ $T''(0; 6; 4)$ $T'''(3; 0; -2)$
b) $T'(3; 6; 0)$ Pas de T'' $T'''(3; 0; 4)$
c) $T'(3; 4; 0)$ Pas de T'' Pas de T'''



Exercice 4.6: a) $T'(3; 4; 0)$ $T''(0; 6; -1)$ $T'''(9; 0; 2)$

Exercice 4.7: a) $\frac{x-4}{-3} = \frac{y}{6} = \frac{z-8}{-5}$ b) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-2} = z-1$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc par exple $\frac{x+1}{2} = y-6 = \frac{z-3}{-2}$

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ donc par exple $x = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-8}{-5}$

Exercice 4.8: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 4.9: pas de corrigé

Exercice 4.10: a) sécantes en $(5; 2; -3)$ b) strictement parallèles
c) gauches d) confondues

Exercice 4.11: strictement parallèles si $m = 3$, sécantes si $m = -5/3$, gauche sinon.

Exercice 4.12: a) $3k - n = 1$

b) il s'agit de la droite d'équation:
$$\begin{cases} x = 3/2 - 2k \\ y = 3/2 - 2k \\ z = 3k \end{cases}$$

Exercice 4.13: a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Aviez-vous vu que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ colin ?

Exercice 4.14: a) oui

b) non

c) oui

Exercice 4.15: pas de corrigé

Exercice 4.16: a) $\overline{AM}$ est une combinaison linéaire de $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$

b) donc $\det(\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}) = 0$ donc $(\alpha) : 6x - 3y + 9z = 6$

Exercice 4.17: a) $12x + 3y + z - 36 = 0$

b) $x + 2y + z - 13 = 0$

Exercice 4.18: $\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z - 1 = 0$

Exercice 4.19: $(\alpha) : 5x + 4y + 7z - 35 = 0$

Exercice 4.20: $(\alpha) : x + 2y - 3 = 0$ et $(\beta) : 12x + 3y - 7z = 8$

Exercice 4.21: a) $(\alpha) : 3x - 5y - 4z - 19 = 0$

b) $(\alpha) : x - 2y - 3z - 4 = 0$

Exercice 4.22: a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4.23: a) $y - 6 = 0$

b) $2x - y - 2z + 54 = 0$

c) $2x - 3y - 3z = 0$

Exercice 4.24: On constatera que les 2 plans sont respectivement :

$$2x + 3z - 5 = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 3z - 3 = 0$$

Exercice 4.25: a) $2x - 5y + z = 0$

b) $2x - 5y + z - 13 = 0$

Exercice 4.26: a) sécants

b) strictement parallèles

c) confondus

d) strictement parallèles

e) sécants

f) confondus

Exercice 4.27: a) strictement parallèles. Que pouvez-vous affirmer au sujet de $\vec{v}_d \cdot \vec{n}$?

b) coupe en $I(3 ; 1 ; 3)$

c) incluse

d) coupe en $I(2 ; 14 ; 7)$

Exercice 4.28: a) $(-15/13 ; 34/13 ; -45/13)$

pour info : $(ABC) : x + 2y - 2z - 11 = 0$

Exercice 4.29: $d \cap \alpha = \emptyset \Leftrightarrow m = -3$

Exercice 4.30: a) $(1 ; 1 ; 2)$

b) $(13/5 ; 7/2 ; 6/5)$

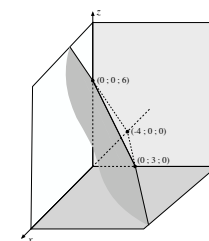
Exercice 4.31: a) Les traces sont :

• dans le plan Oxy : $\begin{cases} 3x - 4y + 12 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

• dans le plan Oxz : $\begin{cases} 3x - 2z + 12 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

• dans le plan Oyz : $\begin{cases} 2y + z - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

b) $(-4 ; 0 ; 0)$; $(0 ; 3 ; 0)$ et $(0 ; 0 ; 6)$



Exercice 4.32: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4.33: a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4.34: $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Exercice 4.35: a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + m \\ z = 2 - m \end{cases}$

b) $A(0 ; 3/2 ; -1/2)$ et $B(0 ; 1 ; 0)$

Exercice 4.36: $A(0 ; 2 ; -1)$; $D(-3 ; -1 ; 8)$; $E(5 ; 4 ; 4)$

$F(9 ; 5 ; 2)$; $G(6 ; 2 ; 11)$; $H(2 ; 1 ; 13)$

Exercice 4.37: b) par les propriétés du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot (a\vec{v} + b\vec{w}) = \vec{u} \cdot a\vec{v} + \vec{u} \cdot b\vec{w} = a \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) + b \cdot (\vec{u} \cdot \vec{w}) = a \cdot (0) + b \cdot (0) = 0$$

Exercice 4.38: par exemple $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ plan : $2x - y + 3z = 0$

Exercice 4.39: a) $A \in \alpha \cap$ axe Ox

b) $B(0 ; -d/b ; 0)$ et $C(0 ; 0 ; -d/c)$

c) $\vec{n}$ est normal au plan formé par les points A, B et C

Exercice 4.40: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-2} = z-5$

Exercice 4.41: a) et b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Exercice 4.42: $(\alpha) : -2x - 3y + 3z - 2 = 0$

Exercice 4.43: $(\alpha) : x - z = 0$

Exercice 4.44: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Exercice 4.45: a) $Q(1 ; 2 ; 4)$ b) $\delta(P, d) = 7$ c) $P'(-1 ; -1 ; -2)$

Exercice 4.46: pas de corrigé

Exercice 4.47: a) $A(2 ; -3 ; 2), B(3 ; -1 ; 4), \delta = 3$ b) $A(1 ; 0 ; 2), B(3/2 ; 0 ; 3/2), \delta = \sqrt{2}/2$

Exercice 4.48: pas de corrigé

Exercice 4.49: pas de corrigé, on retrouve ces 2 formules de calcul d'angle en page ... de votre formulaire.

Exercice 4.50: $Q(5 ; 5 ; 5)$

Exercice 4.51: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 4.52: $M(-1 ; 2 ; -1)$ (pour info: $P(2 ; -1 ; 3)$ et $Q'(-11 ; -4 ; -1)$)

Exercice 4.53: pas de corrigé

Exercice 4.54: $(\alpha) : 9x + 2y - 6z - 66 = 0$ et $(\alpha') : 9x + 2y - 6z + 66 = 0$

Exercice 4.55: a) 1,8856 b) Aire $\Delta = \frac{\|\vec{BC} \times \vec{BD}\|}{2}$ (cf. formulaire page ...)
c) 28 d) Volume $= \frac{1}{6} \left| \det(\vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AD}) \right|$ (cf. formulaire page ...)

Exercice 4.56: Exercice bonus

Exercice 4.57: $52,66^\circ$

Exercice 4.58: $36,59^\circ$

Exercice 4.59: a) 11 b) $154/3$ c) $88,74^\circ$ d) $65,13^\circ$

Exercice 4.60: a) $A(9/2 ; 13/2 ; 15/2)$ Indication : utiliser le plan perpendiculaire à BC passant par M milieu de BC.
Que peut-on affirmer au sujet de tous les pts contenus dans ce plan ?

Exercice 4.61: $M(-11/9 ; 85/27 ; -41/27)$

Exercice 4.62: a) $x - 3y + 4z + 2 = 0$ et $3x + y = 0$
b) $4x + 5y + 2z + 31 = 0$ et $5x - 2y - 5z + 44 = 0$

Exercice 4.63: $(1 ; 2 ; 4)$ et $(-11 ; 0 ; -1)$

Exercice 4.64: $P(2 ; 3 ; -1), (b_1) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $(b_2) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 4.65: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4.66: a) $x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$ b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z - 24 = 0$
c) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z - 42 = 0$

Exercice 4.67: a) Oui, $C(-3 ; 5 ; 2)$ et $r = 4$ b) Non
c) Oui, $C(1/2 ; -2 ; -1/2)$ et $r = 4\sqrt{3}$

Exercice 4.68: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 45$

Exercice 4.69: $x^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 49/2$

Exercice 4.70: Oui

Exercice 4.71: a) $\delta(\text{centre ; plan}) < \text{rayon}$ b) $C(-1 ; 2 ; 3)$ et $r = 8$

Exercice 4.72: b) $10x - 11y + 2z - 34 = 0$

Exercice 4.73: Un corrigé sera vu à votre demande

Exercice 4.74: $(\alpha') : 12x + 4y + 3z - 209 = 0$ $(\alpha'') : 12x + 4y + 3z + 129 = 0$

Exercice 4.75: a) $\|\vec{C_1 C_2}\| = r_1 - r_2$ b) $2x + 6y - 3z - 63 = 0$

Exercice 4.76: Il s'agit du cercle de centre $C(3 ; 1 ; 2)$ et de rayon $r = \sqrt{61}$ situé dans le plan perpendiculaire à la droite reliant les centres des sphères et passant par le point C.

Exercice 4.77: $I_1(1 ; 2 ; -2)$ et $I_2(3 ; 0 ; -1)$

Exercice 4.78: c) $\begin{cases} x = -2k \\ y = 2k \\ z = 3k \end{cases}$

Si vous souhaitez commander ou utiliser ce polycopié dans vos classes, merci de prendre contact avec son auteur en passant par son site web :

<http://www.javmath.ch>