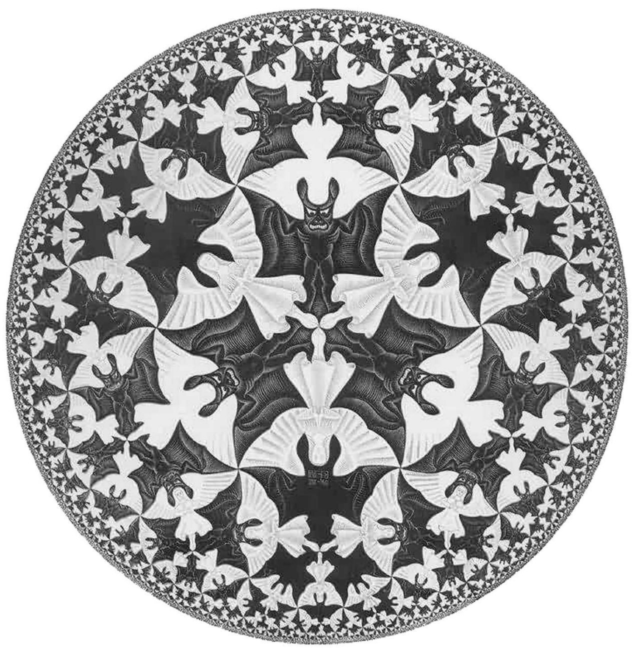
Analyse I

2M$_{\text{Stand}}$

Jean-Philippe Javet



Limite circulaire IV (Ciel et enfer)
M.C. Escher

www.javmath.ch

Table des matières

Malgré le soin apporté lors de sa conception, le polycopié que vous avez entre les mains contient certainement quelques erreurs et coquilles. Merci de participer à son amélioration en m'envoyant un mail :

javmath.ch@gmail.com

Merci ;-)

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Introduction au concept de fonction

Introduction: Le terme mathématique *fonction* apparaît à la fin du XVII^e siècle, quand le calcul différentiel et intégral en était aux premiers stades de son développement. Cet important concept est maintenant l'épine dorsale des cours de mathématiques et il est indispensable dans tous les domaines scientifiques.

Exemple 1: Vous achetez des timbres à 90 centimes. Le prix que vous paierez à la caisse dépendra du nombre de timbres que vous achetez. On dira alors que le prix *est fonction du* nombre de timbres.

Définition: Lorsqu'on met en relation des éléments d'un ensemble A avec des éléments d'une partie B, on obtient **une application $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{A}$ vers $\boldsymbol{B}$**, si les **2 règles** suivantes sont respectées :

- tout élément de A est mis en relation avec un élément de B ;
- aucun élément de A n'est mis en relation avec plusieurs éléments de B.

Une application d'une partie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est appelée **fonction**.
Si x est mis en relation avec y par la fonction f, on dit que **$\boldsymbol{y}$ est l'image de $\boldsymbol{x}$ par $\boldsymbol{f}$**.
On dira également que x est une **préimage** de y.

On rencontre différentes façons de représenter une fonction :

Expression de la fonction

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto 0{,}9x \end{aligned}$$

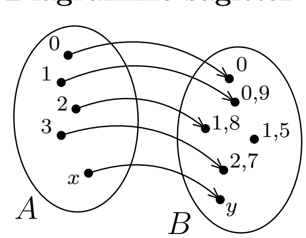
ou $f(x) = 0{,}9x$

ou $y = 0{,}9x$

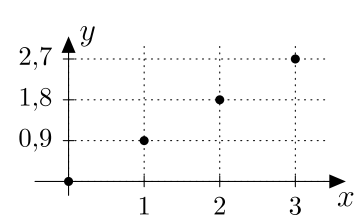
Tableau de valeurs

x	$f(x)$
0	0
1	0,9
2	1,8
3	2,7

Diagramme sagittal

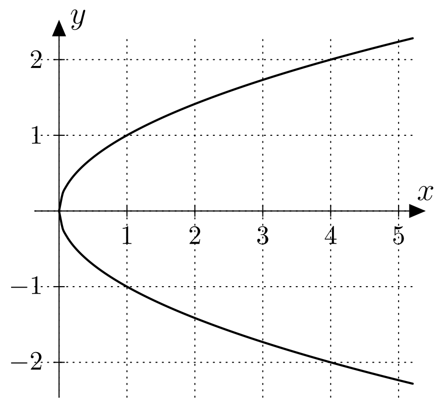


Représentation graphique

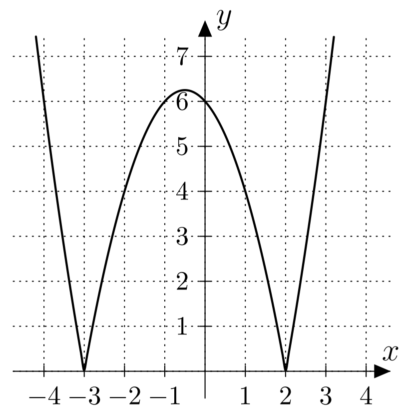


Exercice 1.1: Les courbes représentées ci-dessous sont-elles des représentations de fonctions ?

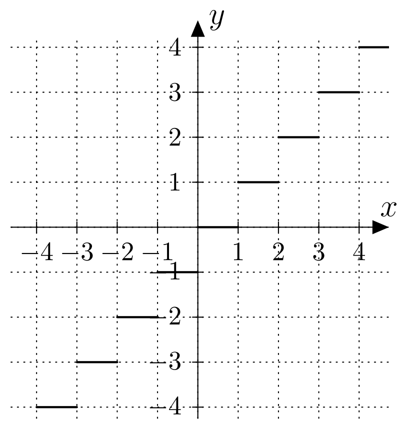
a)



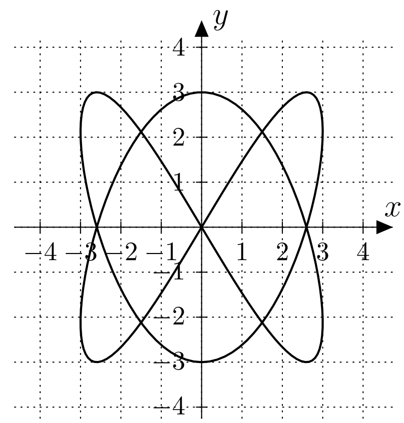
b)



c)



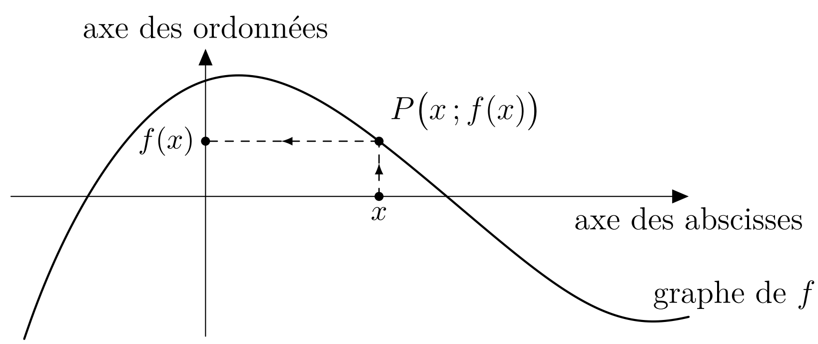
d)



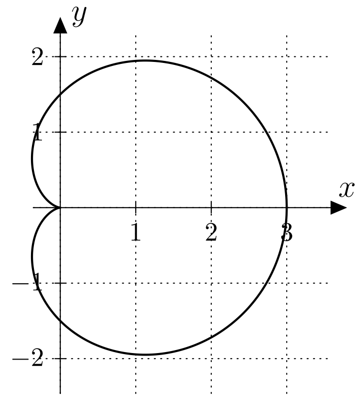
Définition: Le **graphe** d'une fonction f est l'ensemble de **tous les couples de la forme** $\big(x\,;f(x)\big)$ où x est un élément de l'ensemble de départ (ou ensemble de définition).

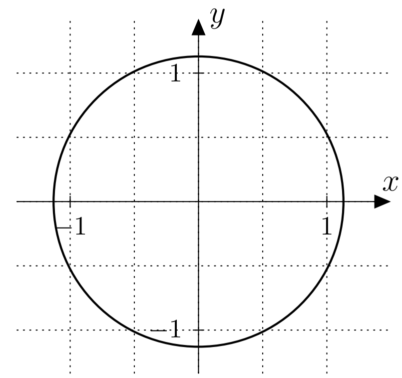
On représente en général le graphe d'une fonction dans le système d'axes Oxy, en traçant l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont de la forme $\big(x\,;f(x)\big)$.

On dit alors que le graphe de f est la **courbe d'équation** $y = f(x)$.



Attention: Toute courbe n'est pas forcément associée au graphe d'une fonction





Test de la droite verticale: *Il est facile de vérifier si une courbe est bien le graphe d'une fonction. Une droite verticale balayant le plan de gauche à droite doit partout croiser le graphe au plus une fois (zéro ou une fois).*

Exercice 1.2: Tracer le graphique des fonctions f suivantes pour $x \in [-3\,;3]$

a) $f(x) = 2x - 1$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ **c)** $f(x) = x^2 - 2x$

d) $f(x) = -x^2 + 4$ **e)** $f(x) = |x|$ **f)** $f(x) = \sqrt{x+2}$

Exercice 1.3: Un certain nombre d'exercices ou de compléments théoriques vous sont proposés sur mon site dont l'adresse est :

`www.javmath.ch`

Cliquez ensuite sur les liens 2e année : Maturité standard ou Maturité renforcée. Vous repérerez ces compléments dans ce polycopié à l'aide du logo représenté ci-contre.
L'exercice 1.3 vous attend donc à l'adresse ci-dessus.

Exercice 1.4: Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$.

a) Déterminer les abscisses des points où la courbe $y = f(x)$ coupe l'axe Ox.

b) Déterminer l'ordonnée du point où la courbe $y = f(x)$ coupe l'axe Oy.

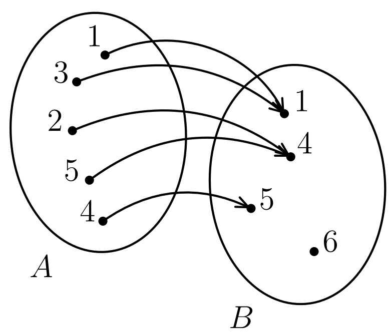
1.2 Image et image réciproque

Définition: Soit f une fonction de l'ensemble A dans l'ensemble B.

- L'**image** de l'application f, notée $\mathbf{Im}(\boldsymbol{f})$ est le sous-ensemble de B constitué de toutes les images des éléments de l'ensemble de départ A.
- L'**image réciproque** (ou préimage) d'un élément y de l'ensemble d'arrivée B, notée $\boldsymbol{^rf(y)}$, est l'ensemble des éléments de A dont l'image par l'application f est y.
- L'**image réciproque** d'une partie P de l'ensemble d'arrivée B, notée $\boldsymbol{^rf(P)}$, est l'ensemble des éléments de A dont l'image par l'application f est contenue dans P.

Exemple 2:

- On considère le diagramme sagittal suivant. Compléter :



$f(1) = \ldots\ldots$

$^rf(1) = \ldots\ldots$

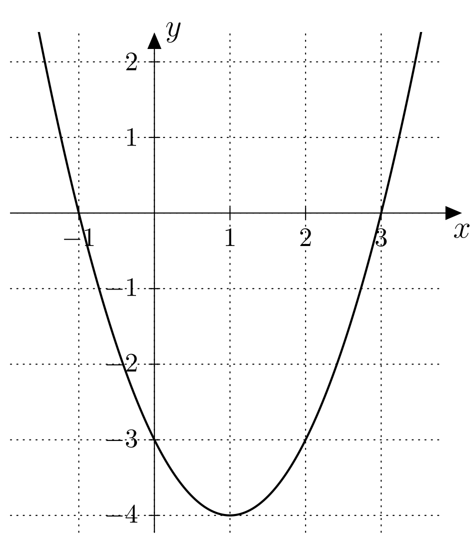
$f(\{1\,;2\,;3\}) = \ldots\ldots$

$^rf(\{1\,;4\}) = \ldots\ldots$

$^rf(6) = \ldots\ldots$

$\mathrm{Im}(f) = \ldots\ldots$

- Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x - 3$ représentée ci-dessous. Compléter :



$f(1) = \ldots\ldots$

$^rf(0) = \ldots\ldots$

$f([0\,;3]) = \ldots\ldots$

$^rf([-4\,;0]) = \ldots\ldots$

$^rf(-5) = \ldots\ldots$

$\mathrm{Im}(f) = \ldots\ldots$

- Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2$, compléter les relations

$f(0) = \ldots\ldots$

${}^r f(6) = \ldots\ldots$

$\mathrm{Im}(f) = \ldots\ldots$

${}^r f([11\,;27]) = \ldots\ldots$

www.javmath.ch

Exercice 1.5: Soit f la fonction donnée par $f(x) = 3x^2 + x - 5$

a) Calculer les images de 0 et de -3.

b) Calculer les préimages (ou image réciproque) de 5 et de -6.

Exercice 1.6: On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Effectuer un tableau de valeurs pour $x \in [-4\,;4]$.

b) Représenter le graphique de cette fonction.

c) À l'aide du graphique déterminer :

$f(\{-1\,;0\,;2\})$	${}^r f(\{-6\,;0\,;4\})$	$f(\mathbb{R})$	$f([3\,;6[)$
$f([1\,;2])$	${}^r f([-3\,;-2])$	${}^r f([1\,;2])$	${}^r f([2\,;4[)$

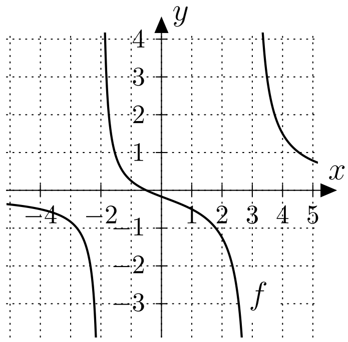
Exercice 1.7: **a)** Soit la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 6$. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

b) Même question pour la fonction g définie par $g(x) = x^2 + 2x + 6$.

Exercice 1.8: Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$. Déterminer

a) $f(4)$	**b)** $f(3)$	**c)** $4f(x)$	**d)** $f(4x)$
e) $f(x+4)$	**f)** $f(4) + f(x)$	**g)** $f(-x)$	**h)** $-f(x)$

1.3 Ensemble de définition



Soit la fonction f représentée ci-contre et définie par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-x-6}$$

Déterminer $f(-2)$ puis $f(3)$

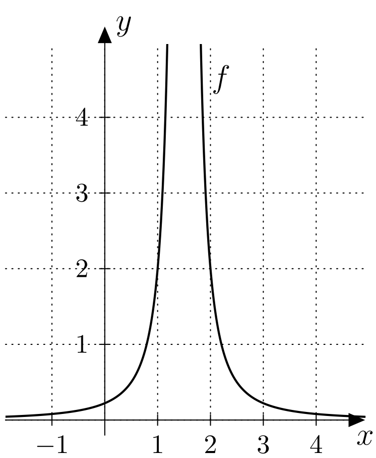
Lorsque l'on cherche l'ensemble de définition, on se souviendra des **commandements** suivants :

- Il est interdit de *diviser par zéro*.
- Il est interdit de prendre *la racine carrée d'un nombre négatif*.
- Il est interdit de calculer *le logarithme d'un nombre négatif ou nul*.

Nous aurons l'occasion d'étudier plus précisément le pourquoi de ces commandements au chapitre suivant en introduisant le calcul de limites.

Définition: L'**ensemble de définition** d'une fonction f est l'ensemble des nombres x pour lesquels $f(x)$ existe.
On note $\mathrm{E_D}(f)$ cet ensemble (ou simplement $\mathrm{E_D}$).

Exemple 3: Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{4x^2-12x+9}$ représentée ci-contre. Déterminer $E_{\mathrm{D}}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$



Exercice 1.9: Déterminer $\mathrm{E_D}(f)$ des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = 4 - \dfrac{1}{2}x$ **b)** $f(x) = x^2 - x - 2$

c) $f(x) = \dfrac{2+x}{x-1}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2+5x+9}{x^2-18}$

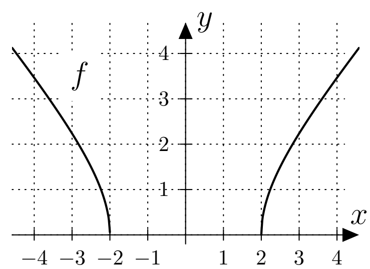
e) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+x}$ **f)** $f(x) = \dfrac{5}{3x^2-19x-14}$

g) $f(x) = \dfrac{5}{-2x^2+4x-7}$ **h)** $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2+4x-18}$

Exemple (suite):

- On a représenté la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2-4}$.

  Déterminer $\mathrm{E_D}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.



- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f donnée par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f donnée par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$$

Exercice 1.10: Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f définies par :

a) $f(x) = \sqrt{6-3x}$

b) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+5}$

d) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+5)}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-5}}$

f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x-5}}$

1.4 Le tableau de signes, un outil pour les esquisses

Lorsqu'une fonction f est donnée par son expression, une bonne esquisse graphique peut permettre de mieux l'appréhender. La recherche de l'$\mathrm{E_D}(f)$, des zéros de f ainsi que du tableau de signes nous sera le plus souvent suffisante.

Exemple 4: **a)** Effectuer une bonne esquisse de la fonction f définie par :

$$f(x) = (x^2-9)(x+1)^2$$

b) Effectuer une bonne esquisse de la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{5\,(9 - x^2)}{x^2 + 2x + 1}$$

Exercice 1.11: Déterminer $\mathrm{E_D}(f)$, les zéros, le tableau de signes ainsi qu'une esquisse des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = 4 - 5x$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$

c) $f(x) = (x + 4)^2(2 + x)$

d) $f(x) = -6x^3 + 11x^2 - 3x$

e) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

f) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 36$

g) $f(x) = \dfrac{x(x + 4)}{3 - 2x}$

h) $f(x) = \dfrac{2x}{16 - x^2}$

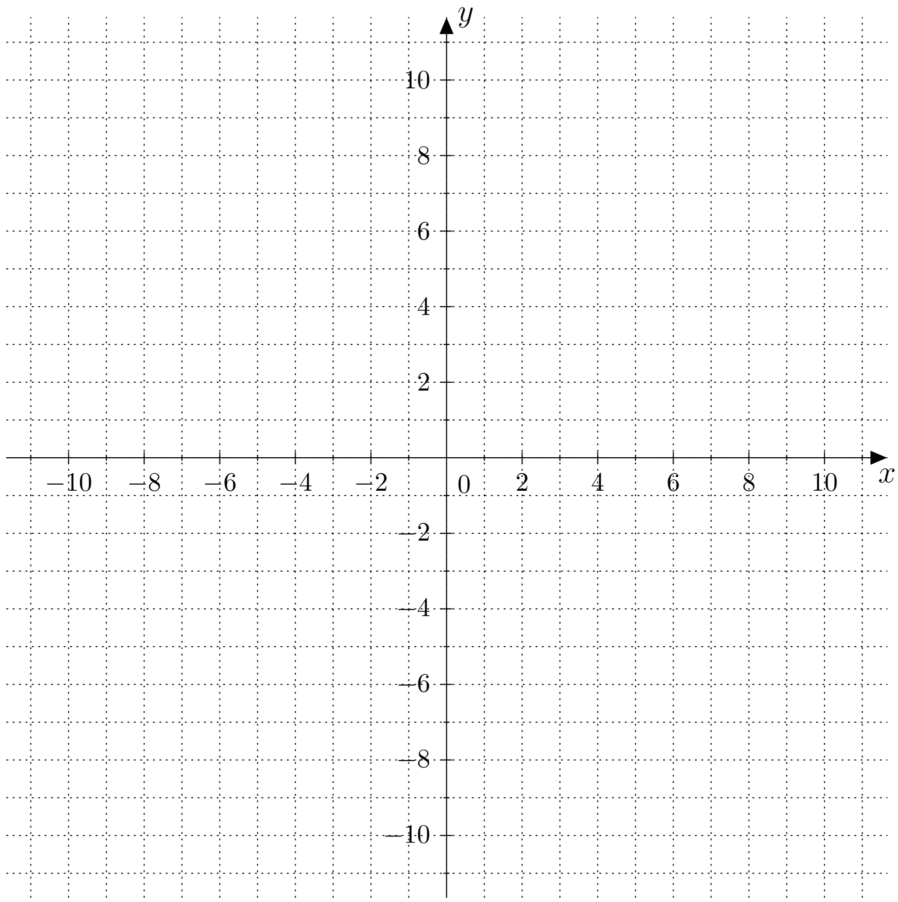
i) $f(x) = \dfrac{(x + 2)^2(x + 1)}{x^2 + x}$

j) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

k) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x + 1}$

Exercice 1.12: **a)** Représenter sur le graphe ci-dessous les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \sqrt{81 - x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = -\sqrt{81 - x^2}$$



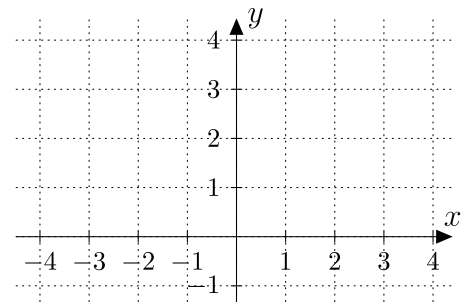
b) Que constatez-vous ?

1.5 Quelques fonctions et le nom de leur courbe :

Fonction constante $f(x) = c$

Son graphe est une droite horizontale “à la hauteur” c

Exemple : $f(x) = 3$

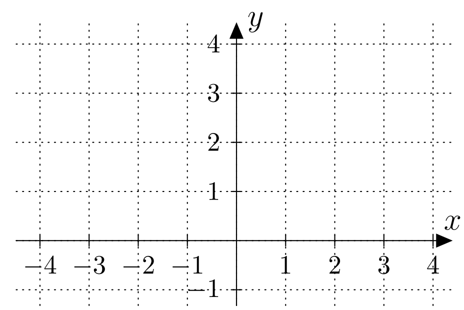


Fonction linéaire $f(x) = m \cdot x$

Son graphe est une droite qui passe par l’origine et dont la pente vaut m

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{diff. de hauteur}}{\text{diff. de longueur}}$$

Exemple : $f(x) = -2x$

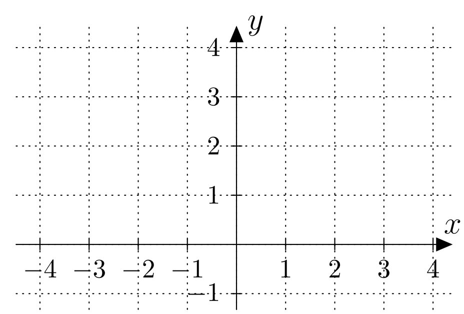


Fonction affine $f(x) = m \cdot x + h$

Son graphe est une droite de pente m et d’ordonnée à l’origine h

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{diff. de hauteur}}{\text{diff. de longueur}}$$

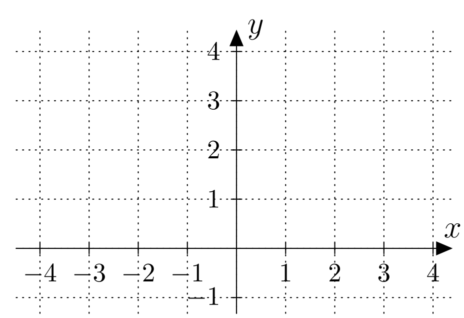
Exemple : $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$



Fonction quadratique (a > 0)
$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$

- Son graphe est une parabole tournée en $\cup$
- L’intersection avec l’axe Ox s’obtient en cherchant les solutions de l’équation
$$ax^2 + bx + c = 0$$
- Les coord. du sommet : $S\left(\frac{-b}{2a}\,;f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Exemple : $f(x) = x^2 - 1$



Fonction quadratique (a < 0)

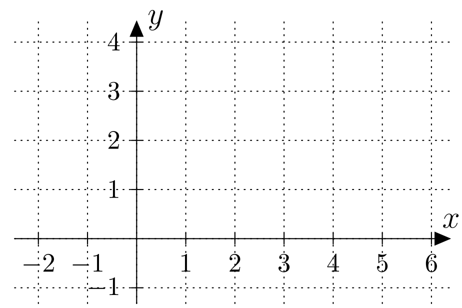
$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a < 0$

- Son graphe est une parabole tournée en $\cap$
- L'intersection avec l'axe Ox s'obtient en cherchant les solutions de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Les coord. du sommet : $S\left(\frac{-b}{2a}\,;f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Exemple : $f(x) = -x^2 + 4x$



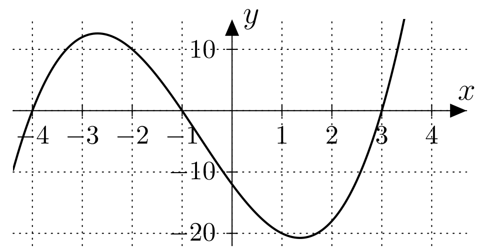
Fonction du troisième degré

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- Son graphe est une courbe admettant au plus "2 virages"
- L'intersection avec l'axe Ox s'obtient en cherchant les solutions de l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$f(x) = (x + 4)(x + 1)(x - 3)$

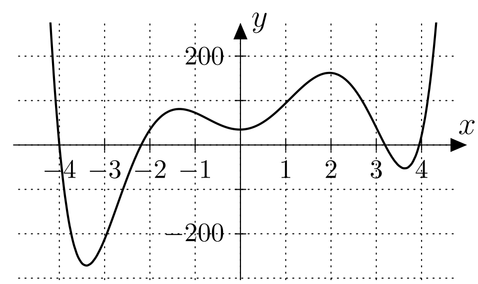


Fonction polynomiale de degré n

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

- Son graphe est une courbe admettant au plus "$n - 1$ virages"
- Une bonne esquisse de son graphe s'obtiendra en factorisant la fonction et en effectuant un tableau de signes

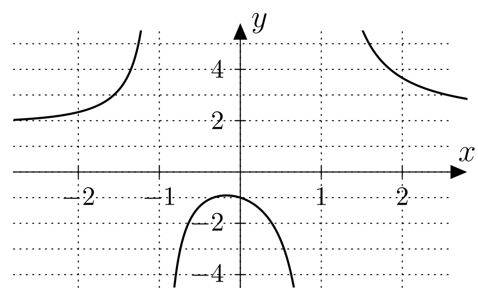
fonction de degré 6

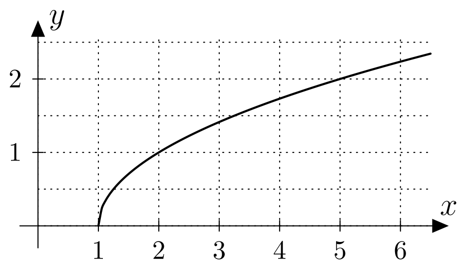


Fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{\text{polynôme } P(x)}{\text{polynôme } Q(x)}$

- Il s'agit du quotient de deux polynômes
- Son graphe admet des singularités pour les valeurs annulant le dénominateur $Q(x)$

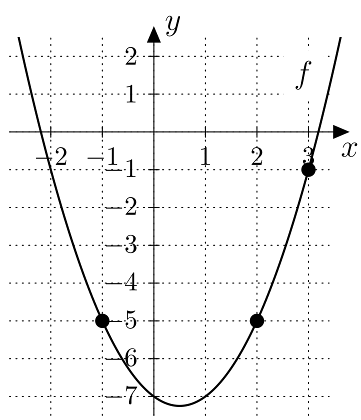
Exemple : $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{(x + 1)(x - 1)}$



Fonction racine $f(x) = \sqrt{P(x)}$	Exemple : $f(x) = \sqrt{x-1}$
• Il s'agit de la racine d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle • Il faut particulièrement être attentif à son ensemble de définition !!!	

1.6 Quelques compléments sur les fonctions quadratiques :

Exemple 5: Déterminer la fonction quadratique f dont on donne la représentation graphique ci-contre :

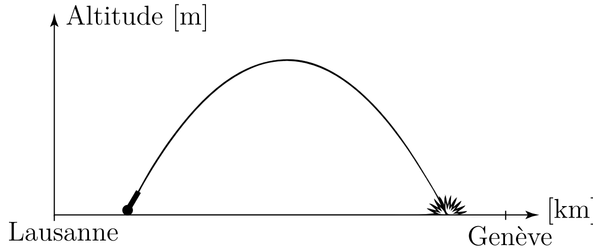


Exercice 1.13: Déterminer la fonction quadratique f dont le graphe passe par les points :

a) $A(-2\,;11)$ $B(1\,;-4)$ $C(3\,;6)$
b) $A(1\,;-2)$ $B(-1\,;-6)$ $C(0\,;-3)$
c) $A(1\,;4)$ $B(-1\,;10)$ $C(2\,;7)$

Exercice 1.14: Un peu d'artillerie ! ! !

La trajectoire d'un obus est assimilée une parabole



Distance par rapport à Lausanne	altitude de l'obus
20 km	700 m
30 km	1000 m
40 km	900 m

Connaissant 3 points de la trajectoire, saurez-vous retrouver :

a) La position du canon.

b) La position de la cible si elle est à la même altitude que le canon.

c) La flèche de la trajectoire de l'obus (jetez un coup d'oeil dans le dico !).

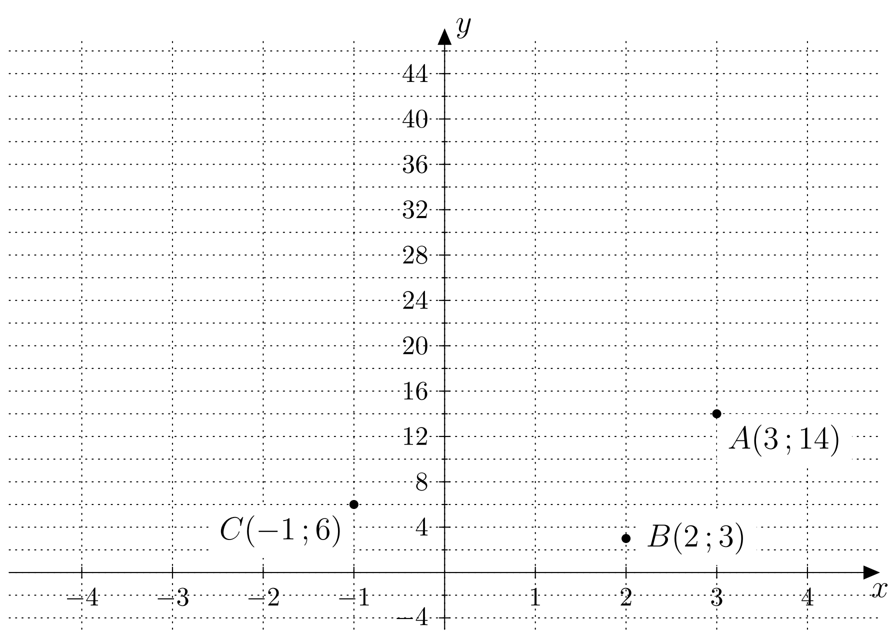
d) Si la cible est à une altitude de 400 m plus élevée que le canon, quelle est sa distance par rapport à Lausanne ?

Exercice 1.15: Les 3 points A, B et C appartiennent à une parabole.

a) Déterminer la fonction passant par ces 3 points.

b) Compléter le plus précisément possible la parabole sur le graphique ci-dessous.

c) Pour quelles valeurs de x la parabole coupe-t-elle l'axe des x ?



Exercice 1.16: Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 12x + 4$.

a) Montrer que pour tout réel k : $\quad f(6-k) = f(6+k)$

b) En déduire que la parabole admet un axe de symétrie dont on précisera l'équation.

Exercice 1.17: Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Montrer que pour tout réel k : $f\left(-\dfrac{b}{2a} - k\right) = f\left(-\dfrac{b}{2a} + k\right)$

b) En déduire que la parabole admet un axe de symétrie dont on précisera l'équation.

Exercice 1.18: Calculer les zéros, les coordonnées du sommet puis esquisser la parabole des fonctions quadratiques f suivantes :

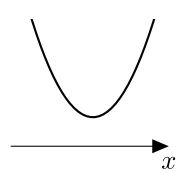
a) $f(x) = x^2 + x + 1$

b) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

c) $f(x) = (x-2)(5-x)$

d) $f(x) = x^2 - 9x$

Exercice 1.19: Compléter dans les 5 cases restantes les esquisses des paraboles d'équations $y = ax^2 + bx + c$ admettant les propriétés indiquées.

	$b^2 - 4ac < 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

1.7 Opérations sur les fonctions

Définition: Soit deux fonctions f et g. On définit leurs **somme**, **différence**, **produit** et **quotient** en posant que :

$$\big(f+g\big)\big(x\big) = f(x) + g(x)$$
$$\big(f-g\big)(x) = f(x) - g(x)$$
$$\big(f\cdot g\big)(x) = f(x)\cdot g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- L'ensemble de définition des fonctions $f+g$, $f-g$ et $f\cdot g$ est l'intersection des ensembles de définition de f et de g
- L'ensemble de définition de la fonction $\dfrac{f}{g}$ est l'intersection des ensembles de définition de f et de g, à quoi on enlève encore les valeurs annulant g

Remarque: En toute généralité, on peut définir des nouvelles fonctions selon ce même principe. Par exemple :

Soit deux fonctions f et g. On définit l'opération $\star$ en posant que :
$$\big(f\star g\big)(x) = f^2(x) + g^2(x)$$

Exemple 6: Soit les fonctions f et g définies par : $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x}$ et admettant respectivement les ensembles de définitions $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$. Compléter :

- $\big(f+g\big)(x) =$

  $\mathrm{E_D}(f+g) =$

- $\big(f-g\big)(x) =$

  $\mathrm{E_D}(f-g) =$

- $\big(f\cdot g\big)(x) =$

  $\mathrm{E_D}(f\cdot g) =$

- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) =$

  $\mathrm{E_D}(f/g) =$

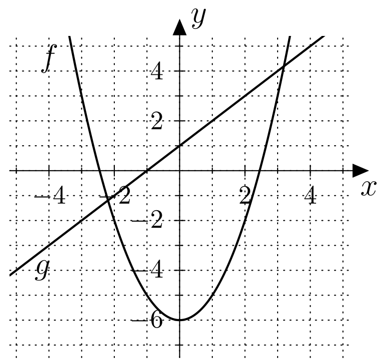
Exercice 1.20: Déterminer dans chaque cas les fonctions :

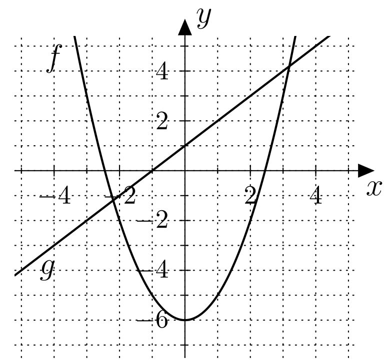
$$\big(f+g\big)(x),\ \big(f-g\big)(x),\ \big(f\cdot g\big)(x),\ \left(\frac{f}{g}\right)(x).$$

Préciser ensuite leur ensemble de définition.

a) $f(x) = 3x \quad g(x) = \dfrac{1}{x+2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x}{x-4} \quad g(x) = \dfrac{x}{x+5}$

Exercice 1.21: On a représenté sur les 2 graphiques suivants les fonctions f et g.

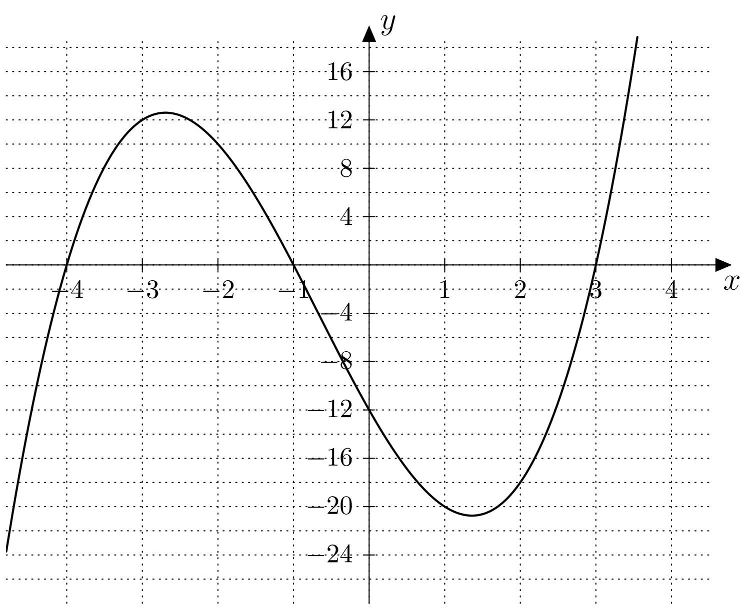




Avec un minimum de calcul, représenter à gauche $(f+g)$.
Avec un minimum de calcul, représenter à droite $(f-g)$.

Exercice 1.22: Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ représentée ci-dessous.

a) À l'aide du tableau de valeurs, tracer la fonction g définie par $g(x) = f(x) + 5$.

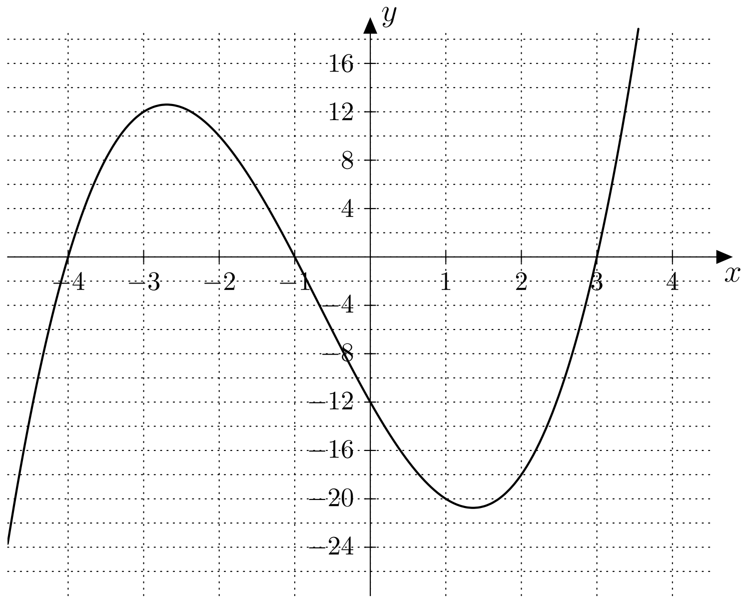


x	$f(x)$	$f(x)+5$
-4	0	
-3	12	
-2	10	
-1	0	
0	-12	
1	-20	
2	-18	
3	0	
4	40	

On obtient la courbe $y = f(x) + c$ par ....

....

b) Même consigne pour la fonction h définie par $h(x) = f(x+1)$

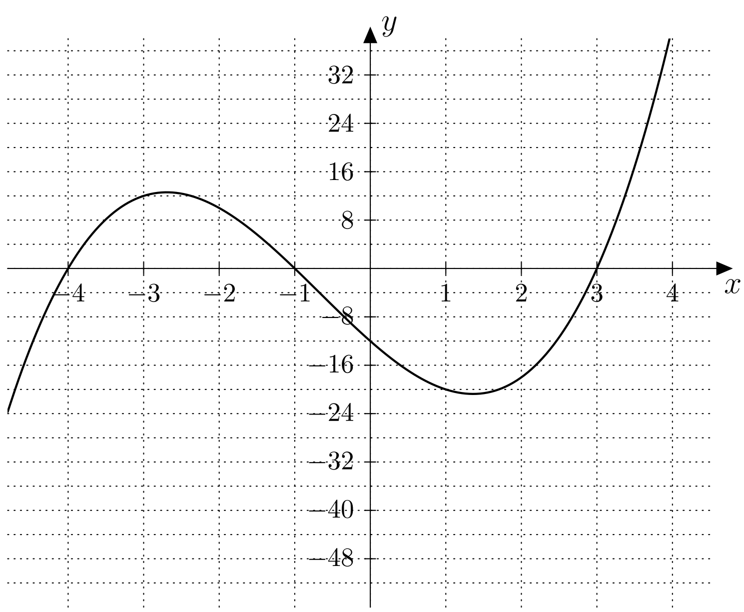


x	$f(x)$	$f(x+1)$
-4	0	
-3	12	
-2	10	
-1	0	
0	-12	
1	-20	
2	-18	
3	0	
4	40	

On obtient la courbe $y = f(x+c)$ par ....

....

c) Même consigne pour la fonction j définie par $j(x) = 2 \cdot f(x)$

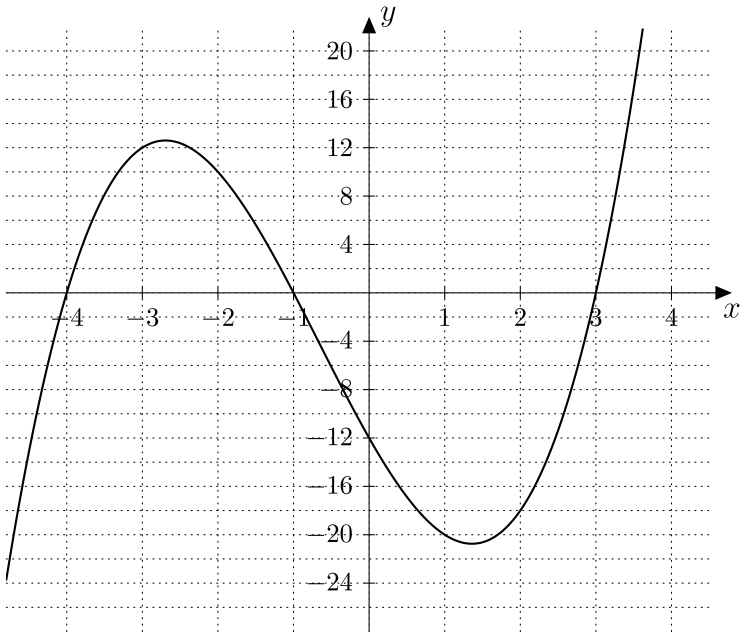


x	$f(x)$	$2 \cdot f(x)$
-4	0	
-3	12	
-2	10	
-1	0	
0	-12	
1	-20	
2	-18	
3	0	
4	40	

On obtient la courbe $y = c \cdot f(x)$ par ....

....

d) Même consigne pour la fonction k définie par $k(x) = -f(x)$

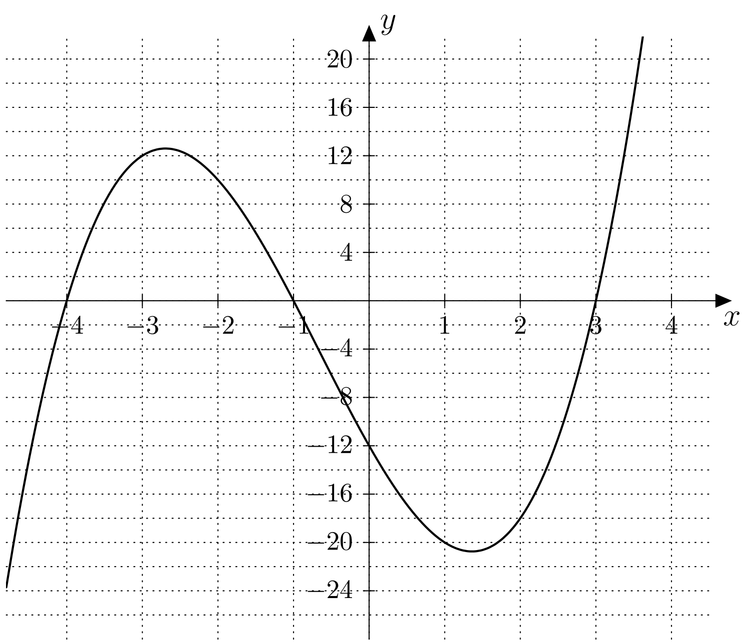


x	$f(x)$	$-f(x)$
-4	0	
-3	12	
-2	10	
-1	0	
0	-12	
1	-20	
2	-18	
3	0	
4	40	

On obtient la courbe $y = -f(x)$ par ....

....

e) Même consigne pour la fonction m définie par $m(x) = |f(x)|$



x	$f(x)$	$\|f(x)\|$
-4	0	
-3	12	
-2	10	
-1	0	
0	-12	
1	-20	
2	-18	
3	0	
4	40	

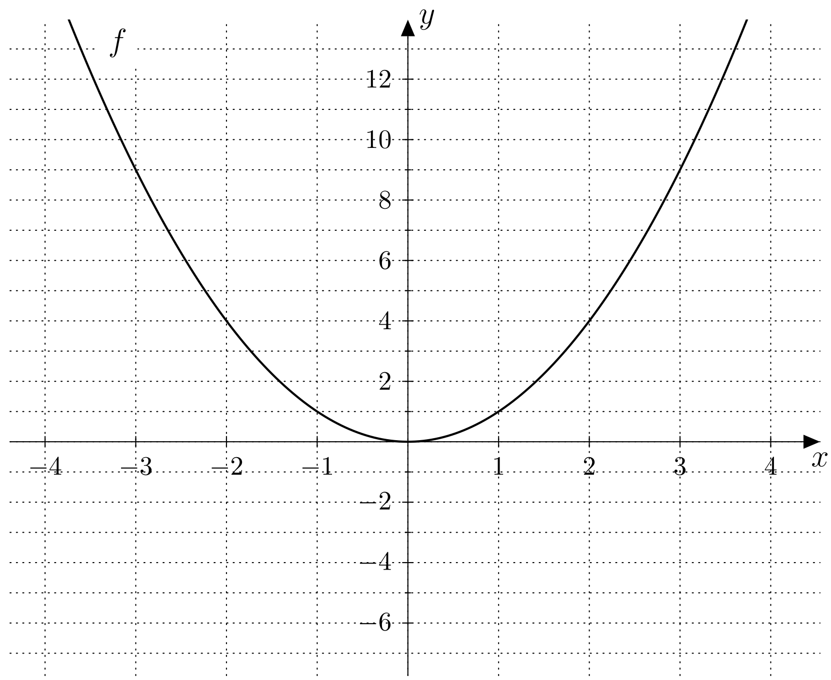
On obtient la courbe $y = |f(x)|$ par ....

....

Exercice 1.23: On a représenté la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

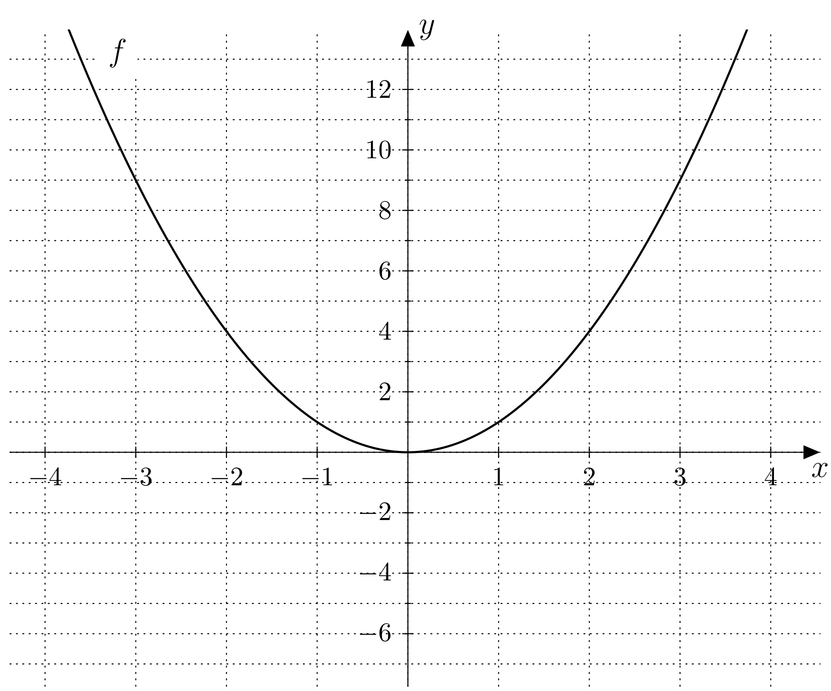
a) Tracer sur le graphique les fonctions g et h définies par :

$$g(x) = f(x) - 4 \qquad \text{puis} \qquad h(x) = |f(x) - 4|$$



b) Tracer sur le graphique les fonctions g et h définies par :

$$g(x) = 2 \cdot f(x) \qquad \text{puis} \qquad h(x) = -\frac{1}{2}f(x)$$



1.8 La composition de fonctions

Les fonctions composées, un exemple préliminaire :

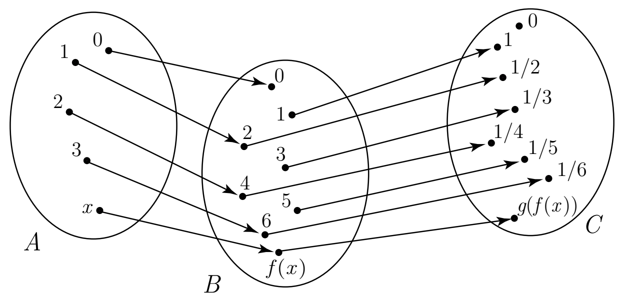
Considérons les trois ensembles suivants : $A = \{0\,;1\,;2\,;3\}$

$B = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ $\quad C = \{0\,;1\,;1/2\,;1/3\,;1/4\,;1/5\,;1/6\}$

et les applications :

$$\begin{array}{rcl} f : A & \to & B \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \ldots & \to & C \\ y & \mapsto & 1/y \end{array}$$

On peut représenter les diagrammes sagittaux des applications f et g en ne figurant qu'une seule fois l'ensemble B :



On applique successivement f puis g. On fait donc correspondre aux éléments de l'ensemble A, un élément de l'ensemble C par une nouvelle fonction définie par :

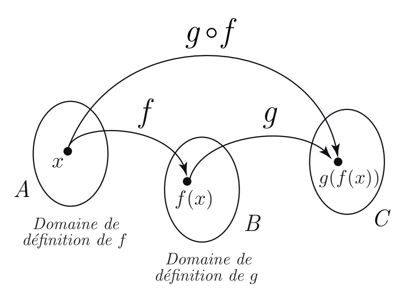
$$\begin{array}{rcl} \ldots\ldots : A - \{0\} & \to & C \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2x} \end{array}$$

Cet exemple nous amène naturellement à la définition suivante :

Définition: La **fonction composée** $g \circ f$ de deux fonctions f et g est définie par :

$$\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Le **domaine de définition** de $g \circ f$ est l'ensemble de tous les x du domaine de définition de f tels que $f(x)$ est dans le domaine de définition de g.



Remarque:

- Attention à ne pas confondre composition et multiplication !
- Remarquez bien l'ordre des opérations est l'inverse de l'ordre d'écriture.

Exemple 7: **a)** $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1$ alors

$(f \circ g)(x)$:

$(f \circ g)(x) =$

$(g \circ f)(x)$:

$(g \circ f)(x) =$

b) $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ alors

$g(f(x))$:

$g(f(x)) =$

$f(g(x))$:

$f(g(x)) =$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 2x - 6$ alors

$(f \circ g)(x) =$

$(g \circ f)(x) =$

Propriété: La composition des fonctions n'est en général **pas commutative** :

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Exercice 1.24: Soit les fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = 3x \qquad g(x) = x - 2 \qquad h(x) = 2x - 3.$$

Déterminer :

a) $f\big(g(x)\big)$ **b)** $g\big(f(x)\big)$ **c)** $f\big(f(x)\big)$

d) $f\big(g(h(x))\big)$ **e)** $g\big(f(h(x))\big)$ **f)** $h\big(g(h(x))\big)$

Exercice 1.25: On donne les fonctions :

$f_0(x) = x$

$f_1(x) = 1 - x$

$f_2(x) = \frac{1}{x}$

$f_3(x) = \frac{1}{1-x}$

$f_4(x) = \frac{x-1}{x}$

$f_5(x) = \frac{x}{x-1}$

Compléter le tableau :

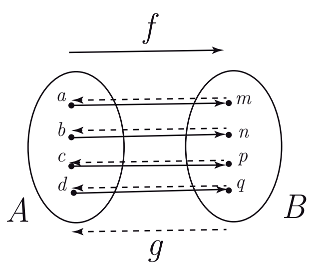
$\circ\nearrow$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0						
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						

Exercice 1.26: Les fonctions f suivantes sont des fonctions composées.
Déterminer deux fonctions g et h tels que $f = g \circ h$.

a) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ **c)** $f(x) = (x+3)^2$

d) $f(x) = \log(x^2+4)$ **e)** $f(x) = 3^{2x}$ **f)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$

1.9 Bijection et fonction réciproque



Soit une fonction f d'un ensemble A vers un ensemble B. On aimerait définir la fonction g de l'ensemble B vers l'ensemble A tel que :

- pour tout x de A : $(g \circ f)(x) = x$
- pour tout y de B : $(f \circ g)(y) = y$

Une telle fonction g s'appelle la **fonction réciproque** de f.

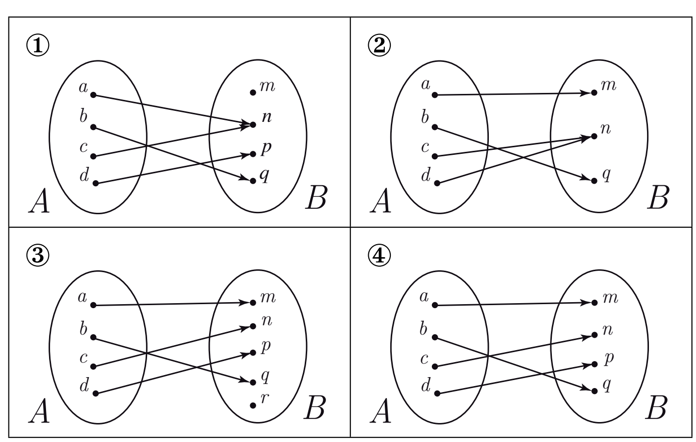
On rappelle que la définition d'une fonction f n'impose aucune condition sur les éléments de l'ensemble d'arrivée. Un élément de l'ensemble d'arrivée peut donc être image d'un ou de plusieurs éléments ou, au contraire, n'être l'image d'aucun élément de l'ensemble de départ.
Mais alors comment peut-on définir cette fonction réciproque ?

Avant de répondre aux questions suivantes, recopier ci-dessous les **2 règles** définissant une application (cf. page 1).

....

....

....



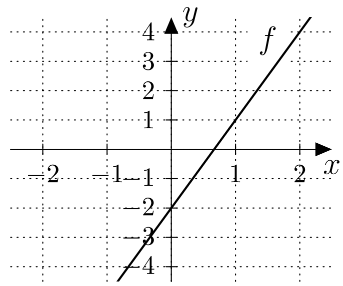
Dans les quatre cas précédents, la fonction proposée admet-elle une fonction réciproque ?

Définition: Une fonction de A vers B est **bijective** (est une **bijection**) si à chaque élément de A correspond un et un seul élément de B, et vice-versa.

Exemple 8: *Quand petit, vous comptiez jusqu'à 5 sur vos doigts, vous faisiez une bijection entre vos doigts levés et un nombre entier (pouce ↔1, pouce-index ↔ 2, ...). Mais attention, cette gestuelle risque d'être mal interprétée si vous l'utilisez en présence d'une personne issue d'une autre culture.*

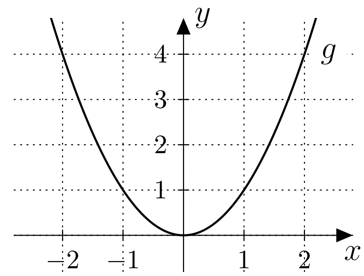
Exemple 9:

① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \ldots\ldots$



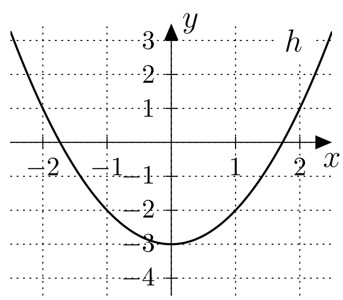
f est une fonction bijective

② $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \ldots\ldots$



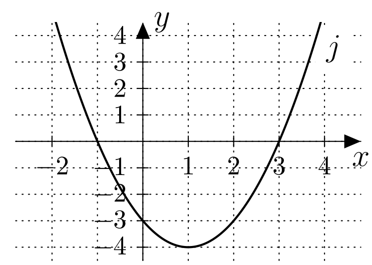
g n'est pas bijective car ......
....
....
....

③ $h : \mathbb{R} \to [-3\,;+\infty[$
$x \mapsto x^2-3$



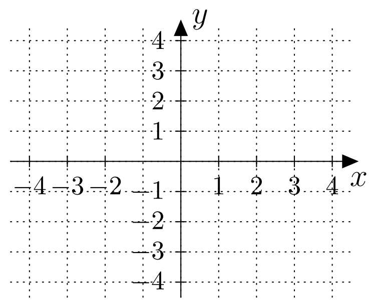
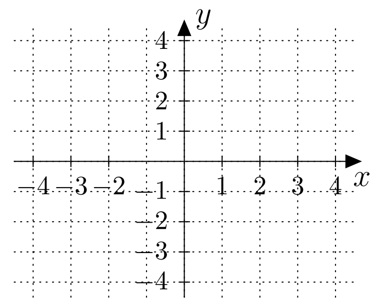
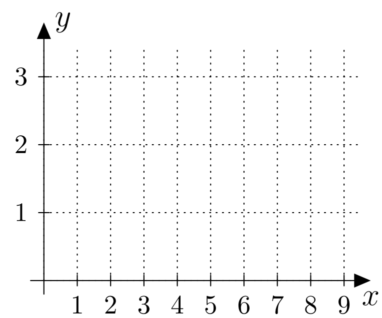
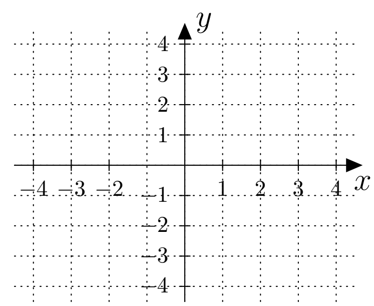
h n'est pas bijective car ......
....
....
....

④ $j : [1\,;+\infty[\to [-4\,;+\infty[$
$x \mapsto x^2-2x-3$



j est une bijection car ....
....
....
....

Exercice 1.27: Après avoir représenté les fonctions, déterminer si elles sont bijectives.

a) $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -2x+3 \end{array}$ 	**b)** $\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2-3 \end{array}$ 
c) $\begin{array}{rccl} h : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ 	**d)** $\begin{array}{rccl} j : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ & x & \mapsto & 1/x \end{array}$ 

Définition: Si f est une bijection de A vers B, il existe une fonction de B vers A appelée **fonction réciproque**, notée ${}^r\!f$, telle que :

$$y = f(x) \iff x = {}^r\!f(y)$$

Exemple 10: Reprenons une dernière fois l'exemple des timbres (cf. page 1).
La réciproque de $y = 0{,}9x$ est $x = \dfrac{y}{0{,}9}$.

Cette fonction nous donne *le nombre de timbres* en fonction du *prix payé*.

Exemple 11: Un dernier “exemple” :

Remarque:

- la fonction réciproque d'une bijection est une bijection ;
- la notation ${}^r f$ est fréquemment remplacée par f^{-1} ;
- pour déterminer l'application réciproque, on doit résoudre l'équation $y = f(x)$ en fonction de x.

Exemple 12: Déterminer les fonctions réciproques des fonctions suivantes :

a) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x+1 \end{array}$

b) $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} - \{-5\} & \rightarrow & \mathbb{R} - \{\dots\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+3}{x+5} \end{array}$

c) $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & [3\,; +\infty[\\ x & \mapsto & x^2+3 \end{array}$

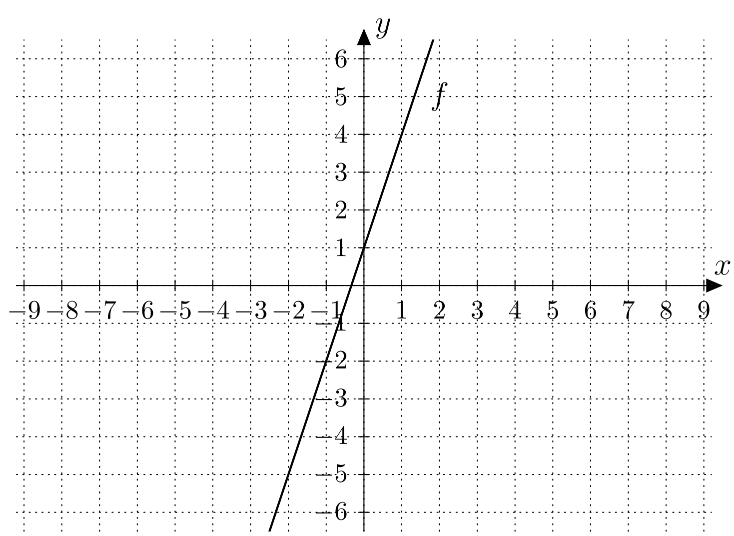
Exercice 1.28: Déterminer l'application réciproque des huit bijections suivantes (en précisant les ensembles de départ et d'arrivée) :

- $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$
- $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x \end{array}$
- $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{array}$
- $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$
- $f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$
- $f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$
- $f_7 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}-\{1\} & \to & \mathbb{R}-\{\dots\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array}$
- $f_8 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}-\{1\} & \to & \mathbb{R}-\{\dots\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$

1.10 Graphe de deux fonctions réciproques

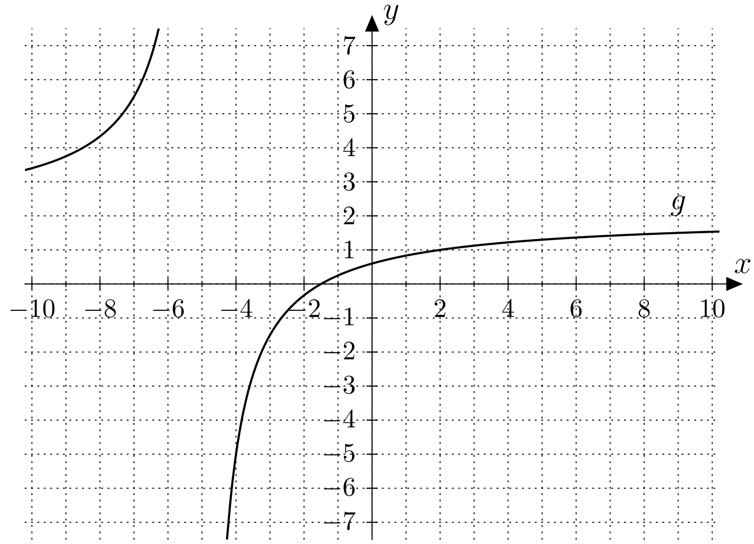
Dans les exemples précédents, nous avons déterminé des fonctions réciproques.
On a représenté sur les trois graphiques suivants les fonctions f, g et h. Ajouter respectivement à ces trois graphiques les courbes représentatives de ${}^rf$, ${}^rg$, et ${}^rh$.

1^er cas : $f(x) = 3x + 1$ ${}^rf(x) = \dots\dots\dots\dots$



2e cas : $g(x) = \dfrac{2x+3}{x+5}$ ${}^r g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

x	${}^r g(x)$



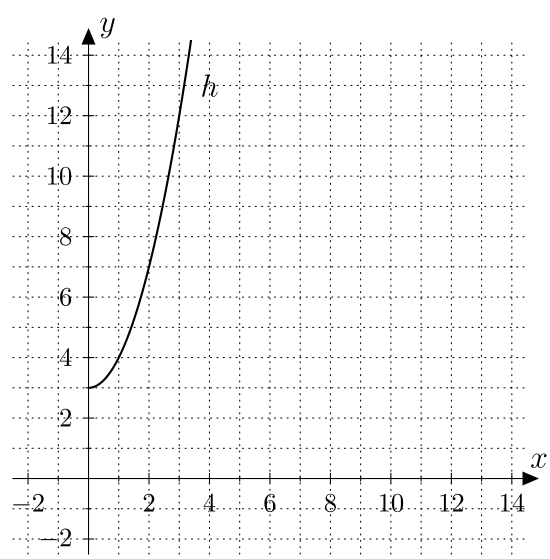
Constatations : ....

....

....

Vérifier sur un 3e cas si vos constatations sont confirmées.

3e cas : $h(x) = x^2 + 3$ ${}^r h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$



Compléter la phrase :
Soit f une fonction bijective représentée sur un graphique. Alors le graphe de sa fonction réciproque ${}^r f$ est ....

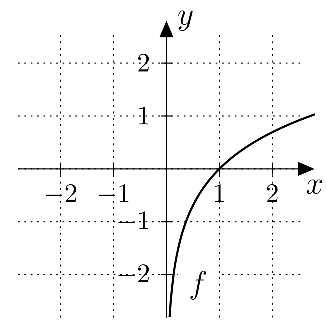
....

....

Exercice 1.29: La fonction f représentée ci-contre est une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$.

a) En déduire le graphique de $^r f$.

b) Reconnaissez-vous les deux fonctions considérées ?



Exercice 1.30: Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

a) Déterminer $\mathrm{E_D}(f)$ puis $\mathrm{Im}(f)$.

b) Déterminer $^r f$.

c) Que constatez-vous ?

d) Proposer une deuxième fonction ayant la même propriété.

Exercice 1.31: Finissons par un petit *Vrai– Faux*.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) La courbe d'équation $x^2 + 3x + y = 5$ correspond au graphe d'une fonction.

b) Si f est définie par $f(x) = 3x^2 - 12$ alors $\mathrm{Im}(f) = [4\,; +\infty[$.

c) Sur un graphique, une fonction f est bijective si chaque droite horizontale d'équation $y = c$ (où c appartient à $\mathrm{Im}(f)$) ne coupe le graphe de f qu'une fois.

d) Soit f et g deux fonctions quelconques, alors $g \circ f = f \circ g$.

e) Les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ sont des fonctions réciproques.

f) Les fonctions f et g définies par $f(x) = 5x - 7$ et $g(x) = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{7}{5}$ sont réciproques.

g) Sur un graphique, la courbe $y = f(x) + c$ correspond à une translation de c vers le haut de la courbe $y = f(x)$ quelle que soit la fonction f donnée.

h) La courbe $y = x^2 + 3x + 7$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

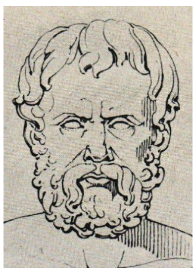
i) La droite verticale $x = -\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de la courbe $y = ax^2 + bx + c$.

2

Limites et Asymptotes

2.1 Les limites dans la vie courante

Vitesse instantanée:



Zénon d'Élée (env. 490 - 430 av. J.-C)

$\dfrac{0}{0}$ **est une forme indéterminée**

La notion de vitesse, et en particulier la vitesse d'un objet à un instant précis, est, étonnamment, subtile et difficile à définir précisément. Considérez cette affirmation : « À l'instant où le cheval a franchi la ligne d'arrivée, il galopait à 66 km/h ». Comment peut-on étayer une telle affirmation ? Une photographie ne serait d'aucune aide, puisque sur le cliché, le cheval est immobile ! Il y a une sorte de paradoxe à essayer de quantifier le mouvement à un moment précis puisqu'en se focalisant sur un seul instant on stoppe le mouvement !

Les problèmes de mouvement étaient un des thèmes centraux de Zénon et d'autres philosophes dès le V^e siècle avant Jésus-Christ. L'approche moderne, rendue célèbre par Newton, ne considère plus la vitesse à un instant donné, mais sur un petit intervalle de temps contenant cet instant.

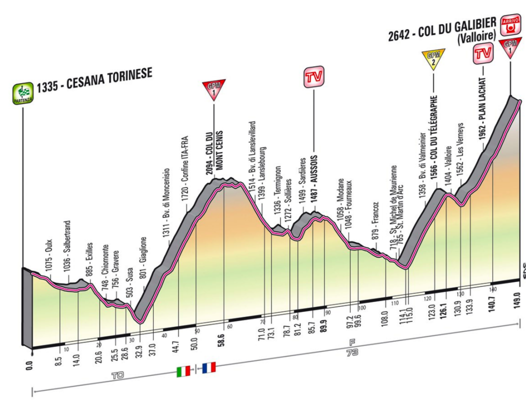
Rappelons que la vitesse est la distance parcourue Δx divisée par le temps Δt qu'il a fallu pour la parcourir. Pour avoir la vitesse instantanée, on choisira $\Delta t \to 0$. On ne peut pas prendre $\Delta t = 0$, puisqu'on aurait une division par 0. La vitesse instantanée est donc une limite.

"Pente d'une courbe":

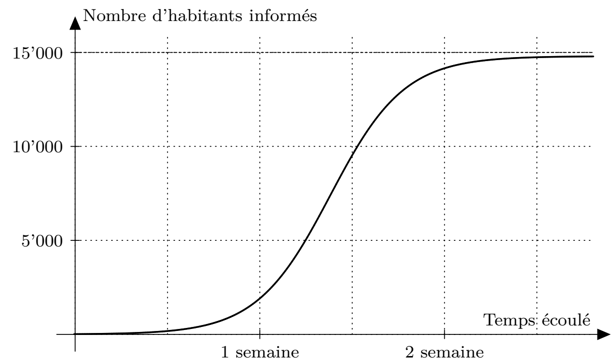
On a vu en géométrie analytique comment calculer la pente d'une droite. Qu'en est-il pour une courbe ? Contrairement aux droites, "la pente d'une courbe" n'est pas constante. Par exemple, quand les coureurs du Tour de Romandie gravissent un col, la pente n'est pas toujours la même ; certains tronçons sont plus raides que d'autres. Peut-elle même être définie ?

Comme la pente d'une droite est le déplacement vertical Δy divisé par le déplacement horizontal Δx, la pente en un point précis d'une courbe sera obtenue en choisissant $\Delta x \to 0$, autrement dit en prenant deux points « proches » sur la courbe.

La "pente d'une courbe" en un point peut donc elle aussi être vue comme une limite... *Celle de la pente de la tangente à la courbe au point considéré.*

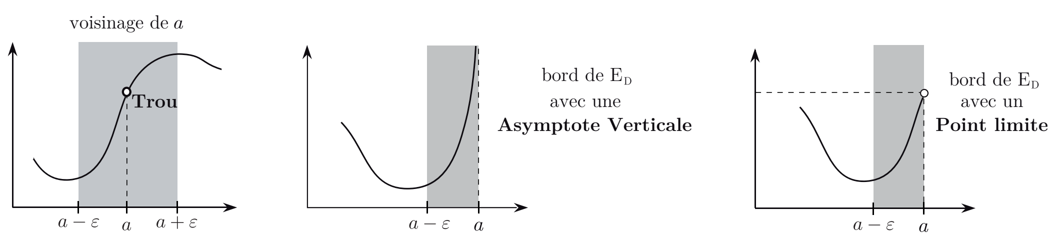


Rumeur: Une rumeur est lancée le premier janvier dans une ville de 15'000 habitants. La courbe représente le nombre de personnes au courant de cette rumeur. D'après cette courbe, on peut estimer qu'à long terme toute la ville aura entendu parler de cette rumeur



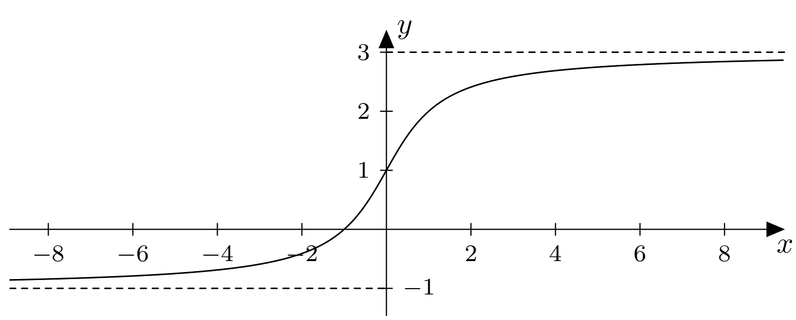
2.2 Un exemple introductif

☞ La notion de limite est particulièrement utile pour étudier le comportement d'une fonction au voisinage d'un trou ou d'un bord (point limite ou asymptote verticale) de son domaine de définition.



☞ Mais la notion de limite s'utilise également pour appréhender le comportement de la courbe infiniment à gauche ou infiniment à droite, c'est-à-dire respectivement quand x devient

- un nombre très "grand" dans les négatifs ($x \to -\infty$)
- un nombre très "grand" dans les positifs ($x \to +\infty$).



- "Infiniment à gauche", la fonction "**plafonne**" en $y = -1$
- "Infiniment à droite", la fonction "**plafonne**" en $y = 3$

Exemple 1: Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ - \{1\,;4\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3(1-x)}{(\sqrt{x}-1)(x-4)} \end{array}$$

Nous allons étudier le comportement de cette fonction au bord de son ensemble de définition, c'est-à-dire en

- $x = 0$ (bord gauche), en $x = 1$ puis $x = 4$ (valeurs interdites)
- et finalement en $x \to +\infty$

a) Si on **évalue** la fonction f pour ces 3 valeurs particulières, on risque d'obtenir des réponses peu concluantes :

$f(0) =$ $f(1) =$ $f(4) =$

b) Utilisons alors des petits **tableaux de valeurs** :

- S'approcher de la valeur 0 depuis **la droite** ($x \to 0^+$)

$\leftarrow$ *droite*

x	**0**	0,01	0,1
$f(x)$	0,75	0,827	1,013

Ainsi, il semblerait que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 depuis la droite vaut .....

- S'approcher de la valeur 1 en venant depuis **la gauche** ($x \to 1^-$) et depuis **la droite** ($x \to 1^+$)

gauche $\to$ $\leftarrow$ *droite*

x	0,9	0,99	**1**	1,01	1,1
$f(x)$	1,886	1,989	? ? ?	2,012	2,12

Ainsi, il semblerait que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 vaut .....

- S'approcher de la valeur 4 en venant depuis **la gauche** ($x \to 4^-$) et depuis **la droite** ($x \to 4^+$)

gauche $\to$ $\leftarrow$ *droite*

x	3,9	3,99	**4**	4,01	4,1
$f(x)$	89,25	899,3	? ? ?	-900,7	-90,75

Ainsi, il semblerait que la limite de $f(x)$ quand :

x tend vers 4 depuis la gauche vaut .....

x tend vers 4 depuis la droite vaut .....

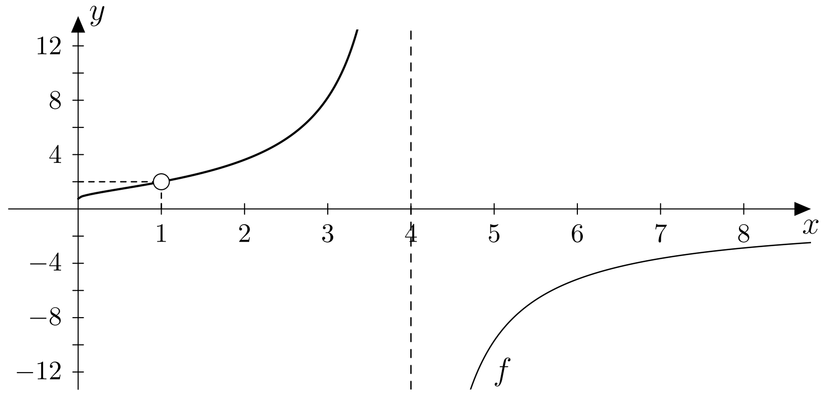
- Prendre des valeurs **de plus en plus grandes** ($x \to +\infty$)

$\to \quad +\infty$

x	1000	10'000	100'000
$f(x)$	-0,098	-0,030	-0,0095

Ainsi, il semblerait que la fonction plafonne à la hauteur ..... *lorsque x tend vers $+\infty$*

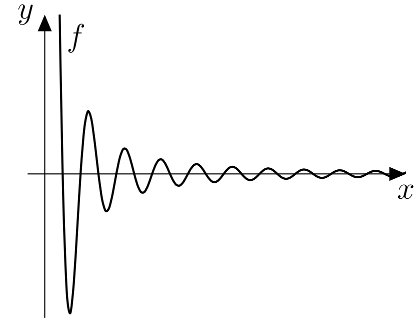
c) Observons ceci sur la représentation graphique de f



d) Pour décrire le comportement de la fonction f, nous utiliserons les **terminologies** et **notations** suivantes :

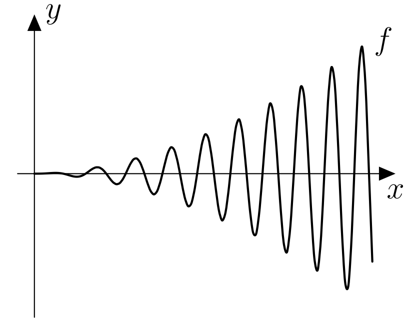
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	**Limites**	**La fonction f admet**
0	3/4	$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ n'est **pas défini**, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0{,}75$	un **Point limite** en $(0\,;3/4)$
1	0/0 **indéterminé**	$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$	un **Trou** en $(1\,;2)$
4	-9/0 **non défini**	$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$	une **Asymptote Verticale** en $x = 4$
$\to +\infty$		$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$	une **Asymptote Horizontale** à droite en $y = 0$

Exercice 2.1: En observant les graphiques suivants, déterminer les limites probables proposées



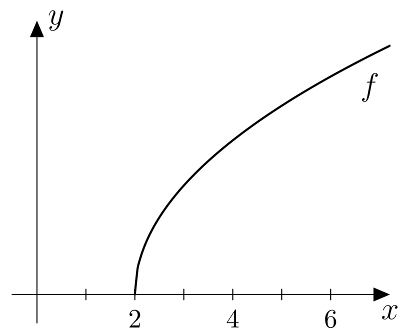
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$



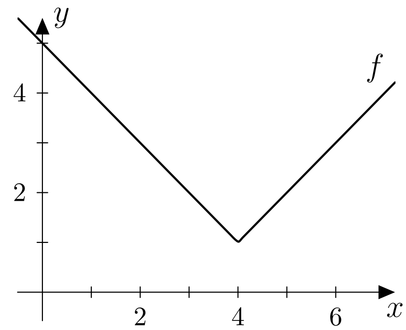
b) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$



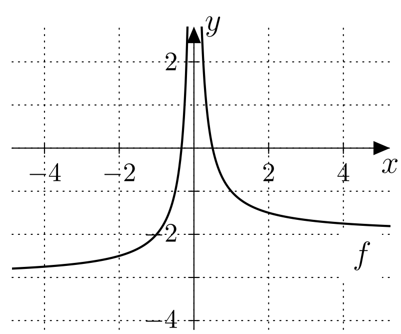
c) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$



d) $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

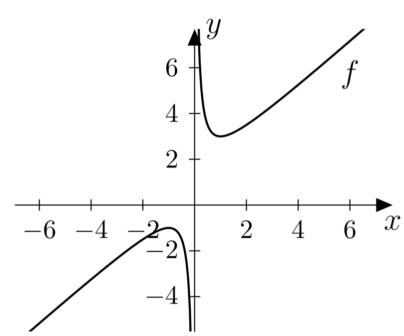


e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$



f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 2.2: Deviner à l'aide d'une calculatrice la valeur des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2^x-2}{x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3}{1-x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2-2}{x^2}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

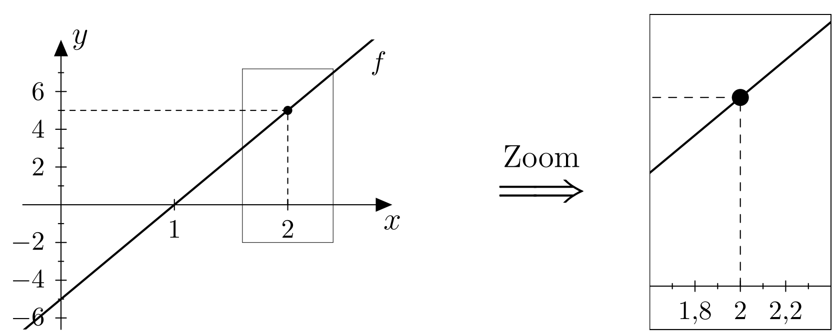
Exercice 2.3: Esquisser le graphe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2-x}+1$.
Puis en déduire $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2.3 Définitions de la limite d'une fonction en un point

Définition: Soit a et L deux nombres réels et f une fonction.

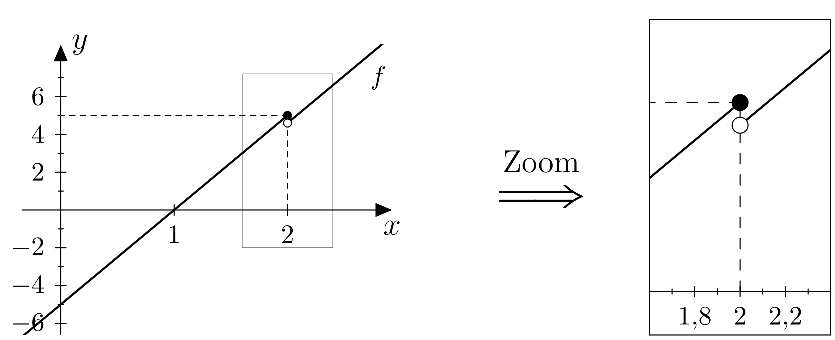
- Le nombre L est la limite de f en $x = a$ si $f(x)$ reste arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a, mais $x \neq a$.
- On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$
- On dit aussi que L est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

Exemple 2: • Où la limite en $x = 2$ **est définie** :



La limite $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ est bien définie et vaut $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$

• Où la limite en $x = 2$ **n'est pas définie** :



La limite $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'est pas définie car …

Définitions:

- Le nombre L est **la limite de f en $x = a$ depuis la gauche** si $f(x)$ reste arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a, mais $x < a$.

  On note dans ce cas : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$
- On définit de façon analogue **la limite de f en $x = a$ depuis la droite**, notée $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

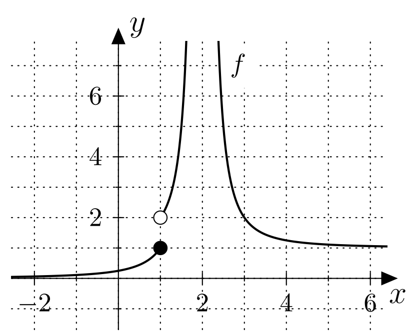
Fin de l'exemple: Dans le deuxième exemple précédent, on a :

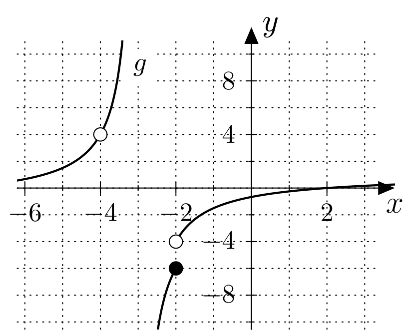
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4{,}8$$

Propriété: Le nombre L est **la limite de f en $x = a$** (et donc cette limite existe) si et seulement si la limite depuis la gauche est égale à la limite depuis la droite :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Exemple 3: En étudiant les graphiques des fonctions f et g ci-dessous, estimer les limites suivantes :

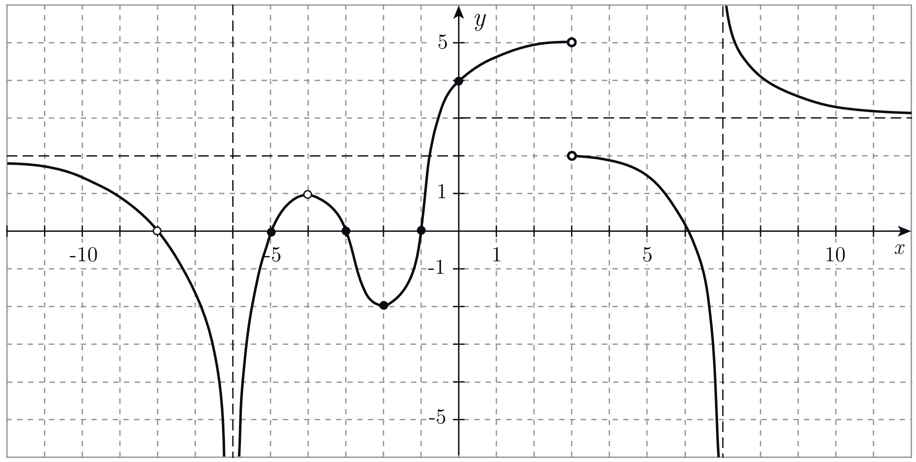




- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

- $\lim\limits_{x \to -4^-} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to -4^+} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to -4} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to -3^-} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to -3^+} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to -2} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 2.4: Voici le graphe d'une fonction f :



a) Déterminer $E_D(f)$.

b) Déterminer les zéros de f.

c) Compléter le tableau :

a	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	Caractéristiques
$-\infty$				
-8				
-6				
-4				
-2				
0				
3				
7				
$+\infty$				

2.4 Calcul de limites quand $x \to a$, où a est un nombre

1^er^ cas: **Limites de fonctions continues en a :**

Introduisons d'abord une définition intuitive de la continuité :
«Une fonction est continue dans un intervalle si on peut la dessiner d'un bout à l'autre de l'intervalle sans lever le crayon.»

☞ Si f est continue en a, la limite en a est égale à l'image de a

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Exemple 4:

- $\lim_{x \to 2} 3x^2 + x = 3 \cdot 2^2 + 2 = 14$
- Si $f(x) = 5\left(-x^2 - 9x + 2\right)$ alors

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \ldots\ldots \qquad \lim_{x \to -3} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2^e^ cas: **Limites du quotient de deux fonctions :**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$

- $\boxed{\text{avec le dénominateur non nul}}$

  ☞ Si $\lim_{x \to a} N(x) = c_1$ et $\lim_{x \to a} D(x) = c_2$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = \dfrac{c_1}{c_2}$

- $\boxed{\text{avec le numérateur non nul et le dénominateur nul}}$

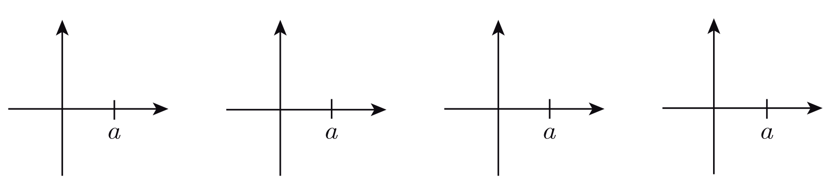
  ☞ Seule une des trois réponses suivantes est possible :

  a) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$
  b) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$
  c) $\lim_{x \to a} f(x)$ **non définie** dans le cas où :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Pour déterminer la bonne réponse, il faut donc comparer la limite à gauche et la limite à droite.
Si elles sont égales, la bonne réponse sera la **a)** ou la **b)**.
Si elles sont différentes, la bonne réponse sera la **c)**.

Graphiquement*, la courbe admettra en $x = a$ une* ***asymptote verticale*** :



- $\boxed{\text{avec le numérateur et le dénominateur nuls}}$

☞ Si le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers 0, on a une forme **indéterminée.** En effet :

$\frac{0}{0}$ *est indéterminé, car* $k \cdot 0 = 0$ *pour tout* k.

Cette forme indéterminée n'est qu'une **réponse provisoire** à ce calcul de limite. Il s'agira par la suite de **lever cette indétermination**.

Dans le cas de fractions rationnelles, la *factorisation* et la *simplification* de fractions le permettront :

Supposons que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{0}{0}$ alors :

- $N(a) = 0$ donc $N(x)$ est divisible par $(x - a)$
- $D(a) = 0$ donc $D(x)$ est aussi divisible par $(x - a)$

La fraction pourra donc être simplifiée par $(x - a)$.

Observons ceci sur un exemple :

Exemple 5: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} = \dfrac{0}{0}$ **indéterminé** $\Longrightarrow$ facto

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-3)}{(x+1)} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Graphiquement*, la courbe* $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$ *admettra un trou en* $(2\,;-1/3)$.

Un petit mélange: Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to 3} 2(x - 4)^5 =$
- $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x - 3} =$
- $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4}{x + 1} =$

- $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4}{(x+1)^2} =$

- $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1} =$

Exercice 2.5: Déterminer l'$\mathrm{E_D}$ des expressions suivantes puis en calculer la limite

a) $\lim\limits_{x \to 2} 5x$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} 2x + 3$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 4x + 1$

d) $\lim\limits_{x \to -4} \sqrt{25 - x^2}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 2}{x + 2}$

g) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{x^2 - x - 12}$ **h)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$ **i)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

j) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$ **k)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$ **l)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 8}$

Exercice 2.6: On considère les fonctions f définies ci-dessous.
Déterminer $\mathrm{E_D}(f)$ et calculer les limites à gauche et à droite des valeurs interdites.

a) $f(x) = \dfrac{12 - 2x}{3 - x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 4}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x - 7}{-x^3 + x^2 - x + 1}$

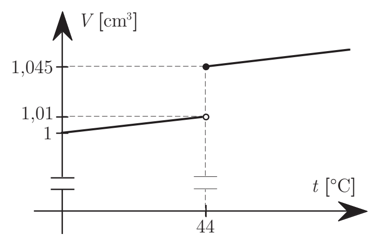
Exercice 2.7: Déterminer l'E_D des expressions suivantes puis en calculer la limite

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

Exercice 2.8: Observons la variation du volume V du phosphore en fonction de la température t. Soit 1 cm^3 de phosphore solide.



Liquéfaction du phosphore

- De 0° à 44°, le volume augmente insensiblement et de façon continue.
- À 44°, si peu qu'on élève la température, le volume augmente brusquement de 35 mm^3 et le phosphore se liquéfie.
- Au-delà de 44°, le volume augmente à nouveau insensiblement et de façon continue.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 44^-} V(t)$, $\lim\limits_{x\to 44^+} V(t)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to 44} V(t)$

Exemple 6: Où la **division de polynômes** est bien utile !!

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-7x-6}{x^3+x^2-2x} =$

Exercice 2.9: Déterminer l'E_D des expressions suivantes puis en calculer la limite

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2+x-1}{x^3+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{3x^3-18x^2+36x-24}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-6x+5}$

Exemple 7: Où il faut **manipuler des racines** !!

- $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} =$

- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{3-\sqrt{x+6}} =$

- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-\sqrt{x+6}}{x-3} =$

Exercice 2.10: Déterminer l'E_D des expressions suivantes puis en calculer la limite

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3-\sqrt{x+7}}{x-2}$

Exercice 2.11: Sur la parabole d'équation $y = x^2$ on choisit un point M distinct de l'origine O. La médiatrice du segment OM coupe l'axe Oy en N. Vers quelle valeur tend l'ordonnée de N lorsque M s'approche de l'origine ?

2.5 Opérations sur les limites

Les règles suivantes ne seront pas démontrées, néanmoins elles semblent assez naturelles. Vous les avez spontanément utilisées dans les exercices !!

Règles: Soit les fonctions f et g admettant des limites finies quand $x \to a$, avec a fini ou infini, alors :

- $\lim\limits_{x\to a} \big(k \cdot f(x)\big) = k \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$ où k est un nombre réel
- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ idem pour " $-$ "
- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
- $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

2.6 Calculs avec le symbole ∞ et les cas d'indétermination

Rappel: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{nbre} \neq 0}{x} = \pm\infty$ "nbre infiniment grand (pos ou neg)"

Lorsque l'on effectue des calculs avec l'infini, on doit prendre quelques précautions. Par exemple que peut bien valoir "$\frac{\infty}{\infty}$" ?

En fait cette réponse est **indéterminée**

Règles: Soit $c \in \mathbb{R}$ et k un entier strictement positif :

$$(+\infty) + (+\infty) = \dots \qquad (-\infty) - (+\infty) = \dots \qquad (+\infty) + c = \dots$$

$$\infty \cdot \infty = \dots \qquad \infty \cdot c = \dots \quad (\text{si } c \neq 0)$$

$$(\infty)^k = \dots \qquad \sqrt{+\infty} = \dots$$

$$\frac{\infty}{c} = \dots \qquad \frac{\infty}{0} = \dots$$

$$\frac{c}{\infty} = \dots \qquad \frac{0}{\infty} = \dots$$

Ces 11 cas **ne sont pas** des situations **indéterminées**.

Mise en garde: Lorsque l'on obtient l'une ou l'autre des formes suivantes, on ne peut pas conclure de manière immédiate, mais il s'agira de manipuler l'expression algébriquement :

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty \cdot 0 \qquad \infty - \infty$$

Ces expressions sont appelées des **formes indéterminées**.

Exemple 8: Calculer les limites suivantes :

- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{2+x}{x}} =$

- $\displaystyle \lim_{x \to 0} 3x \cdot \frac{5}{x^2 - 3x} =$

Exercice 2.12: Calculer la limite si elle est définie

a) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{3 + \frac{1}{x-1}}{2 - \frac{x}{x-1}}$

b) $\displaystyle \lim_{x \to -2} (2x+4) \frac{5x}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$

c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{2}{x} + \frac{x-5}{2x}$

d) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} - \frac{3x}{x^2 - 4x + 4}$

2.7 Calcul de limites quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

Convention: Lorsque nous écrirons $\lim_{x\to\infty} f(x)$, cela signifiera que nous nous intéressons indifféremment aux calculs $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ou $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Règle 1: En $+\infty$ (respectivement $-\infty$), toute fonction polynôme a la même limite que son terme de degré le plus élevé

$$\lim_{x\to\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$$

Exemple 9: $\lim_{x\to\infty} 7x^3 - 1000x^2 - 2000x - 1 = \lim_{x\to\infty} 7x^3$ en effet :

Règle 2: En $+\infty$ (respectivement $-\infty$), toute fonction rationnelle a la même limite que le rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Et ainsi, on obtient : $\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \infty & \text{si } n > m \end{cases}$

Exemple 10:

- $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + 2} =$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{3x^3 + 2} =$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x} =$

Exemple 11: Après avoir calculé les 3 limites proposées, retrouvez les représentations graphiques des fonctions "correspondantes" :

a) pour f définie par $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$:

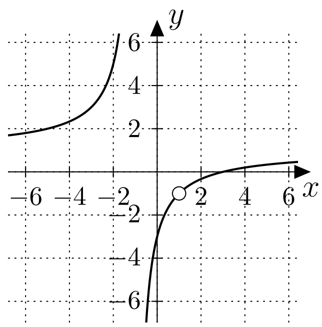
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x+1} =$$

b) pour g définie par $g(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}$:

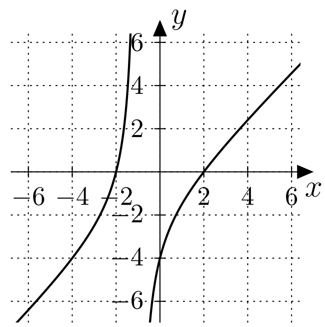
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} =$$

c) pour h définie par $h(x) = \dfrac{x-4}{(x+1)^2}$:

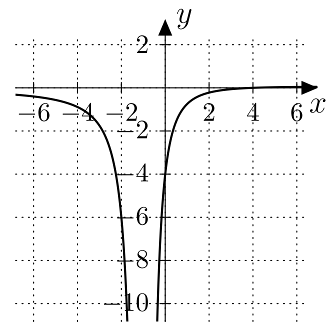
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-4}{(x+1)^2} =$$



❶



❷



❸

Exercice 2.13: Calculer la limite si elle définie

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x}{3x^2-5x+1}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-x+1}{x^3+x}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+3}{2x^2+5}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}$ **e)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-3x+2}$ **f)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1-x}$

Exercice 2.14: Calculer la limite si elle définie

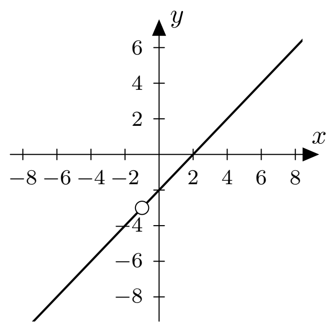
a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2x-5+\frac{10}{x+2}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x+3+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{3x}$ **d)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{5}+\frac{x}{(x-2)^2}$

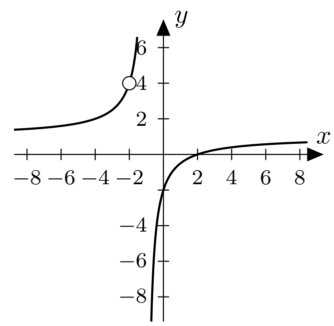
Exercice 2.15: Pour chaque fonction f, on propose deux esquisses différentes. Laquelle est la bonne ?

(en justifiant votre raisonnement à l'aide de calculs de limites)

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

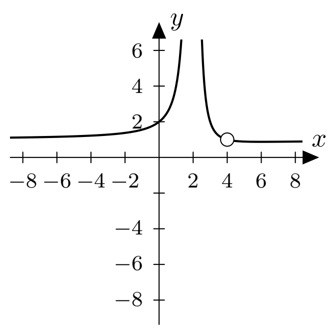


❶

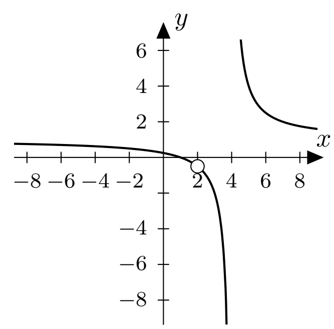


❷

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 8}$

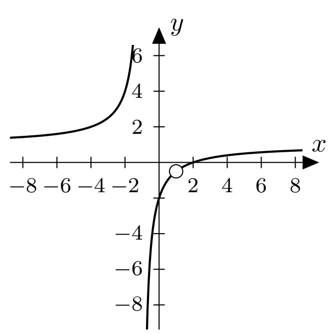


❶

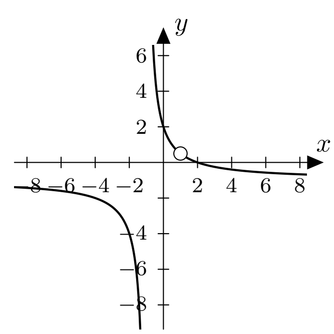


❷

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$



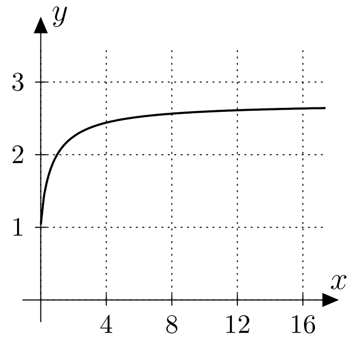
❶



❷

Bonus : Déterminer l'expression des 3 fonctions représentées ci-dessus, mais non proposées dans la donnée

Une limite célèbre: Dans le chapitre concerné aux logarithmes, nous avons déjà croisé cette célèbre limite :



$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} = 2{,}718\ldots$$

C'est ici l'occasion de remarquer que l'on peut facilement se tromper en faisant des raisonnements qui semblent justes.

On pourrait en effet se dire que quand x tend vers l'infini, 1/x tend vers 0, et qu'il reste alors 1 puissance infini, donc 1. Or, ce n'est pas la réponse exacte. Aussi, en cas de doute, il est prudent de vérifier sa réponse par un calcul numérique.

De plus, on a aussi $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

2.8 Asymptotes

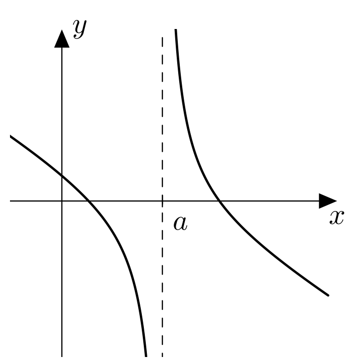
Notions intuitives: Une **droite asymptote** à une courbe est une droite telle que, lorsque l'abscisse ou l'ordonnée *tend vers l'infini*, la distance de la courbe à la droite tend vers 0.

Cette droite particulière nous servira de *guide* pour tracer le graphique de la fonction donnée.

À l'exception des asymptotes verticales, une courbe peut être amenée à couper sa droite asymptote.

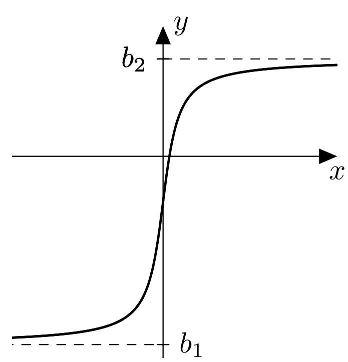
La notion géométrique d'asymptote correspond à la notion algébrique de **limite infinie** ou de **limite à l'infini**.

Nous étudierons 3 cas en particulier :



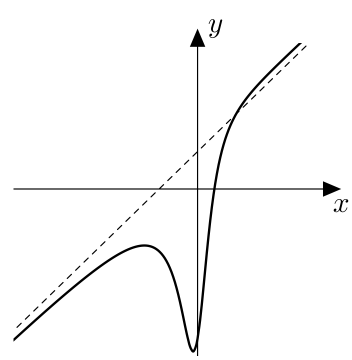
Asymptote verticale

- $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) = \ldots$
- $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \ldots$



Asymptotes horizontales

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ldots$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ldots$



Asymptote oblique

- équation d'une asymptote oblique :

$$y =$$

Définition: La droite $x = a$ est une **asymptote verticale** (AV) de la courbe $y = f(x)$ si :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Méthode (AV):

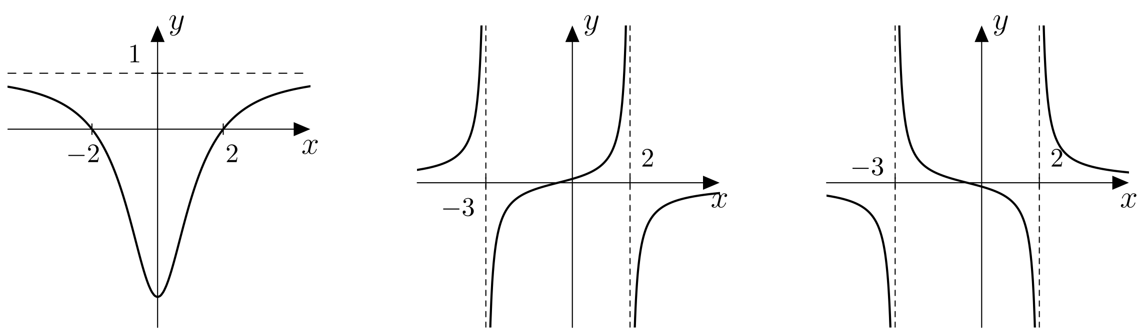
- Les AV sont à chercher parmi les valeurs interdites. On calculera donc $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ pour tout point a n'appartenant pas à $\mathrm{E_D}$.
- Si cette limite est infinie ($\pm\infty$), alors la droite $x = a$ est une AV de $y = f(x)$.
- Afin de préciser la position de la courbe par rapport à l'AV, on pourra encore calculer les deux limites :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Exemple 12: Déterminer les AV des 2 fonctions f et g suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x - 6}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$

Parmi les 3 graphiques, lesquels représentent les fonctions f et g ?



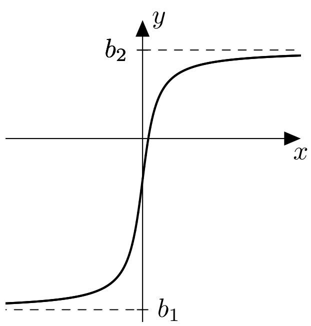
❶ ❷ ❸

Exercice 2.16: Déterminer les équations des AV des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{9}{x^2 - 9}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - 3x - 10}$

c) $f(x) = \dfrac{2(x+2)^2}{(x-3)(x+1)}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$

Définitions:



- La droite $y = b_1$ est une **asymptote horizontale à gauche** (AHG) de la courbe $y = f(x)$ si :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b_1$$

- La droite $y = b_2$ est une **asymptote horizontale à droite** (AHD) de la courbe $y = f(x)$ si :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b_2$$

- Si $b_1 = b_2$, alors on dira simplement que cette droite est l'**asymptote horizontale** (AH) de la courbe $y = f(x)$.

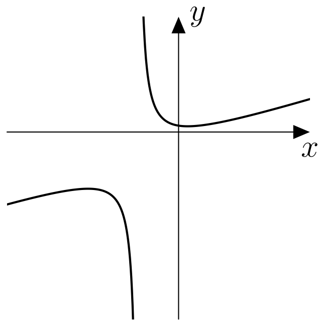
Méthode (AH): La courbe $y = f(x)$ ou $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ admet une asymptote horizontale si et seulement si le degré de $P(x) \leqslant$ degré de $Q(x)$.

En effet, dans ce cas, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) =$ nbre (evt. nul).
Dans le cas contraire, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (c.f. page ...)

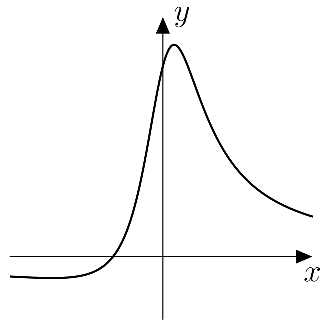
Exemple 13: Déterminer les éventuels AH des 3 fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 2}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x + 2}$

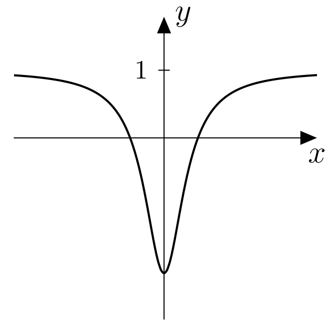
Associer les fonctions f, g et h aux trois esquisses ci-dessous :



❶



❷



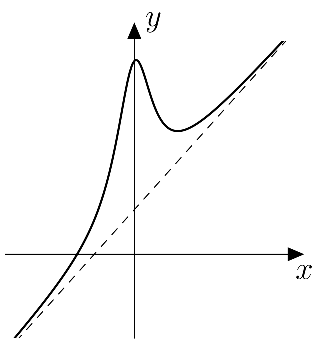
❸

Exercice 2.17: Déterminer les équations des éventuelles AH

a) $f(x) = \dfrac{9}{x^2 - 9}$ **b)** $g(x) = \dfrac{2(x+2)^2}{(x-3)(x+1)}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 4}$

Définition: La droite $y = mx + h$ est une **asymptote oblique** de la courbe $y = f(x)$ s'il existe une fonction $\delta(x)$ telle que :



$$f(x) = mx + h + \delta(x) \quad \text{vérifiant que} \quad \lim_{x \to \infty} \delta(x) = 0$$

Cet énoncé donne une interprétation intuitive de l'AO :

"Une fonction admettant une AO se comporte à l'infini comme elle"

Méthode (AO): On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

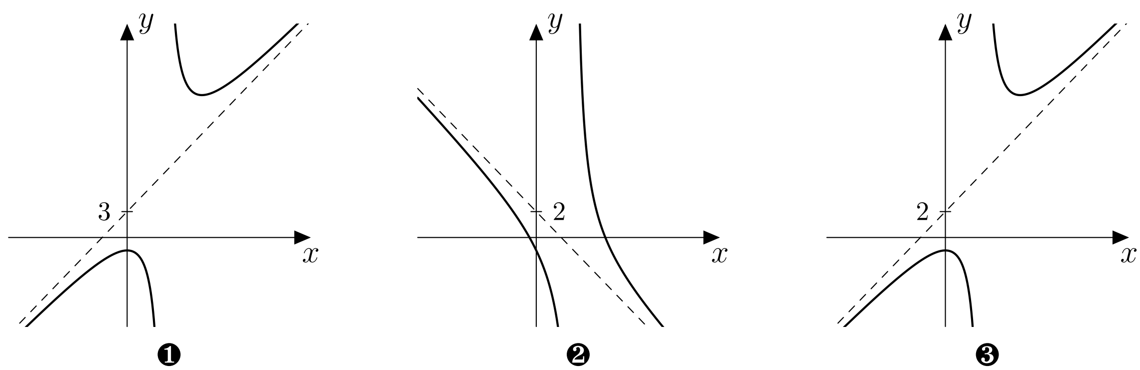
- La courbe $y = f(x)$ admet une **asymptote oblique** si et seulement si

  le **degré de $\boldsymbol{P(x)}$ = degré de $\boldsymbol{Q(x)} + 1$**.

- On effectue alors la **division polynomiale** de $P(x)$ par $Q(x)$ afin d'en obtenir le quotient et le reste.
- De **l'égalité fondamentale**, on en déduit l'AO et $\delta(x)$.

Exemple 14: Déterminer l'AO de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 1}{x - 1}$:

Laquelle de ces 3 esquisses correspond à la fonction ci-dessus ?



Exercice 2.18: Exprimer chacune des fonctions f suivantes sous la forme :

$$f(x) = mx + h + \delta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to\infty} \delta(x) = 0$$

En déduire les équations des AV et AO

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{x^2 + 2x + 4}$

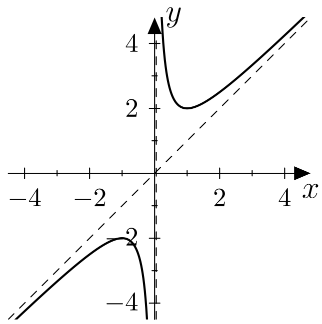
d) $f(x) = -2x + \dfrac{5x - 24}{x - 5}$

Exercice 2.19: Associer chaque graphe à une fonction dont on donne l'expression

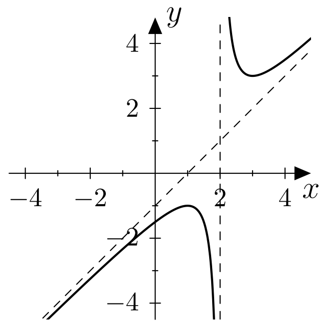
a) $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$ **b)** $f(x) = -2x + \dfrac{1}{x+1}$

c) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ **d)** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

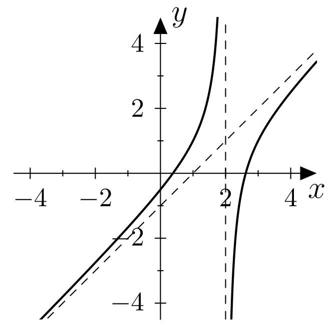
e) $f(x) = -x + 1 - \dfrac{1}{x+1}$ **f)** $f(x) = x - 1 - \dfrac{1}{x-2}$



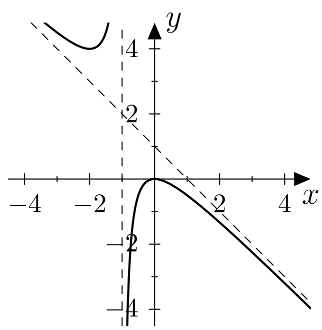
❶



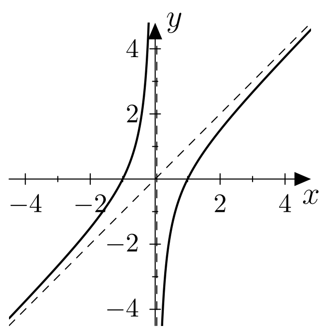
❷



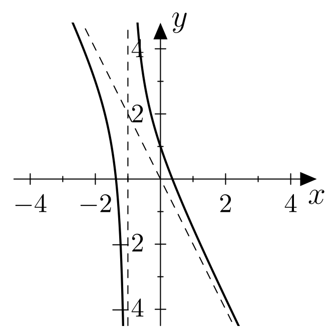
❸



❹



❺



❻

Exercice 2.20: Proposer quatre réels a, b, c et d afin que le graphe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

respecte les conditions suivantes :

- les droites d'équation $x = 3$ et $y = -2$ sont respectivement une AV et une AH ;
- le graphe de f passe par le point $P(2\,;0)$.

Exercice 2.21: On considère les 12 fonctions rationnelles :

$$f_1(x) = \frac{4x^2}{2x^2+1} \qquad f_2(x) = -2x+5+\frac{1}{x+1} \qquad f_3(x) = \frac{2x}{x+1}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x-7} \qquad f_5(x) = \frac{2x}{x-7} \qquad f_6(x) = \frac{1}{(x+1)(x+10)}$$

$$f_7(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad f_8(x) = -2x+5+\frac{1}{x-5} \qquad f_9(x) = 1+\frac{7}{x^2-4}$$

$$f_{10}(x) = 1+\frac{7}{x^2+4} \qquad f_{11}(x) = -2x+5+\frac{1}{x^2+5} \qquad f_{12}(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x+10)}$$

Parmi les fonctions rationnelles proposées ci-dessus, déterminer “de tête” laquelle est caractérisée par les asymptotes suivantes :

	AV	**AH ou AO**
a)	$x=-1$	$y=0$
b)	$x=-1$ et $x=-10$	$y=2$
c)	aucune	$y=2$
d)	$x=7$	$y=2$
e)	$x=-2$ et $x=2$	$y=1$
f)	$x=5$	$y=-2x+5$
g)	$x=-1$	$y=2$
h)	aucune	$y=1$
i)	$x=-1$	$y=-2x+5$
j)	$x=7$	$y=0$
k)	aucune	$y=-2x+5$
l)	$x=-1$ et $x=-10$	$y=0$

Exercice 2.22: Pour chacun des cas suivants, donner un exemple de fonction dont le graphe admet :

a) une seule asymptote qui est verticale d’équation $x = 2$;

b) deux asymptotes, une AV en $x = -3$ et une AH en $y = 5$;

c) deux asymptotes, une AO en $y = x + 2$ et une AH en $y = -4$.

Exercice 2.23: Déterminer, suivant les valeurs de n ($n \in \mathbb{N}$), les asymptotes de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{x^n+3}{x^2-9}$

2.9 Position de la courbe par rapport à son AO ou AH

Dans le cas d'une AO: La division polynomiale nous a permis d'exprimer la fonction f de départ sous la forme :

$$f(x) = mx + h + \delta(x).$$

☞ $y = mx + h$ correspond à l'équation de l'AO

mais quel sens peut-on donner au terme $\delta(x)$?

Réponse : Le signe de $\delta(x)$ nous permettra de connaître la position de la courbe par rapport à l'AO. En effet :

- de $\lim\limits_{x\to\infty} \delta(x) = 0$, on en déduit que le graphe de la fonction f se rapproche de plus en plus de l'AO ;
- de $f(x) = mx+h+\delta(x)$ on obtient : $\boxed{\delta(x) = f(x) - (mx + h)}$

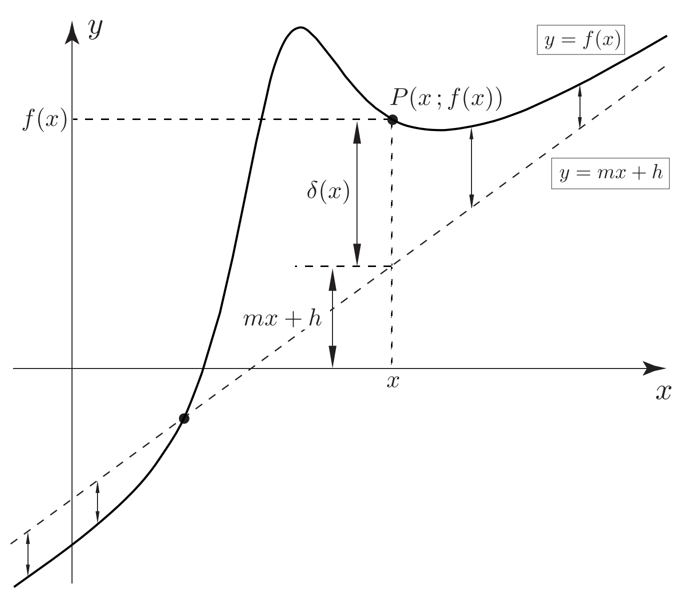
  En valeur absolue, $\delta(x)$ mesure pour tout x l'écart entre le graphe de la fonction f et l'AO.

Plus précisément, soit $P\big(x; f(x)\big)$ un point du graphe de f :

- P est au-dessus de l'AO $\iff f(x) > mx + h$
  $\iff f(x) - (mx + h) > 0$
  $\iff \delta(x) > 0$

- P est au-dessous de l'AO $\iff f(x) < mx + h$
  $\iff f(x) - (mx + h) < 0$
  $\iff \delta(x) < 0$

- P est un point de l'AO $\iff f(x) = mx + h$
  $\iff f(x) - (mx + h) = 0$
  $\iff \delta(x) = 0$



Exemple 15: On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$

- Déterminer l'équation de l'AO et $\delta(x)$.
- Déterminer la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.
- En déduire une bonne esquisse de f.

Exercice 2.24: Pour chacune des fonctions f proposées, déterminer

- $\mathrm{E_D}(f)$ puis le signe de f.
- Les équations de toutes les asymptotes (AV et AO) ainsi que la position de la courbe par rapport à elles.
- Une bonne esquisse de f.

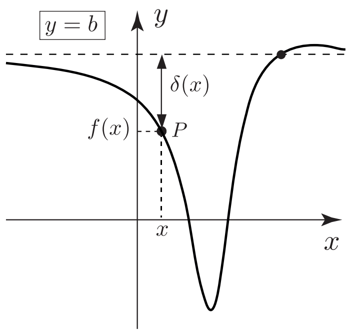
a) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{2x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

Dans le cas d'une AH: Par analogie, nous pourrons également définir **la position** du graphe d'une fonction par rapport à son **asymptote horizontale**.

Son équation $y = b$ étant obtenue à l'aide d'un calcul de limite, nous définirons et calculerons $\delta(x)$ à l'aide de :

$$\boxed{\delta(x) = f(x) - b}.$$

Soit f une fonction admettant une AH en $y = b$. On considère le point $P\big(x\,;f(x)\big)$ du graphe de f.



- P est au-dessus de l'AH $\iff f(x) > b$
  $\iff f(x) - b > 0$
  $\iff \delta(x) > 0$

- P est au-dessous de l'AH $\iff f(x) < b$
  $\iff f(x) - b < 0$
  $\iff \delta(x) < 0$

- P est un point de l'AH $\iff f(x) = b$
  $\iff f(x) - b = 0$
  $\iff \delta(x) = 0$

Exemple 16: On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1}$

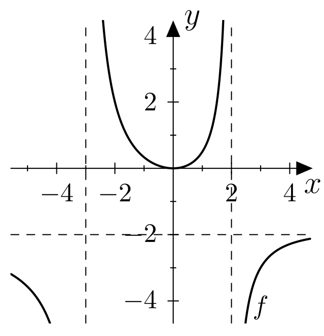
- Déterminer l'$\mathrm{E_D}(f)$, les zéros et le signe de f.
- Déterminer les éventuelles AV et la position de la courbe par rapport à elles.
- Déterminer l'AH et la position de la courbe par rapport à elle.
- Le graphe de f.

Exercice 2.25: Pour les deux fonctions f proposées ci-dessous :

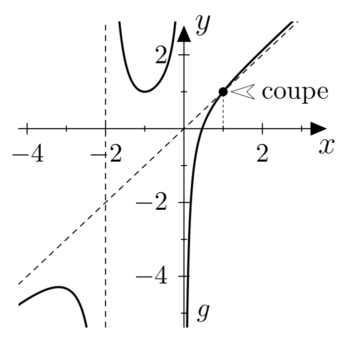
- Déterminer l'$\mathrm{E_D}(f)$, les zéros et le signe de f.
- Les équations des asymptotes ainsi que la position de la courbe par rapport à elles.
- Une bonne esquisse de f.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{(3x-2)^2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3}$

Exercice 2.26: Déterminer les fonctions f et g admettant les graphes suivants :



a)



b)

Exercice 2.27: Calculer les réels a, b, c pour que le graphe de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{ax^2+6x+8}{x^2+bx+c}$$

admette les droites d'équation $x = 0$, $x = 2$ et $y = 1$ comme asymptotes.

3

Introduction à la notion de dérivée

3.1 La tangente en un point d'une courbe

Introduction:

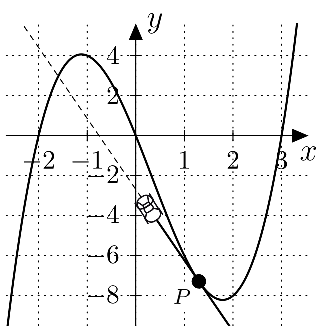
Nous commencerons ce chapitre par l'étude du problème qui consiste à déterminer **la pente de la tangente** en un point du graphe d'une fonction. Nous aborderons une démarche comparable à celle développée par Isaac Newton.

Cette application nous conduira à la notion de **dérivée**.

Par la suite, nous oublierons l'aspect géométrique du problème pour définir la dérivée comme **limite** d'une expression impliquant une fonction. Nous généraliserons ce concept de dérivée à différentes fonctions et nous développerons des **règles de dérivation**. Nous nous entraînerons ensuite à les utiliser.

Une dernière étape consistera à appliquer la dérivée dans des applications concrètes (problèmes d'optimisation par exemple)

Perte de maîtrise:

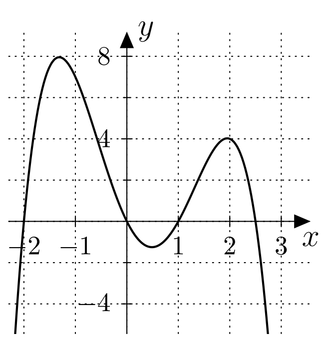


Il peut être utile de connaître l'équation de la tangente à une courbe en un point P de celle-ci.

Par exemple, la trajectoire suivie par une voiture en perte de maîtrise correspond justement à la tangente à sa trajectoire prise depuis le point de dérapage.

On peut remarquer que contrairement à un cercle, la tangente en un point d'une courbe peut recouper cette courbe en un autre point. Notre objectif sera de déterminer **la pente de la tangente** en un point pour pouvoir le cas échéant déterminer **l'équation de cette droite tangente**.

Min et Max:



Lors de nos études de fonctions précédentes, nous avons pu esquisser de bons graphiques à l'aide du tableau de signes de la fonction et de ses asymptotes. Mais il nous manquait des informations quant à la position des "virages" de la courbe.

Ces points extrêmes admettent chacun une tangente dont la particularité est que **sa pente vaut zéro**.

À partir d'une fonction, nous utiliserons 3 méthodes différentes permettant de calculer la pente de la tangente à sa courbe par un point donné.

3.2 Méthode 1 : À l'aide du graphique

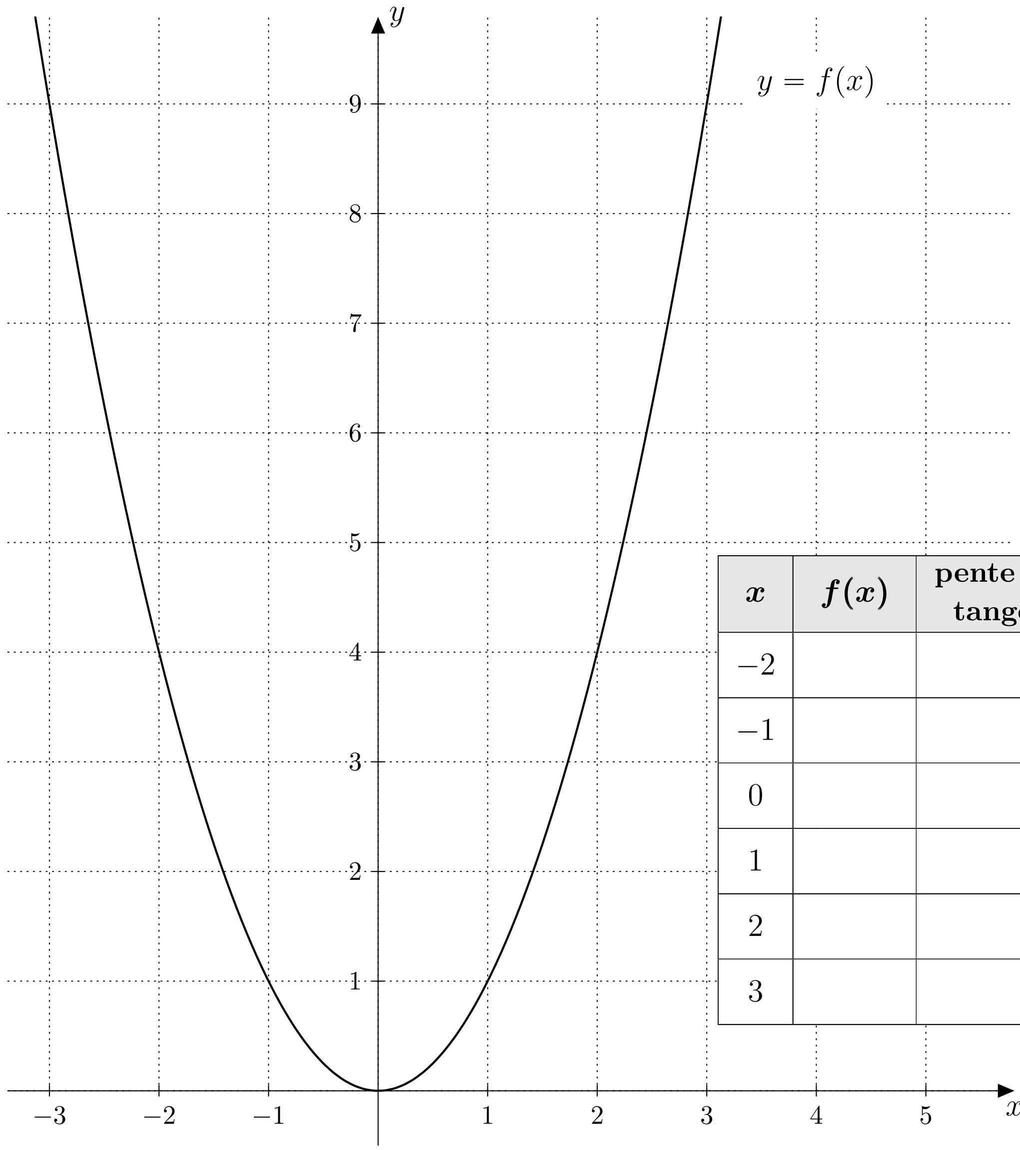
Exercice 3.1: Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

a) Tracer le plus précisément possible les tangentes à la courbe $y = f(x)$ aux points d'abscisse :

$$x = -2 \qquad x = -1 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2 \quad \text{et} \quad x = 3.$$

b) Compléter le tableau de valeurs.

c) Déterminer un lien entre la 1re et la 3e colonne de ce tableau.



x	$f(x)$	pente de la tangente
−2		
−1		
0		
1		
2		
3		

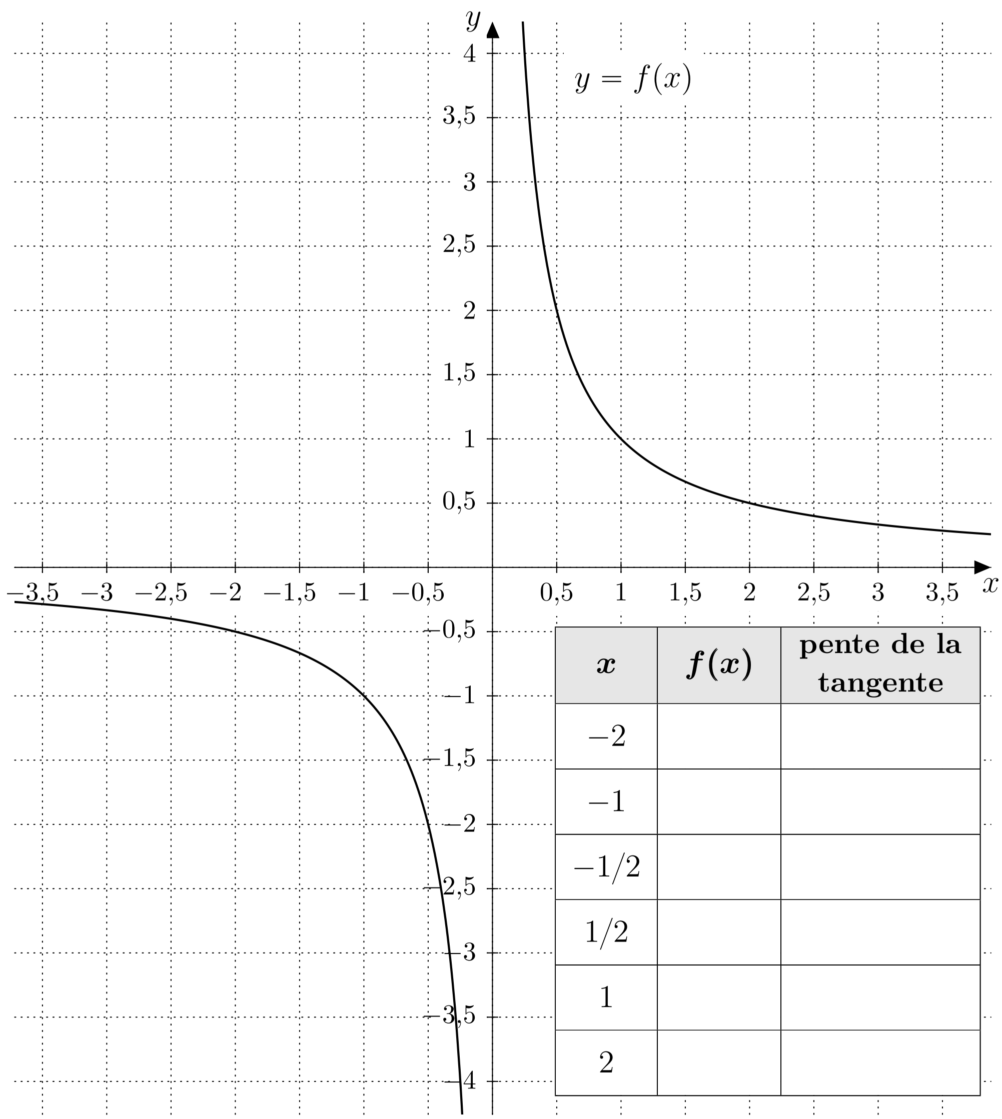
Exercice 3.2: Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Tracer le plus précisément possible les tangentes à la courbe $y = f(x)$ aux points d'abscisse :

$$x = -2 \qquad x = -1 \qquad x = -1/2 \qquad x = 1/2 \qquad x = 1 \qquad \text{et} \qquad x = 2.$$

b) Compléter le tableau de valeurs.

c) Déterminer un lien entre la 1re et la 3e colonne de ce tableau.



$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	**pente de la tangente**
-2		
-1		
$-1/2$		
$1/2$		
1		
2		

- Avantages de cette première méthode :

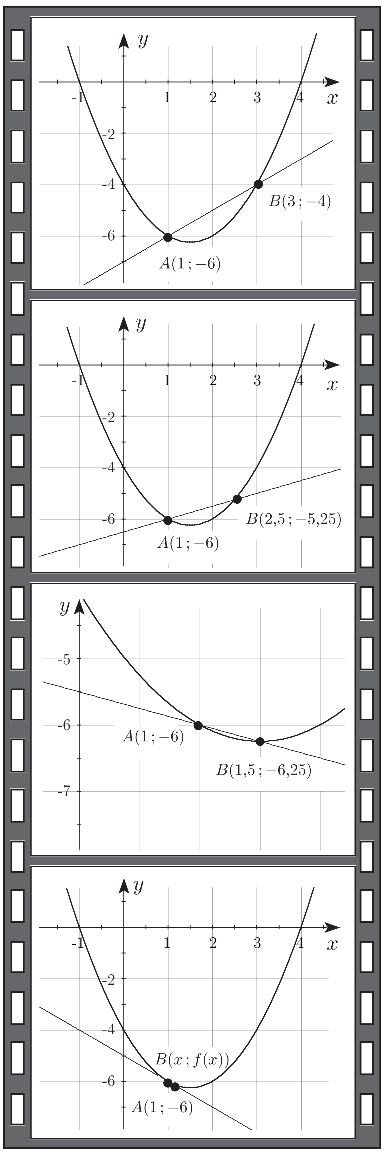
- Inconvénients de cette première méthode :

3.3 Méthode 2 : À l'aide de limites

Le film de la situation: **pour la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x - 4$.**

Nous voulons trouver la pente de la droite tangente à la parabole $y = x^2 - 3x - 4$ au point A.

Nous allons d'abord exprimer la pente de la sécante AB, puis en faisant tendre B vers A, cette sécante va tendre vers une droite limite qui correspondra à la droite tangente à la courbe en A.



- <u>1re étape :</u>

$$\left.\begin{array}{l} A(1\,;-6) \\ B(3\,;-4) \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \textit{pente de la sécante} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$$

- <u>2e étape :</u>

- <u>3e étape :</u>

- <u>Plus généralement :</u>

Exemple 1: Calculer la pente de la tangente des fonctions f suivantes aux points donnés :

a) $f(x) = x^2$ au point $A(2\,;f(2))$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ au point $A(2\,;f(2))$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ au point $A(2\,;f(2))$

Exercice 3.3: Appliquer cette démarche aux fonctions f suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 2x$ au point $A(1\,;f(1))$

b) $f(x) = x^3$ au point $A(-2\,;f(-2))$

c) $f(x) = \sqrt{x+1}$ au point $A(2\,;f(2))$

d) $f(x) = 3x - 5$ au point $A(-1\,;f(-1))$

e) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ au point $A(-1\,;f(-1))$ puis au point $A'(0\,;f(0))$

- Avantages de cette deuxième méthode :

- Inconvénients de cette deuxième méthode :

3.4 Méthode 3 : À l'aide de la dérivée

Dans les situations précédentes est apparu le calcul de la limite suivante :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cette limite est à la base d'un des concepts fondamentaux de l'analyse : celui de **fonction dérivée**.

Définition:

- La **dérivée** d'une fonction f est **la fonction f'** définie par :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

  là où cette limite existe.
- Quand $f'(a)$ existe, on dit que f est **dérivable** en a

Remarque: Il est à noter que la fonction dérivée $f'(a)$ généralise la notion de pente de la tangente à toutes les valeurs a où la dérivée existe. Par convention, à la fin du calcul de limite, la fonction $f'(a)$ est "retranscrite" en $f'(x)$ en changeant la variable a en x

$$f(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(a) = 2a \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2x$$

Exemple 2: On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 8.$$

Déterminer

a) $f'(x)$, $f'(4)$, $f'(-2)$;

b) la pente de la tangente au graphe au point $P(3\,;f(3))$;

c) le point du graphe Q pour lequel la tangente est horizontale.

Exercice 3.4: Déterminer les dérivées des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 2x$ **b)** $f(x) = 3x$

c) $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = 5$ **f)** $f(x) = \sqrt{x}$

Exercice 3.5: Sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

a) Déterminer la fonction dérivée f'.

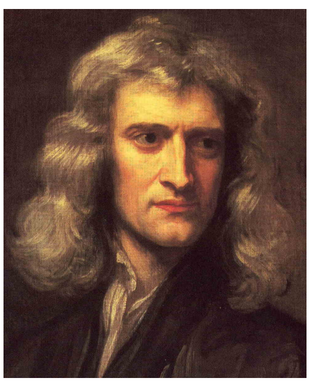
b) Calculer la pente de la tangente à f au point $A(1/4\,;f(1/4))$.

c) Déterminer l'équation de la tangente au point A.

Exercice 3.6: Soit la fonction f définie par $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$.

Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 3$

Un peu d'histoire:



Isaac Newton
1643-1727

Gottfried Wilhelm von Leibniz
1646-1716

Les problèmes de tangentes (dérivation) et de calculs d'aire (intégration) ont passionné de nombreux mathématiciens depuis Archimède. Les premiers à avoir compris le rapport entre les deux sont Isaac Newton et Gottfried Wilhelm von Leibniz. Ils sont maintenant considérés comme co-inventeurs du calcul différentiel.

Pourtant la controverse a longtemps fait rage, du vivant de Newton et Leibniz, et pendant encore de nombreuses années après leur mort. Les uns, à la suite de Newton lui-même, accusaient Leibniz de plagiat, car il aurait eu accès à des manuscrits non publiés de Newton. Les autres prouvaient sans conteste l'antériorité des publications de Leibniz et la supériorité de son système de notation. Il semble bien que Newton a effectivement développé ses idées avant Leibniz, mais que, même si ce dernier a eu accès à des manuscrits de Newton, il a travaillé de façon indépendante. La controverse, qui paraît de nos jours plutôt futile, eut pour conséquence de couper pendant longtemps les mathématiciens anglais du reste de l'Europe : ce n'est qu'au début du XIX^e siècle que les notations de Leibniz furent acceptées en Angleterre.

Voici comment, dans Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687), Newton exprime sa vision des dérivées :

> *Les rapports ultimes dans lesquels les quantités disparaissent ne sont pas réellement des rapports de quantités ultimes, mais les limites vers lesquelles les rapports de quantités, décroissant sans limite, s'approchent toujours, et vers lesquelles ils peuvent s'approcher aussi près qu'on veut.*

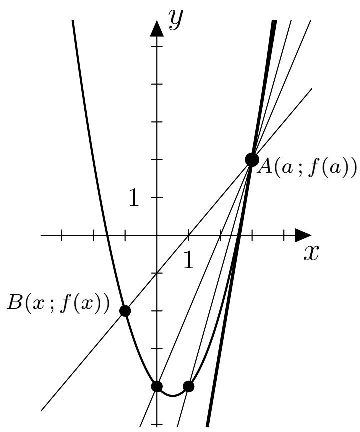
La vision de Newton est très proche de notre définition moderne de la dérivée comme limite d'un taux d'accroissement. C'est d'autant plus remarquable que la notion de limite ne sera définie rigoureusement que presque deux siècles après les premières découvertes de Newton.

4

Dérivée d'une fonction et règles de calcul

4.1 Les règles de dérivation

Introduction: Dans le chapitre précédent, nous nous sommes concentrés dans la recherche de **la pente d'une tangente** à une courbe donnée. Plusieurs démarches vous ont été présentées. La première était de type graphique suivi d'une méthode utilisant un calcul de limites assez répétitif pour finalement nous amener à la définition suivante :



- La **dérivée** d'une fonction f est la **fonction f'** définie par :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cette méthode reposant toujours sur un calcul de limites n'est pas très efficace. Il est donc souhaitable de pouvoir utiliser des règles générales de dérivation. Les 7 **règles de dérivation** qui suivent se démontrent en utilisant systématiquement ce même type de calcul de limites. Nous nous contenterons de leur utilisation.

1re règle : *Pour dériver x à une certaine puissance, on passe la puissance devant, on reproduit x et on descend la puissance d'un cran.*

dérivée d'une puissance

$$\boxed{f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

Exemple 1:

a) $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1x^{1-1} = 1x^0 = \underline{\underline{1}}$

b) $f(x) = x^3$ donc $f'(x) = \underline{\underline{3x^2}}$

dérivée d'une fraction simple

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alors $f(x) = x^{-1}$

donc $f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -1 \cdot \dfrac{1}{x^2} = \underline{\underline{\dfrac{-1}{x^2}}}$

dérivée d'une racine

d) $f(x) = \sqrt{x}$ alors $f(x) = x^{1/2}$

donc $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{1/2-1} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

e) dériver la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

2e règle : *La dérivée d'un nombre vaut 0.*

dérivée d'un nombre

$$\boxed{f(x) = \text{nombre} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0}$$

Exemple 2: $f(x) = 10'000$ donc $\underline{\underline{f'(x) = 0}}$

3e règle : *Pour dériver une expression du type "un nombre fois une fonction", on garde le nombre et on dérive la fonction.*

$$\boxed{f(x) = \text{nombre} \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \text{nombre} \cdot g'(x)}$$

Exemple 3: **a)** $f(x) = 5x^2$ donc $f'(x) = 5 \cdot 2x = \underline{\underline{10x}}$

b) $f(x) = 7\sqrt[3]{x}$ alors $f(x) = 7x^{1/3}$

donc
$$f'(x) = 7 \cdot \frac{1}{3}x^{1/3-1} = \frac{7}{3}x^{-2/3}$$
$$= \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \underline{\underline{\frac{7}{3\sqrt[3]{x^2}}}}$$

c) dériver la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{5x^4}$

Exercice 4.1: Calculer la dérivée des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = 3x$ **b)** $f(t) = 7t^6$ **c)** $f(x) = \sqrt{2}x^7$

d) $f(x) = ax^2$ **e)** $f(x) = 3\sqrt{x}$ **f)** $f(x) = x^{3/2}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **h)** $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ **i)** $f(x) = \sqrt[7]{x^2}$

j) $f(x) = (m-1)x^2$ **k)** $f(x) = 56$

Exercice 4.2: Déterminer <u>une</u> fonction f dont on donne sa dérivée f' :

a) $f'(x) = 34x$ **b)** $f'(x) = x^3$

c) $f'(x) = \sqrt{x}$ **d)** $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

4ᵉ règle : *La dérivée d'une somme est la somme des dérivées.*
La dérivée d'une soustraction est la soustraction des dérivées.

dérivée d'une somme (soustr.)

$$\boxed{f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)}$$

Exemple 4: **a)** $f(x) = 5x^2 + 2x + 3$ donc $\underline{\underline{f'(x) = 10x + 2}}$

b) $f(x) = 2x^2 + \dfrac{3}{x}$ alors $f(x) = 2x^2 + 3x^{-1}$

donc $f'(x) = 4x - 3x^{-2} = 4x - \frac{3}{x^2}$

$$= \underline{\underline{\frac{4x^3 - 3}{x^2}}}$$

c) dériver la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \sqrt{x}$

Exercice 4.3: Calculer la dérivée des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = 3x + 6$

b) $f(x) = 4x^2 - 2x + 5$

c) $f(x) = 3x^3 - 2x + 5$

d) $f(x) = ax + b$

e) $f(x) = x^2 - \dfrac{3}{x}$

f) $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 3$

g) $f(x) = \dfrac{3}{x^2} + 3x$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

i) $f(x) = 3x - 2 + \dfrac{1}{3x}$

j) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Exercice 4.4: Déterminer <u>une</u> fonction f dont on donne sa dérivée f' :

a) $f'(x) = x - 2$

b) $f'(x) = 4x^3 + 3x^2$

c) $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2}$

d) $f'(x) = x^{3/4}$

5e règle : *La dérivée d'une multiplication n'est pas la multiplication des dérivées ! ! ! !*

dérivée d'une multiplication

Il s'agit de la dérivée de la première fois la deuxième + la première fois la dérivée de la seconde.

$$\boxed{f(x) = g(x) \cdot h(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)}$$

Méthode: *Comment retenir des formules telles que celle-ci ?*

- *Certains plus « visuels » vont véritablement la photographier et seront capables de la « redessiner » quand le besoin s'en fera sentir.*
- *D'autres se l'écoutent dire, en utilisant une ritournelle ressemblant à celles qui vous sont proposées.*

À vous de trouver votre méthode.

Exemple 5: **a)** $f(x) = (3x^2 - 2)(2x + 1)$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad f'(x) &= (6x)(2x+1) + \big(3x^2 - 2\big) \cdot 2 \\ &= 12x^2 + 6x + 6x^2 - 4 = 18x^2 + 6x - 4 \\ &= 2\left(9x^2 + 3x - 2\right) = \underline{\underline{2(3x+2)(3x-1)}} \end{aligned}$$

b) dériver la fonction f définie par $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$

6e règle : *La dérivée d'une fraction consiste en :*

dériver la première · la deuxième – la première · la dérivée de la seconde, le tout divisé par le carré de la seconde

dérivée d'une fraction

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}}$$

Exemple 6: **a)** $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-5}$

$$\text{donc} \quad f'(x) = \frac{(2x-3)' \cdot (x-5) - (2x-3) \cdot (x-5)'}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{2 \cdot (x-5) - (2x-3) \cdot 1}{(x-5)^2} = \underline{\underline{\frac{-7}{(x-5)^2}}}$$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-1}$

$$\text{donc} \quad f'(x) = \frac{(x^2+1)' \cdot (2x-1) - (x^2+1) \cdot (2x-1)'}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{2x \cdot (2x-1) - (x^2+1) \cdot 2}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 2}{(2x-1)^2} = \underline{\underline{\frac{2\,(x^2-x-1)}{(2x-1)^2}}}$$

c) dériver la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{3x+2}$

Exercice 4.5: Calculer la dérivée des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = (x^2 - 3)(4x - 5)$ **b)** $f(x) = (x + 4)^2$

c) $f(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{2x+3}{4-x}$

e) $f(x) = \dfrac{x - x^3}{x-2}$ **f)** $f(x) = (x-4)(3x+2)$

g) $f(x) = \dfrac{(x-5)(3-2x)}{4x+2}$ **h)** $f(x) = (3x^2 - 7x)(4x^2 - 5)$

7$^{\text{e}}$ règle : *La dérivée d'une parenthèse à une certaine puissance consiste en :*

On passe la puissance devant, on reproduit la parenthèse à une puissance un cran inférieur et on multiplie le tout par la <u>dérivée du contenu</u> de la parenthèse.

dérivée d'une parenthèse

$$\boxed{f(x) = \big(g(x)\big)^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot \big(g(x)\big)^{n-1} \cdot \boldsymbol{g'(x)}}$$

Exemple 7: **a)** $f(x) = (2x^2 + 3x - 5)^3$

donc $f'(x) = \underline{\underline{3\left(2x^2 + 3x - 5\right)^2 \cdot (4x+3)}}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 4}$ que l'on écrit $f(x) = (x^2 + 5x - 4)^{1/2}$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad f'(x) &= \frac{1}{2}\left(x^2 + 5x - 4\right)^{1/2-1} \cdot \left(x^2 + 5x - 4\right)' \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5x - 4}}(2x+5) \\ &= \underline{\underline{\frac{2x+5}{2\sqrt{x^2 + 5x - 4}}}} \end{aligned}$$

c) dériver la fonction f définie par $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{3x+2}\right)^2$

d) dériver la fonction f définie par $f(x) = (3x-1)^2(5x-2)^3$

e) dériver la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{(2x-1)^3}{(5x+1)^2}$

f) au point d'abscisse $x = -3$, déterminer l'équation de la tangente au graphe de f définie par $f(x) = \dfrac{(2x-1)^3}{(5x+1)^2}$

Marche à suivre :

① Déterminer $f'(x)$

② En déduire la pente $m = f'(a)$

③ Déterminer les coordonnées du point de tangence $P(a\,;f(a))$

④ Déterminer l'ordonnée à l'origine h de la droite $y = mx + h$

Exercice 4.6: Calculer la dérivée des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = (2x+4)^5$ **b)** $f(x) = (5x^2-3)^{3/2}$

c) $f(x) = \sqrt{8x^2-2x+3}$ **d)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}$

e) $f(x) = (x^2-1)^3$ **f)** $f(x) = \left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2$

g) $f(x) = (2+x)^2(1-x)^3$ **h)** $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

i) $f(x) = \sqrt{(x-3)(x+2)}$ **j)** $f(x) = \dfrac{(3x-1)^3}{(2x+3)^2}$

Exercice 4.7: Déterminer <u>une</u> fonction f dont on donne sa dérivée f' :

a) $f'(x) = 5\left(x^2-1\right)^4(2x)$ **b)** $f'(x) = -3(4-x)^2$

c) $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}$ **d)** $f'(x) = 2\left(x^2-1\right)(2x)$

Exercice 4.8: Déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée des fonctions f suivantes :

Un petit mélange de tout ! !

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2-3x+4$ **b)** $f(x) = (x+5)(x-3)$

c) $f(x) = (4-x)^3$ **d)** $f(x) = \left(3x^2+5\right)\left(x^2-1\right)$

e) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ **f)** $f(x) = (ax+b)(cx+d)$

g) $f(x) = (2x-1)^3(x+2)^2$ **h)** $f(x) = \dfrac{a}{x}$

i) $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2$ **j)** $f(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$

k) $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$ **l)** $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

m) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **n)** $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

o) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ **p)** $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

Exercice 4.9: Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = a$

a) $y = 3x^2 - 6x - 5$ en $a = 0$

b) $y = x^2 + \sqrt{x} - 10$ en $a = 4$

c) $y = \dfrac{4x + 7}{x + 3}$ en $a = 2$

Exercice 4.10: En quel point la tangente à la courbe $y = x^2$ a-t-elle une pente de -3 ?

Exercice 4.11: On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$.

a) Calculer l'abscisse des points en lesquels la tangente au graphe de f est parallèle à la droite passant par $A(-3\,;2)$ et $B(1\,;14)$.

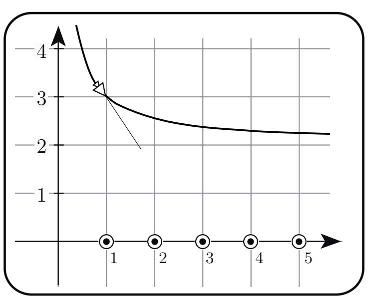
b) Déterminer les équations des tangentes ainsi obtenues.

Exercice 4.12: En quel point la courbe $y = \dfrac{x}{x^2 + 9}$ a-t-elle une tangente horizontale ?

Exercice 4.13: On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + a}{x + 2}$.

Déterminer a sachant que la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse -3 est égale à -6.

Exercice 4.14: Sur l'écran du jeu vidéo que montre la figure, on peut voir un avion qui descend de gauche à droite en suivant la trajectoire d'équation $y = 2 + \frac{1}{x}$ et qui tire des missiles selon la tangente à leur trajectoire en direction des cibles placées sur l'axe Ox aux abscisses 1, 2, 3, 4 et 5.



Une cible sera-t-elle touchée si le joueur tire au moment où l'avion est en :

a) $P(1;3)$?

b) $Q\left(\frac{3}{2}\,;\frac{8}{3}\right)$?

Exercice 4.15: Déterminer la fonction quadratique f sachant que :

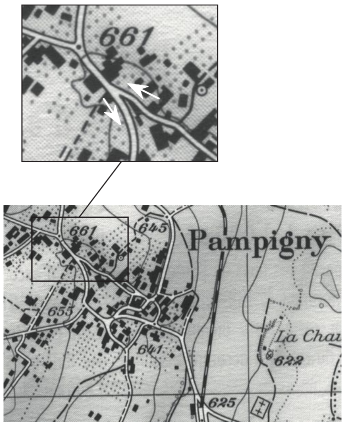
La définition de la fonction quadratique se trouve au chap. 1

a) $f(0) = 3$ $f(3) = 1$ $f'(4) = 1$

b) $f(-1) = 10$ $f(1) = 4$ $f'(1) = 7$

4.2 1re application : calcul de l'angle entre 2 courbes

Introduction: Avant la construction proprement dite, des géomètres peuvent être amenés à devoir calculer l'angle entre deux routes devant aboutir à un carrefour. Cet angle ne devra bien évidemment pas être trop aigu pour permettre aux camions à remorque de manœuvrer… ou alors il faudra aménager ce carrefour différemment.

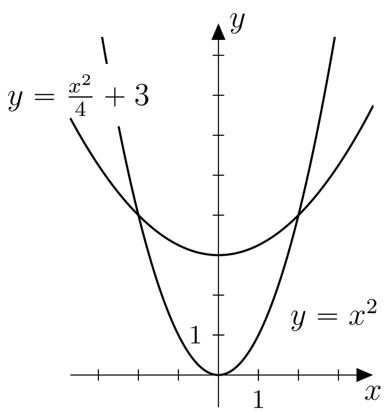


Mais comment peut-on calculer l'angle entre deux courbes ?

L'angle entre deux courbes est l'angle aigu des tangentes aux courbes en leur(s) point(s) d'intersection.

Exemple 8: Déterminer les angles formés par les courbes :

$$y = x^2 \quad \text{et} \quad y = \frac{x^2}{4} + 3$$



Exercice 4.16: Déterminer l'angle entre les deux courbes en leur(s) point(s) d'intersection :

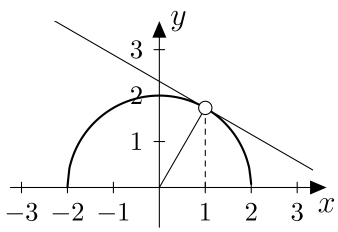
a) $y = x^2$ $\quad$ $y = x^3$

b) $x^2 = 4y$ $\quad$ $y = -x^2 + 10x - 15$

c) $y = x^3 + 2x - 1$ $\quad$ $4y = x^3 - 11x^2$

d) $y = x^3 - 4x$ $\quad$ $y = x^3 - 2x^2$

Exercice 4.17: On rappelle (??) que la courbe $y = \sqrt{4 - x^2}$ correspond à un demi-cercle centré en $(0\,;0)$ et de rayon 2.



a) Déterminer l'équation de la tangente à $y = \sqrt{4 - x^2}$ au point d'abscisse 1.

b) Montrer que cette tangente est bien perpendiculaire au rayon de contact.

c) Effectuer ces mêmes démarches pour tout point d'abscisse a avec $a \in [-2\,;2]$.

5 Croissance et études de fonctions

5.1 Croissance et extremum

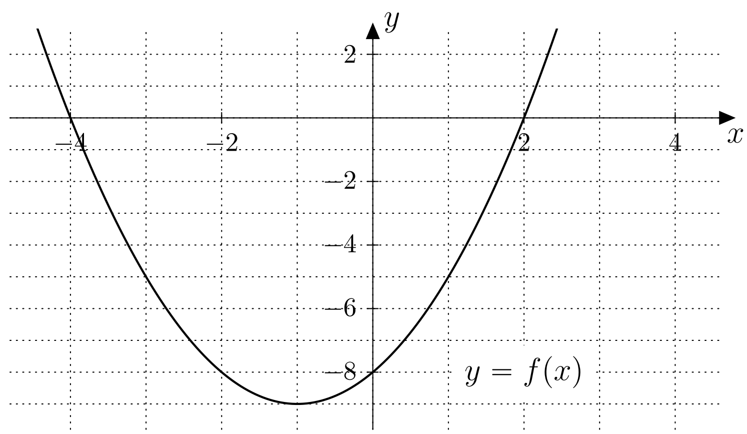
Introduction: La dérivée d'une fonction f en un point A a été définie comme la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point A. Mais au-delà du calcul d'une tangente à une courbe, la dérivée nous fournit directement des informations sur la "forme" de la courbe de f.

Commençons par étudier ceci sur deux exemples d'introduction :

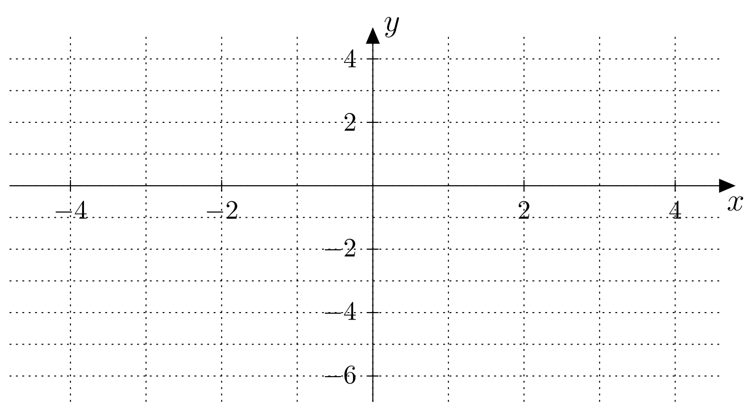
1^er^ exemple : On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2x - 8$.

- En voici sa représentation graphique :

En comparant les 2 graphiques, quelles constatations pouvez-vous faire ?



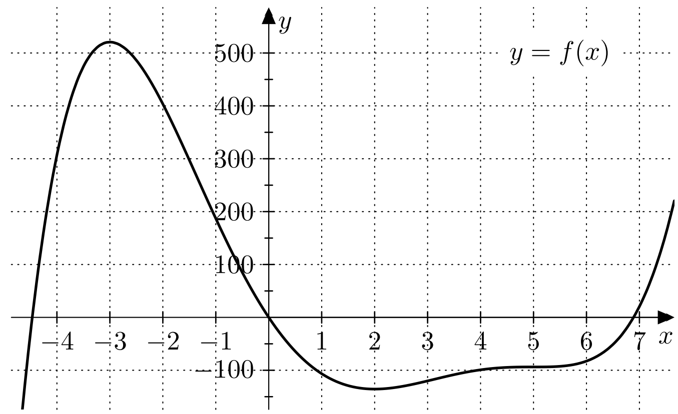
- Déterminer la dérivée $f'(x) =$
- Tracer le graphe de f' ci-dessous :



2[e] exemple : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{9x^4}{4} + 3x^3 + \frac{85}{2}x^2 - 150x$$

- En voici sa représentation graphique :

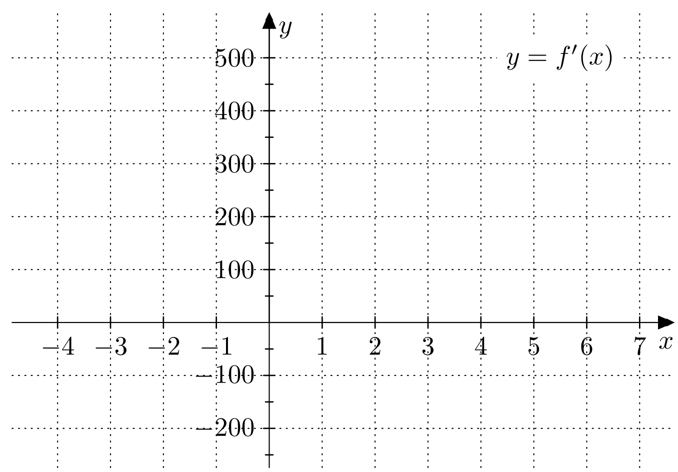


- **Déterminer la dérivée :**

$f'(x) =$

- **Tracer le graphe de f' :**

x	$f'(x)$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	



- Ce 2[e] exemple confirme-t-il vos constatations précédentes ??

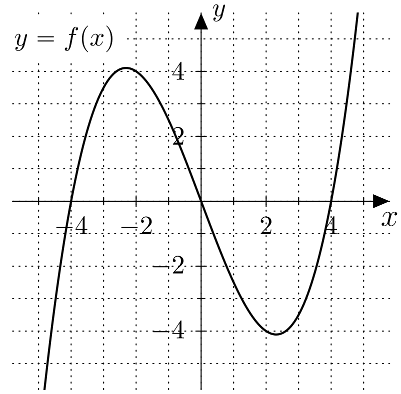
On peut alors compléter l'encadré ci-dessous :

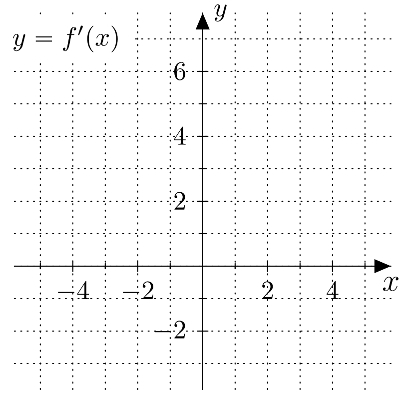
Pour tout a vérifiant :

- $f'(a) < 0$ alors la fonction f est .... car ....
- $f'(a) > 0$ alors la fonction f est .... car ....
- $f'(a) = 0$ alors la fonction f admet ....

car ....

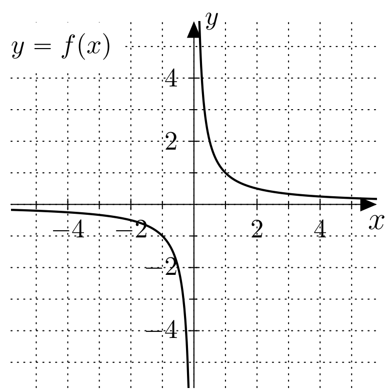
Exercice 5.1: En déterminant graphiquement la pente de la tangente à $y = f(x)$ en différents points, représenter graphiquement le graphe de la fonction f' correspondante.

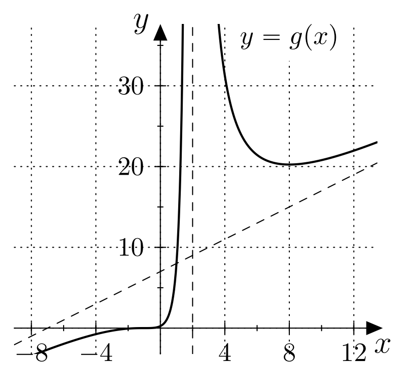


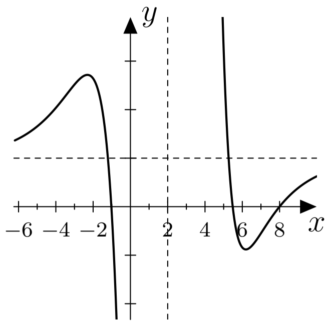


Exercice 5.2: Les 2 premières représentations graphiques représentent le graphe de deux fonctions f et g.

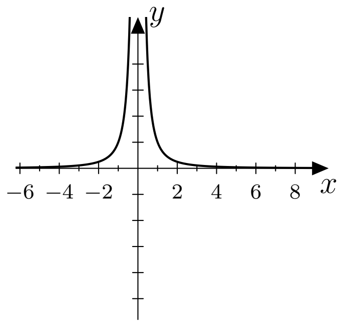
Retrouver parmi les 6 esquisses proposées en dessous la représentation graphique des dérivées correspondantes.



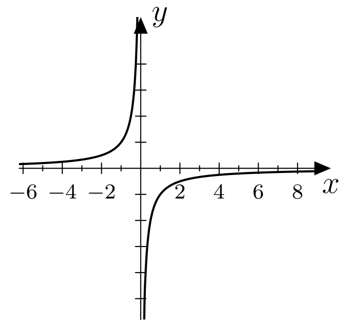




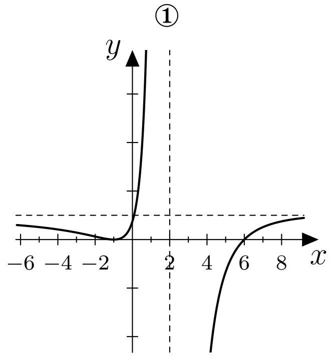
①



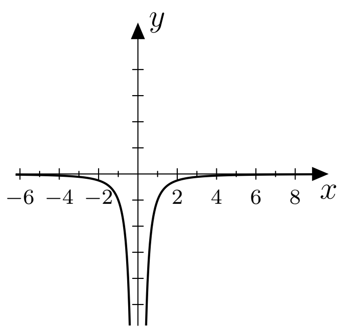
②



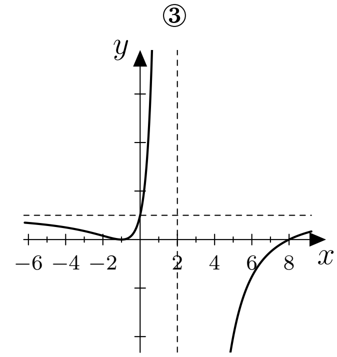
③



④



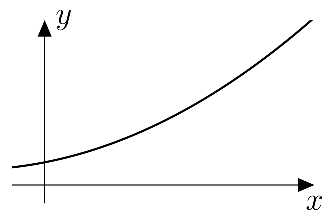
⑤

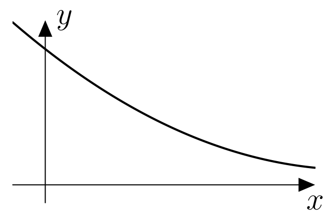


⑥

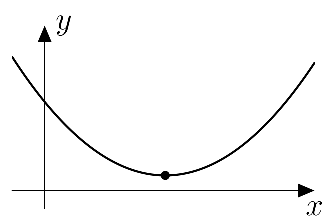
Définitions:

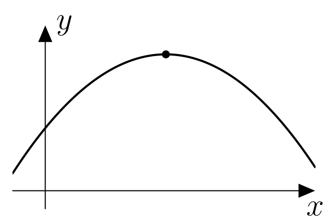
- Une fonction f est dite **croissante** si lorsque x augmente, $f(x)$ aussi.
- Une fonction f est dite **décroissante** si lorsque x augmente, $f(x)$ diminue.



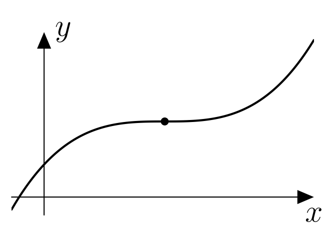


- Une fonction f admet un **maximum** en a si pour toutes valeurs b dans un voisinage de a, $f(a) > f(b)$
- Une fonction f admet un **minimum** en a si pour toutes valeurs b dans un voisinage de a, $f(a) < f(b)$





- Une fonction f admet un **replat** (ou un palier) en a si $f'(a) = 0$ mais qu'il ne s'agit ni d'un minimum ou ni maximum.



Remarque:

- Les notions introduites ci-dessus sont **locales** :
  une fonction peut admettre un maximum et prendre en d'autres points des valeurs supérieures.
- De manière générale, un **extremum** est un maximum ou un minimum.

5.2 Étude de la croissance d'une fonction.

Méthode: Le signe de la dérivée permet de savoir pour quelles valeurs de x une fonction f est croissante, décroissante ou admet une tangente de pente nulle.

Ainsi, il suffira d'effectuer le tableau de signes de f' pour obtenir la croissance de f. Un tel tableau de signe s'appelle un **tableau de croissance** ou un **tableau des variations**.

Exemple 1: **Étudier la croissance des 4 fonctions f suivantes :**

a) $f(x) = 3x^2 - 3x + 7$

- <u>Calcul de la dérivée :</u> $f'(x) = 6x - 3$
- <u>Tableau de croissance :</u>

		$1/2$	
$6x-3$	$-$	0	$+$
croissance	$\searrow$	min	$\nearrow$

- <u>2e coordonnée du minimum :</u>
  $f(1/2) = 3 \cdot (1/2)^2 - 3 \cdot (1/2) + 7 = 25/4$ **Min**$(1/2\,;25/4)$

b) $f(x) = (x-2)(x+3)^3$

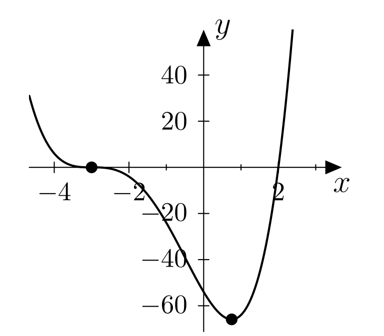
- <u>Calcul de la dérivée :</u>

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1(x+3)^3 + (x-2)\big[3(x+3)^2 \cdot (1)\big] \\ &= (x+3)^3 + 3(x-2)(x+3)^2 \\ &= (x+3)^2\big[(x+3) + 3(x-2)\big] = (x+3)^2(4x-3) \end{aligned}$$

- <u>Tableau de croissance :</u>

		-3		$3/4$	
$(x+3)^2$	$+$	0	$+$		$+$
$4x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
croissance	$\searrow$	replat	$\searrow$	min	$\nearrow$

Voici une esquisse du graphe de f pour se convaincre du résultat obtenu :

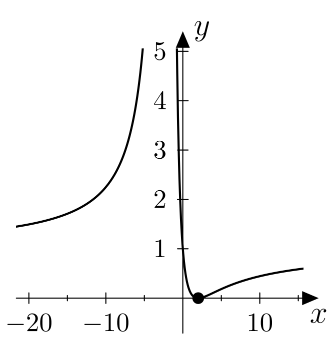


- <u>2e coordonnée du replat et du minimum :</u>
  $f(-3) = (-5) \cdot (0)^3 = 0$ **Replat**$(-3\,;0)$
  $f(3/4) = (3/4-2) \cdot (3/4+3)^3 \cong -65{,}92$
  Min$(0{,}75\,;-65{,}92)$

c) $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-3}$

d) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x+2)^2}$

Voici une esquisse du graphe de f pour se convaincre du résultat obtenu :



Exercice 5.3: Étudier la croissance des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 5$

c) $f(x) = (x+2)^3(x-3)^2$

d) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$

e) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

5.3 Plan d'étude d'une fonction

Plan: Complétons le plan d'étude étudié en 2^{e} année avec les nouvelles notions rencontrées dans les chapitres précédents :

a) Recherche de l'ensemble de définition $\mathrm{E_D}(f)$.

b) Recherche des zéros de la fonction puis étude du signe de la fonction f.

c) Calcul des limites aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche des asymptotes éventuelles (AV, AH, AO) **avec** la position de la courbe relativement à ses asymptotes.

d) Calcul de la dérivée.

e) Tableau de croissance (tableau des variations).

f) Calculs de points particuliers (min, max, ord. à l'origine).

g) Tracé de la courbe représentative de f (format A4).

Conseil: *L'étude d'une fonction forme un tout. Soyez particulièrement attentifs à la cohérence des résultats des différentes parties de cette étude.*

Si vous constatez une incohérence que vous n'expliquez pas, mentionnez-le en précisant le type d'incohérence et l'endroit probable où se situe l'erreur.

Exemple 2: Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-x^3}{(x-1)^2}$

Exercice 5.4: Étudier selon le plan d'étude les fonctions f suivantes :

a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

b) $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 12x - 15}{x + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 4}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3 + 9x}{x^2 + 1}$

g) $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3}{(2 - x)^2}$

Exercice 5.5: Étudier selon le plan d'étude les fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x - 7}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

Exercice 5.6: Dans chacun des cas suivants, représenter l'esquisse d'une fonction f dont on donne les éléments suivants :

a) $f(0) = 1$ $f(2) = 3$ $f(3) = 1$ $f'(3) = -9/2$

x		0		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

b) $f(0) = 2$ $f(-2) = f(2) = 1$

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$

c) $f(0) = 1$ $f(1) = 3/2$ $f'(1) = 3/4$
$f(-3) = -7/2$ $f'(-3) = 3/4$ $x = -1$ est une asymptote

x		-2		-1		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$

d) AH en $y = 0$ Extremums en $(-1\,;-1)$ et $(1\,;1)$

x		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

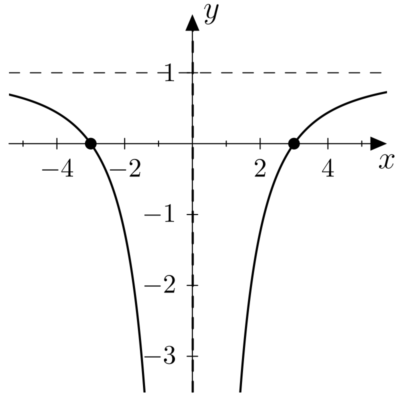
e) $x = 0$, $x = 4$ et $y = 1$ sont des asymptotes,
$f(3) = -4$ et $f(6) = -1/4$

x		0		4		5		9	
$f(x)$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$

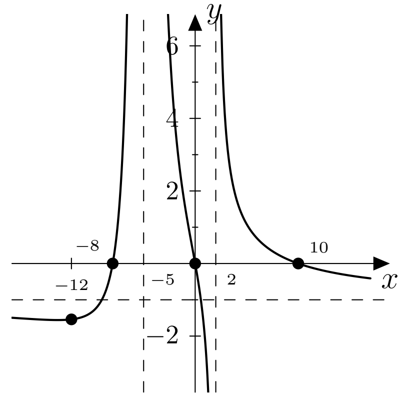
x		0		3		4		6	
$f'(x)$	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$

Exercice 5.7: On donne le graphe d'une fonction f. Déterminer :

- l'$\mathrm{E_D}(f)$, les zéros de f et le tableau de signes de f,
- l'équation de toutes les asymptotes,
- le tableau de croissance ainsi que les coordonnées approximatives des extrema

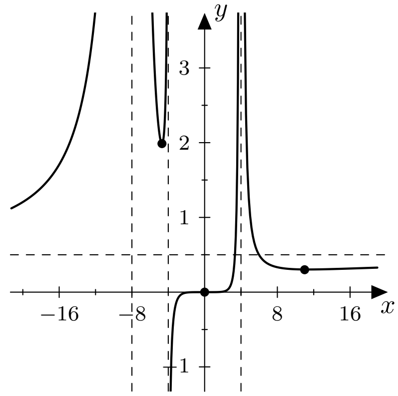


a)

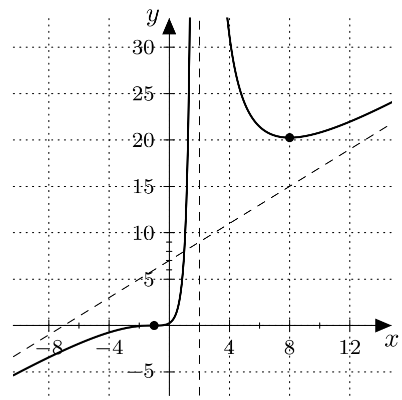


b)

Exercice 5.8: Même consigne que l'exercice précédent :



a)

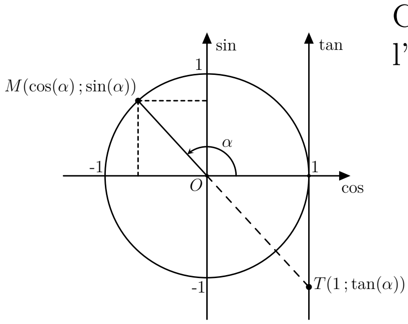


b)

6 Fonctions trigonométriques

6.1 Quelques rappels

Définitions: Les fonctions trigonométriques sont définies à l'aide du cercle trigonométrique :



Considérons le point M du cercle trigonométrique correspondant à l'angle α.

- Le **cosinus** de α, noté $\mathbf{cos(\boldsymbol{\alpha})}$, est la 1[re] coordonnée (ou abscisse) de M.
- Le **sinus** de α, noté $\mathbf{sin(\boldsymbol{\alpha})}$, est la 2[e] coordonnée (ou ordonnée) de M.
- La **tangente** de α, notée $\mathbf{tan(\boldsymbol{\alpha})}$, est l'ordonnée de T.

Rel. fondamentales:

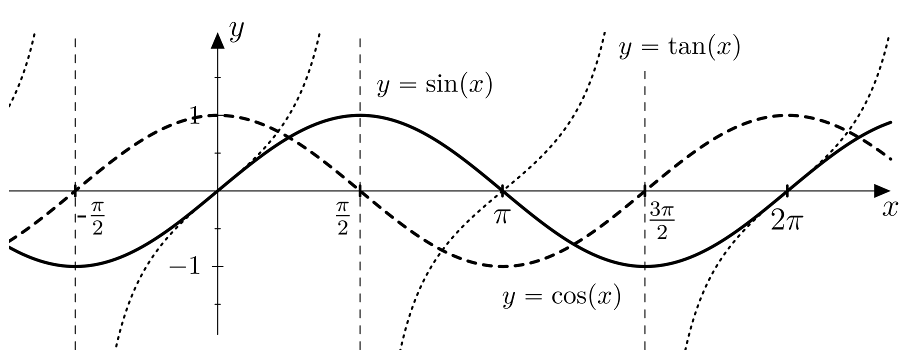
$$\textbf{(I)}\quad \sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$$

$$\textbf{(II)}\quad \tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Valeurs particulières:

$\boldsymbol{\alpha}$ (en degrés)	$\boldsymbol{\alpha}$ (en radians)	**sin** $(\boldsymbol{\alpha})$	**cos** $(\boldsymbol{\alpha})$	**tan** $(\boldsymbol{\alpha})$
0°				
30°				
45°				
60°				
90°				
180°				

Graphe des fct. trigo:



Périodicité:

- La fonction sinus est périodique de période .....

$$\sin(\alpha + \;.....\;) = \sin(\;.....\;)$$

- La fonction cosinus est périodique de période .....

$$\cos(\alpha + \;.....\;) = \cos(\;.....\;)$$

- La fonction tangente est périodique de période .....

$$\tan(\alpha + \;.....\;) = \tan(\;.....\;)$$

Exemple 1: **a)** Esquisser la fonction f définie par $f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ puis préciser sa période et son amplitude.

b) Esquisser la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(x+\pi)$ puis préciser sa période et son amplitude.

Exercice 6.1: Esquisser les fonctions f suivantes en précisant leur période et leur amplitude :

a) $f(x) = -2\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ **b)** $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $f(x) = 3\cos\left(\dfrac{x}{2} + \pi\right)$

Théorème: Si $f(x) = a \cdot \sin(bx+c)$ ou $f(x) = a \cdot \cos(bx+c)$,

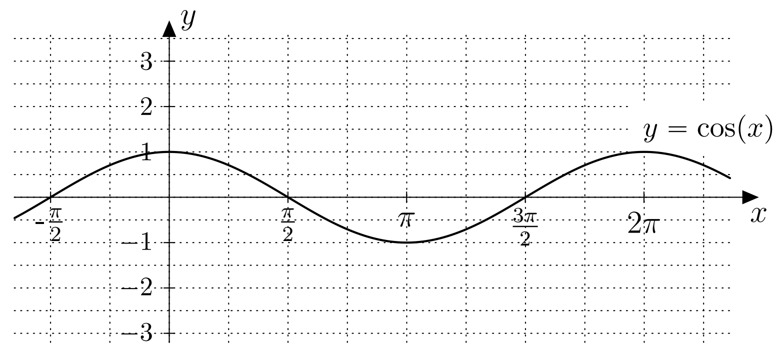
où a, b et c sont des réels non nuls,

Alors : • l'**amplitude** $\boldsymbol{A}$ vaut : $|a|$

• la **période** $\boldsymbol{T}$ vaut : $\dfrac{2\pi}{|b|}$

Exemple 2: On considère la fonction f définie par $f(x) = -3\cos\left(\dfrac{x}{2} + \pi\right)$.

- Déterminer l'amplitude A et la période T de f.
- Compléter ci-dessous son esquisse.

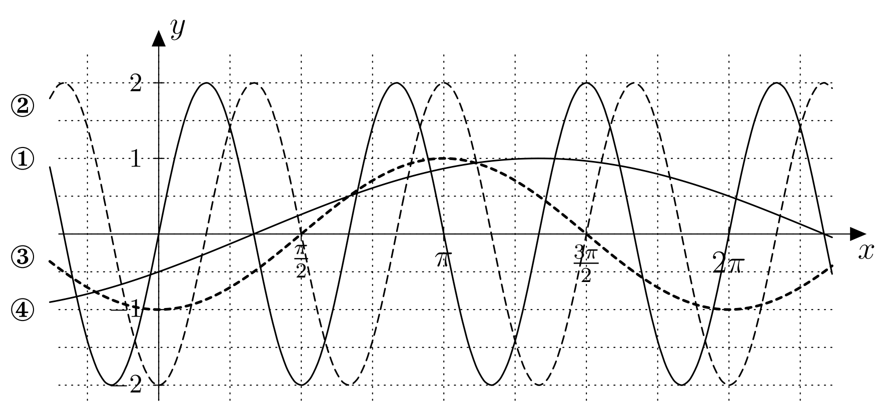


Exercice 6.2: Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa période T et son amplitude A :

a) $f(x) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ **b)** $g(x) = 2\cos(3x + \pi)$

c) $h(x) = -\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$ **d)** $i(x) = -2\sin(3x - \pi)$

Retrouver sur le graphe ci-dessous les courbes correspondantes à ces 4 fonctions :



6.2 Quelques équations trigonométriques

Introduction: Une équation trigonométrique est une équation contenant des expressions trigonométriques. Il n'existe pas de méthode universelle, mais le cercle trigonométrique sera très souvent votre allié.

Exemple 3: Résoudre $\cos(2x) = -0{,}9$

Exercice 6.3: Résoudre les équations suivantes (en degrés) :

a) $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$

b) $\sin(3x) = 0{,}829$

c) $\tan(x) = -0{,}754$

d) $\cos(-x) = -1{,}43$

e) $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = 5{,}33$

f) $\sin(3x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exemple 4: Résoudre $\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 6.4: Résoudre les équations suivantes (en radians) :

a) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ **b)** $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

c) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\tan(2x+\pi)=\sqrt{3}$ **f)** $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=-1$

Exemple 5: Résoudre $\sin^2(x)=1$

Convention: Afin d'éviter la "surcharge" de parenthèses, on notera :

$$\sin^2(...), \cos^2(...), \tan^2(...)$$

en lieu et place de $\big(\sin(...)\big)^2, \ldots$

Exercice 6.5: Résoudre les équations suivantes (en radians) :

a) $\cos^2(x) = 1$ **b)** $\sin^2(x) = \frac{1}{4}$

c) $\tan^2(x) = 3$ **d)** $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$

e) $\tan^2(x) = 1$ **f)** $\sin^2(x) = \cos^2(x)$

Exemple 6: Résoudre $4\cos^2(x) - 4\cos(x) - 3 = 0$

Exercice 6.6: Résoudre les équations suivantes (en degrés) :

a) $2\sin^2(x) - 5\sin(x) + 2 = 0$

b) $2\cos^2(x) - 3\cos(x) = -1$

c) $\tan^2(x) + 2\tan(x) + 1 = 0$

Exemple 7: Résoudre $3\sin^2(x)+\cos^2(x)-2=0$

Exercice 6.7: Résoudre les équations suivantes (en degrés) :

a) $3\sin^2(x)+\cos^2(x)-2=0$ (*en proposant une autre substitution*)

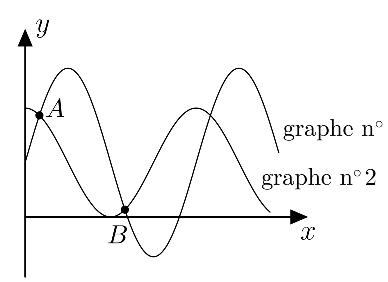
b) $2\cos^2(x)-\sin(x)=1$

c) $5\sin(x)=6\cos^2(x)$

Exercice 6.8: On a représenté ci-contre le graphe de deux fonctions f et g définies par :

- $f(x)=\cos(2x)+1$
- $g(x)=\sqrt{3}\sin(2x)+1$

sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$



a) Attribuer un graphe à f et l'autre à g. Justifier.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B représentés ci-dessus.

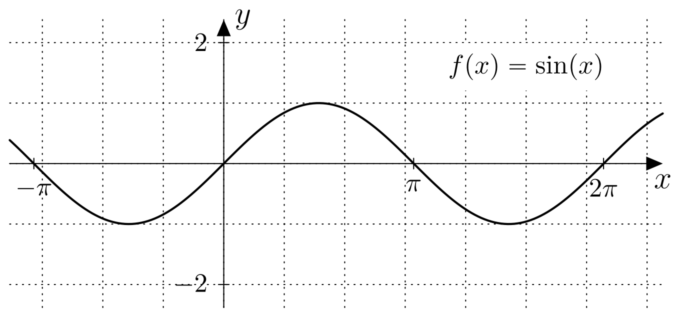
Source : Examen de Maturité, Gymnase de Chamblandes 2018

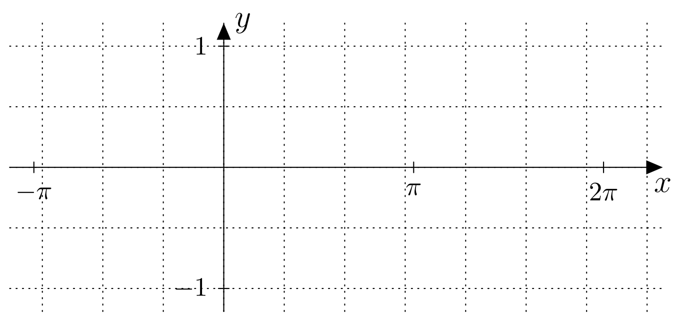
6.3 Dérivée des fonctions trigonométriques

Introduction: À l'image des chapitres précédents, nous pourrions déterminer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \sin(x)$ à l'aide du calcul de limite :

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a}$$

Essayons de trouver cette dérivée en comparant les graphes de f et de la pente de la tangente en plusieurs points.





$f'(x) =$ ....

Des démarches analogues permettraient de justifier les règles suivantes :

Les règles de dérivation des fonctions trigo :

8ᵉ règle : si $f(x) = \sin(x)$ ⇒ $f'(x) = \cos(x)$

9ᵉ règle : si $f(x) = \cos(x)$ ⇒ $f'(x) = -\sin(x)$

10ᵉ règle : si $f(x) = \tan(x)$ ⇒ $f'(x) = \tan^2(x) + 1$

ou $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Exercice 6.9: Dériver les fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

b) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$

c) $f(x) = \cos(x) - 2\tan(x)$

d) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{\sin(x)+\cos(x)}$

Exercice 6.10: En combinant les règles 8 et 9 du tableau précédent, justifier la 10e règle (sous ses deux formes).

Exercice 6.11: Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point indiqué :

a) $f(x) = \tan(x)$ au point d'abscisse $x = \pi$.

b) $f(x) = x\cos(x)$ au point d'abscisse $x = \pi$.

Exercice 6.12: En quelles valeurs de $x \in [0\,;2\pi]$, la courbe $y = x + 2\sin(x)$ a-t-elle une tangente horizontale ?

6.4 La dérivée de fonctions composées

Introduction: Nous avons déjà eu l'occasion de dériver quelques fonctions composées codées : $f(x) = (g \circ h)(x)$. Par exemple :

- $f(x) = \sqrt{x-2}$ correspond à $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec

  $g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

- $f(x) = (3x-5)^3$ correspond à $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec

  $g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+4}}$ correspond à $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec

  $g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Lors du calcul de ces 3 dérivées, nous avons vu apparaître ce que nous avons appelé **la dérivée interne**. Ceci se généralise lors du calcul de la dérivée de toutes les fonctions composées.

Les règles de dérivation des fonctions composées :

11e règle : si $f(x) = \sin\big(g(x)\big)$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \cos\big(g(x)\big) \cdot \boldsymbol{g'(x)}$

12e règle : si $f(x) = \cos\big(g(x)\big)$ $\Rightarrow$ $f'(x) = -\sin\big(g(x)\big) \cdot \boldsymbol{g'(x)}$

13e règle : si $f(x) = \tan\big(g(x)\big)$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(g(x))} \cdot \boldsymbol{g'(x)} = \dfrac{\boldsymbol{g'(x)}}{\cos^2(g(x))}$

ou $f'(x) = \Big(\tan^2\big(g(x)\big) + 1\Big) \cdot \boldsymbol{g'(x)}$

ou plus généralement pour toutes les fonctions composées :

14e règle : si $f(x) = (g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big)$ $\Rightarrow$ $f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot \boldsymbol{h'(x)}$

Exemple 8: Dériver les 2 fonctions f et g définies par :

a) $f(x) = \sin\big(x^2\big)$ **b)** $g(x) = \sin^2(x)$

Exercice 6.13: Dériver les fonctions f définies par :

a) $f(x) = \tan(3x)$ **b)** $f(x) = \cos(x^3)$

c) $f(x) = \cos^3(x)$ **d)** $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

A

Bibliographie

Bibliographie

1. CRM, *Analyse (1997)*, Édition du Tricorne

2. Swokowski, *Analyse (1995)*, DeBoeck Université

3. H. Bovet, *Analyse (1999)*, Polymaths ou sur Payot online

`https://www.payot.ch/Detail/analyse-hubert_bovet-2080002732756`

Site Web

1. Le site companion de ce polycopié : `www.javmath.ch`

Avec une version pdf de ce polycopié et quelques exercices ou animations supplémentaires.

2. Le site *Nymphomath* de Didier Müller :

`http://www.nymphomath.ch/MADIMU2/ANALY/INDEX.HTM`

Support de cours en pdf avec des exercices et leurs solutions

3. Une partie mathématique du site du collège *Sismondi* proposé par Serge Picchione :

`https://www.sismondi.ch/disciplines/mathematiques/espace-perso-profs/serge-picchione`

Support de cours en pdf avec des exercices et leurs solutions

Quelques éléments de solutions

A.1 Généralités sur les fonctions

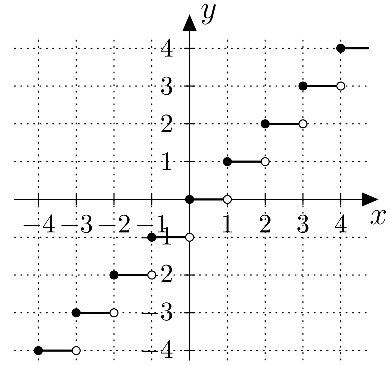
Exercice 1.1:

a) Non, car pour certaines valeurs de x correspondent deux valeurs $f(x)$.

b) Oui.

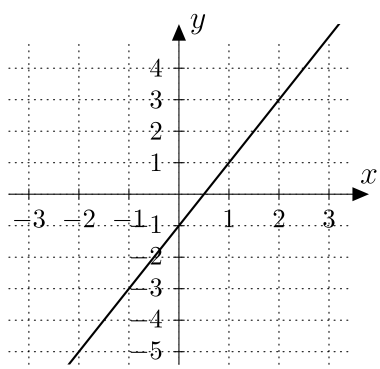
c) Le graphique est ambigu, on ne sait pas si à tout nombre entier ne correspond qu'une et une seule valeurs ; par exemple $f(2) = 2$, ou $f(2) = 1$ ou les deux valeurs simultanément.

On remplacera ce graphique plutôt par celui ci-contre qui correspond alors bien à celui d'une fonction.

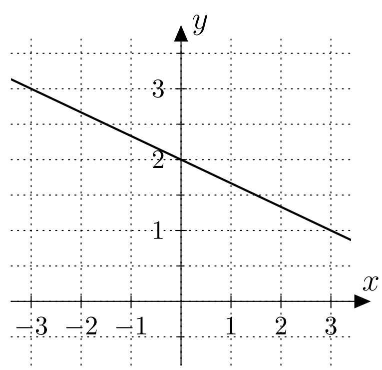


d) Non.

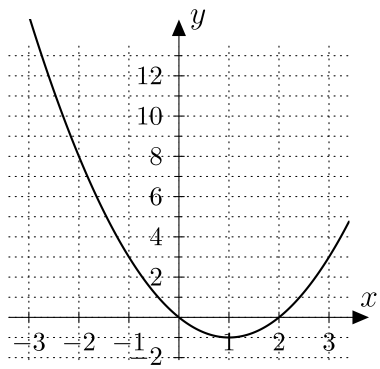
Exercice 1.2:



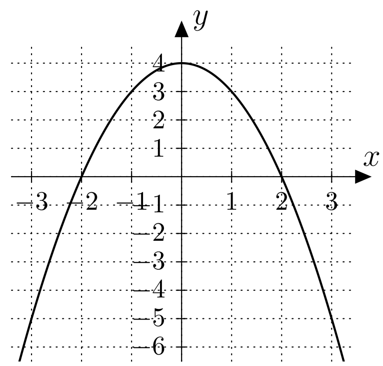
a)



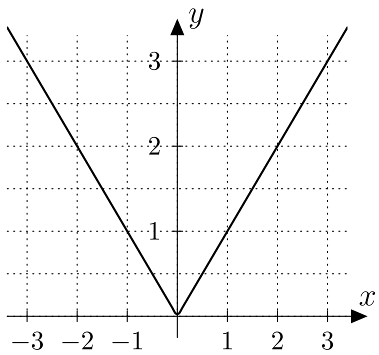
b)



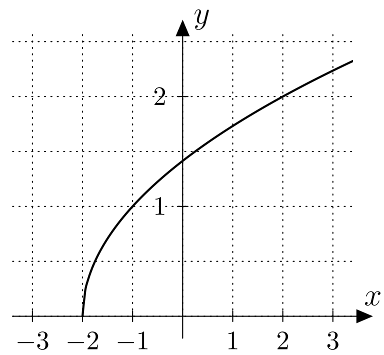
c)



d)



e)



f)

Exercice 1.3: Pas de corrigé.

Exercice 1.4: **a)** $x_1 = -7/2$; $x_2 = 1$ (*il s'agit de **résoudre** l'équation* $f(x) = 0$)

b) $y = -7$ (*il s'agit de **calculer*** $f(0)$)

Exercice 1.5: **a)** $f(0) = -5$ et $f(-3) = 19$

b) ${}^r f(5) = \{5/3\,;-2\}$ et ${}^r f(-6)$ n'existe pas.

Exercice 1.6: **c)** $f(\{-1\,;0\,;2\}) = \{0\,;2\,;6\}$ ${}^r f(\{-6\,;0\,;4\}) = \left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2}\,;1\,;2\,;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$

$f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{4};+\infty\right[$ $f([3\,;6[) = [2\,;20[$

$f([1\,;2]) = \left[-\frac{1}{4}\,;0\right]$ ${}^r f([-3\,;-2]) = \varnothing$

${}^r f([1\,;2]) = \left[0\,;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \bigcup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;3\right]$

${}^r f([2\,;4[) = \left]\frac{3-\sqrt{17}}{2}\,;0\right] \bigcup \left[3\,;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right[$

Exercice 1.7: **a)** $\mathrm{Im}(f) =]-\infty\,;6]$ **b)** $\mathrm{Im}(f) = [5\,;+\infty[$

Exercice 1.8: **a)** $f(4) = 1$ **b)** $f(3)$ n'est pas définie **c)** $4f(x) = \dfrac{4}{x-3}$

d) $f(4x) = \dfrac{1}{4x-3}$ **e)** $f(x+4) = \dfrac{1}{x+1}$ **f)** $f(4) + f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$

g) $f(-x) = -\dfrac{1}{x+3}$ **h)** $-f(x) = \dfrac{1}{3-x}$

Exercice 1.9:

a) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ **b)** $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$

c) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ **d)** $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 3\sqrt{2}\}$

e) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}^* - \{-1\}$ **f)** $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-2/3\,;7\}$

g) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ **h)** $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-2 \pm \sqrt{22}\}$

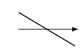
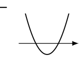
Exercice 1.10:

a) $\mathrm{E_D}(f) =]-\infty\,;2]$ **b)** $\mathrm{E_D}(f) = [-3\,;3]$

c) $\mathrm{E_D}(f) = [1\,;+\infty[$ **d)** $\mathrm{E_D}(f) =]-\infty\,;-5] \cup [1\,;+\infty[$

e) $\mathrm{E_D}(f) =]5\,;+\infty[$ **f)** $\mathrm{E_D}(f) =]-\infty\,;3] \cup]5\,;+\infty[$

Exercice 1.11:

	$\mathrm{E_D}$	Zéro(s)	Tableau de signes
a)	$\mathbb{R}$	$x = \frac{4}{5}$	$\begin{array}{c\|ccc} & & 4/5 & \\ \hline f(x) & + & 0 & - \end{array}$ 
b)	$\mathbb{R}$	$x = -1$ et $x = 2$	$\begin{array}{c\|ccccc} & & -1 & & 2 & \\ \hline f(x) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$ 
c)	$\mathbb{R}$	$x = -4$ et $x = -2$	$\begin{array}{c\|ccccc} & & -4 & & -2 & \\ \hline f(x) & - & 0 & - & 0 & + \end{array}$
d)	$\mathbb{R}$	$x = 0, \frac{1}{3}$ et $\frac{3}{2}$	$\begin{array}{c\|ccccccc} & & 0 & & 1/3 & & 3/2 & \\ \hline f(x) & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$
e)	$\mathbb{R}$	$x = \pm 2$	$\begin{array}{c\|ccccc} & & -2 & & 2 & \\ \hline f(x) & - & 0 & - & 0 & + \end{array}$
f)	$\mathbb{R}$	$x = \pm 2$	$\begin{array}{c\|ccccc} & & -2 & & 2 & \\ \hline f(x) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$
g)	$\mathbb{R} - \{3/2\}$	$x = -4$ et $x = 0$	$\begin{array}{c\|ccccccc} & & -4 & & 0 & & 3/2 & \\ \hline f(x) & + & 0 & - & 0 & + & \| & - \end{array}$
h)	$\mathbb{R} - \{\pm 4\}$	$x = 0$	$\begin{array}{c\|ccccccc} & & -4 & & 0 & & 4 & \\ \hline f(x) & + & \| & - & 0 & + & \| & - \end{array}$
i)	$\mathbb{R} - \{-1\,;0\}$	$x = -2$	$\begin{array}{c\|ccccccc} & & -2 & & -1 & & 0 & \\ \hline f(x) & - & 0 & - & \|0\| & - & \| & + \end{array}$
j)	$\mathbb{R}^*$	$x = \pm 1$	$\begin{array}{c\|ccccccc} & & -1 & & 0 & & 1 & \\ \hline f(x) & - & 0 & + & \| & - & 0 & + \end{array}$
k)	$\mathbb{R} - \{-1\,;0\}$	$x = -\frac{1}{4}$	$\begin{array}{c\|ccccccc} & & -1 & & -1/4 & & 0 & \\ \hline f(x) & - & \| & + & 0 & - & \| & + \end{array}$

Exercice 1.12: **b)** La réunion des 2 graphes des fonctions correspond au cercle d'équation : $x^2 + y^2 = 9^2$.

Exercice 1.13: **a)** $f(x) = 2x^2 - 3x - 3$ **b)** $f(x) = -x^2 + 2x - 3$
c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

Exercice 1.14:
a) Le canon se situe à 10 km de Lausanne.
b) La cible se situe à 55 km de Lausanne.
c) La flèche se situe à une altitude de 1012,5 m.
d) La cible se situe à 15 km ou à 50 km de Lausanne.

Exercice 1.15: **a)** $f(x) = 3x^2 - 4x - 1$ **c)** $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

Exercice 1.16:
a) $f(6-k) = f(6+k) = k^2 - 32$
b) Axe de symétrie : $x = 6$ *(il s'agit bien d'une droite verticale)*

Exercice 1.17:
a) $f\left(-\dfrac{b}{2a} - k\right) = f\left(-\dfrac{b}{2a} + k\right) = \dfrac{4a^2k^2 + 4ac - b^2}{4a}$
b) Axe de symétrie : $x = -\frac{b}{2a}$ *(il s'agit bien d'une droite verticale)*

Exercice 1.18:
a) Pas de zéro ; $S\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{4}\right)$.
b) Zéros en $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$; $S\left(\dfrac{5}{4}\,;-\dfrac{9}{8}\right)$.
c) Zéros en $x = 2$ et $x = 5$; $S\left(\dfrac{7}{2}\,;\dfrac{9}{4}\right)$.
d) Zéros en $x = 0$ et $x = 9$; $S\left(\dfrac{9}{2}\,;-\dfrac{81}{4}\right)$.

Exercice 1.19: Un corrigé peut être vu ensemble à votre demande.

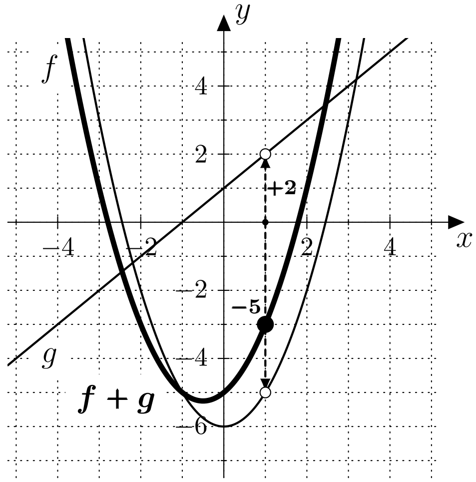
Exercice 1.20:
a)
- $(f+g)(x) = \dfrac{3x^2 + 6x + 1}{x+2}$
- $(f-g)(x) = \dfrac{3x^2 + 6x - 1}{x+2}$
- $(f \cdot g)(x) = \dfrac{3x}{x+2}$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = 3x(x+2)$

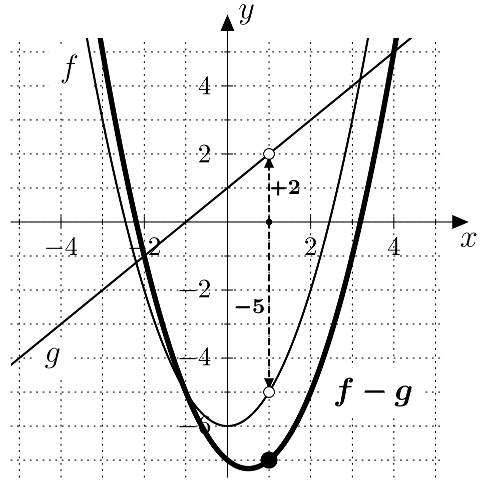
$E_D = \mathbb{R} - \{-2\}$ dans chacun des cas.

b)
- $(f+g)(x) = \dfrac{3x^2 + 6x}{(x-4)(x+5)}$
- $(f-g)(x) = \dfrac{x^2 + 14x}{(x-4)(x+5)}$
- $(f \cdot g)(x) = \dfrac{2x^2}{(x-4)(x+5)}$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{2x+10}{x-4}$

$E_D = \mathbb{R} - \{-5\,;4\}$ pour les 3 premiers cas puis, $E_D = \mathbb{R}^* - \{-5\,;4\}$.

Exercice 1.21:





$$\begin{aligned}(f+g)(1) &= f(1)+g(1)\\ &= \mathbf{-5}+(\mathbf{+2})\\ &= \mathbf{-3}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(f-g)(1) &= f(1)-g(1)\\ &= \mathbf{-5}-(\mathbf{+2})\\ &= \mathbf{-7}\end{aligned}$$

Et de même pour d'autres valeurs de x

Exercice 1.22:

a) On obtient la courbe $y = f(x) + c$ par une translation verticale de c unités vers le haut de la courbe $y = f(x)$.

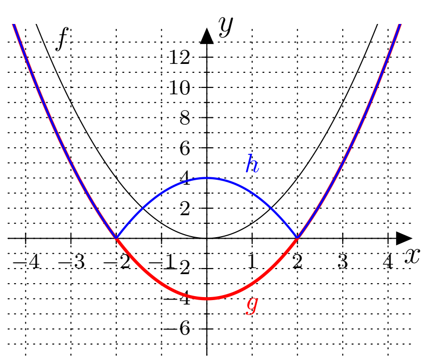
b) On obtient la courbe $y = f(x + c)$ par une translation horizontale de c unités **vers la gauche** de la courbe $y = f(x)$.

c) On obtient la courbe $y = c{\cdot}f(x)$ par une augmentation (ou diminution) d'un rapport c de l'amplitude de la courbe $y = f(x)$.

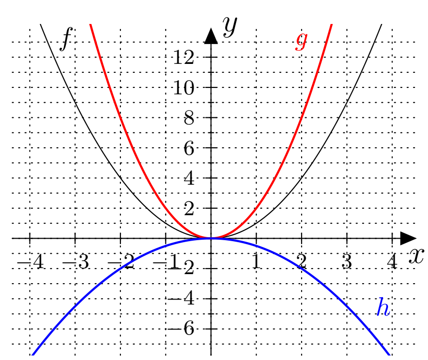
d) On obtient la courbe $y = -f(x)$ par une symétrie axiale de la courbe $y = f(x)$ par rapport à l'axe Ox.

e) On obtient la courbe $y = |f(x)|$ par "un rebond" de la courbe $y = f(x)$ au-dessus de l'axe Ox.

Exercice 1.23:



a)



b)

Exercice 1.24:

a) $f\big(g(x)\big) = 3x - 6$ **b)** $g\big(f(x)\big) = 3x - 2$

c) $f\big(f(x)\big) = 9x$ **d)** $f\big(g(h(x))\big) = 6x - 15$

e) $g\big(f(h(x))\big) = 6x - 11$ **f)** $h\big(g(h(x))\big) = 4x - 13$

Exercice 1.25:

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_0	f_4	f_5	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_0	f_1	f_5	f_4
f_3	f_3	f_2	f_5	f_4	f_0	f_1
f_4	f_4	f_5	f_1	f_0	f_3	f_2
f_5	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0

Exercice 1.26: **a)** $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = 3x + 1$ **b)** $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h(x) = 2x + 3$

c) $g(x) = x^2$ et $h(x) = x + 3$ **d)** $g(x) = \log(x)$ et $h(x) = x^2 + 4$

e) $g(x) = 3^x$ et $h(x) = 2x$ **f)** $g(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ et $h(x) = \sqrt{x}$

Exercice 1.27: **a)** Oui **b)** Non **c)** Non **d)** Oui

Exercice 1.28:

- $\begin{array}{rcl} {}^{r}f_1 : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$
- $\begin{array}{rcl} {}^{r}f_2 : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{3} \end{array}$
- $\begin{array}{rcl} {}^{r}f_3 : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x-3}{2} \end{array}$
- $\begin{array}{rcl} {}^{r}f_4 : \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$
- $\begin{array}{rcl} {}^{r}f_5 : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$
- $\begin{array}{rcl} {}^{r}f_6 : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_- \\ x & \mapsto & -\sqrt{x} \end{array}$
- $\begin{array}{rcl} {}^{r}f_7 : \mathbb{R} - \{2\} & \to & \mathbb{R} - \{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array}$
- $\begin{array}{rcl} {}^{r}f_8 : \mathbb{R} - \{1\} & \to & \mathbb{R} - \{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$

Exercice 1.29: Les graphes de f et ${}^{r}f$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 1.30: **a)** $\mathrm{E_D} = \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ **b)** ${}^{r}f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

c) La fonction est égale à sa réciproque **d)** $f(x) = x$ (*par exemple*)

Exercice 1.31:
a) VRAI **b)** FAUX **c)** VRAI
d) FAUX **e)** FAUX (*en général*) **f)** VRAI
g) VRAI **h)** VRAI **i)** VRAI

A.2 Limites et asymptotes

Exercice 2.1:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ???$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ non défini

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 1$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 2.2: **a)** 1,386 **b)** $-\infty$ **c)** 3 **d)** non défini

Exercice 2.3: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ non défini $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \sqrt{2}+1$

Exercice 2.4:

a) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-8\,;-6\,;-4\,;3\,;7\}$

b) Zéros $= \{-5\,;-3\,;-1\,;6\}$

c)

a	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	Caractéristiques
$-\infty$			2	AHG en $y = 2$
-8	0	0	0	Trou en $(-8\,;0)$
-6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	AV en $x = -6$
-4	1	1	1	Trou en $(-4\,;1)$
-2	-2	-2	-2	Aucune
0	4	4	4	Aucune
3	5	2	Non défini	Trous en $(3\,;5)$ et $(3\,;2)$
7	$-\infty$	$+\infty$	Non défini	AV en $x = 7$
$+\infty$			3	AHD en $y = 3$

Exercice 2.5:

a) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ 10 **b)** $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ 7

c) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ -3 **d)** $\mathrm{E_D}(f) = [-5\,;5]$ 3

e) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ -3/5 **f)** $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ 1/5

g) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-3\,;4\}$ 1/7 **h)** $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$ 9/2

i) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{2\,;3\}$ -4 **j)** $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-3\,;-1\}$ 1/2

k) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$ 1/4 **l)** $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{2\,;4\}$ -1/2

Exercice 2.6:

a)	$\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$	$+\infty$	puis $-\infty$
b)	$\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$	$+\infty$	puis $-\infty$
c)	$\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$	$-\infty$	puis $+\infty$
d)	$\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$	-4	puis -4 *(il s'agit d'un trou !)*

Exercice 2.7:

a)	$\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}^*$	-2	**b)**	$\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$	2
c)	$\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-5\,;-3\}$	4	**d)**	$\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-5\,;-3\}$	0
e)	$\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-5\,;-3\}$	non déf.			

Exercice 2.8: $\lim\limits_{t\to 44^-} V(t) = 1{,}01$, $\lim\limits_{t\to 44^+} V(t) = 1{,}045$, $\lim\limits_{t\to 44} V(t)$ non défini

Exercice 2.9:

a)	$\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$	3	**b)**	$\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$	-1
c)	$\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$	non déf.	**d)**	$\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{1\,;5\}$	non déf.

Exercice 2.10:

a)	$\mathrm{E_D}(f) = [0\,;+\infty[-\{1\}$	1/2	**b)**	$\mathrm{E_D}(f) = [0\,;+\infty[-\{9\}$	6
c)	$\mathrm{E_D}(f) = [1/2\,;+\infty[-\{5\}$	3	**d)**	$\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}^*$	2
e)	$\mathrm{E_D}(f) = [-2\,;+\infty[-\{2\}$	1/4	**f)**	$\mathrm{E_D}(f) = [-7\,;+\infty[-\{2\}$	-1/6

Exercice 2.11: 1/2

Exercice 2.12: **a)** -1 **b)** 20 **c)** non défini **d)** $-\infty$

Exercice 2.13: **a)** 2/3 **b)** 0 **c)** 1/2 **d)** 1/2 **e)** 0 **f)** -2

Exercice 2.14: **a)** $-\infty$ **b)** $+\infty$ **c)** 1 **d)** 2/5

Exercice 2.15: **a)** La première **b)** La deuxième **c)** La première

Exercice 2.16:

a) AV en $x = \pm 3$ **b)** AV en $x = -2$ et $x = 5$

c) AV en $x = -1$ et $x = 3$ **d)** Il n'y a pas d'AV mais un trou

Exercice 2.17: **a)** AH en $y = 0$ **b)** AH en $y = 2$ **c)** AH en $y = 1$

Exercice 2.18:

	AV en	**AO en**
a) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$	$x = 0$	$y = x$
b) $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1}$	$x = 1$	$y = x - 1$
c) $f(x) = x + \dfrac{8}{x^2+2x+4}$	aucune	$y = x$
d) $f(x) = -2x + 5 + \dfrac{1}{x-5}$	$x = 5$	$y = -2x + 5$

Exercice 2.19: **a)** ❷ **b)** ❻ **c)** ❺ **d)** ❶ **e)** ❹ **f)** ❸

Exercice 2.20: $a = -2$; $b = 4$; $c = 1$; $d = -3$ (*par exemple*)

Exercice 2.21: **a)** f_7 **b)** f_{12} **c)** f_1 **d)** f_5 **e)** f_9 **f)** f_8
g) f_3 **h)** f_{10} **i)** f_2 **j)** f_4 **k)** f_{11} **l)** f_6

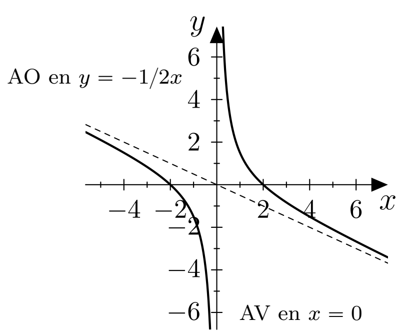
Exercice 2.22: **a)** $f(x) = \dfrac{\text{polynôme de degré} \geqslant 3 \textbf{ et } \text{non divisible par } (x-2)}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{5x}{x+3}$ **c)** Impossible

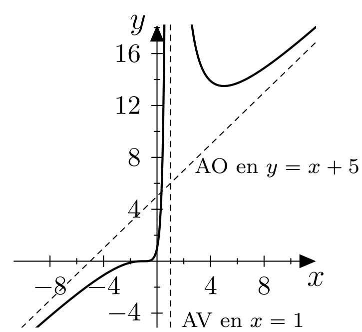
Exercice 2.23:

Si $n = 0$	AV en $x = \pm 3$	AH en $y = 0$
Si $n = 1$	AV en $x = 3$	AH en $y = 0$
Si $n = 2$	AV en $x = \pm 3$	AH en $y = 1$
Si $n = 3$	AV en $x = \pm 3$	AO en $y = x$
Si $n > 3$	AV en $x = \pm 3$	pas de AH et pas d'AO

Exercice 2.24: Seules les 2 esquisses sont proposées :

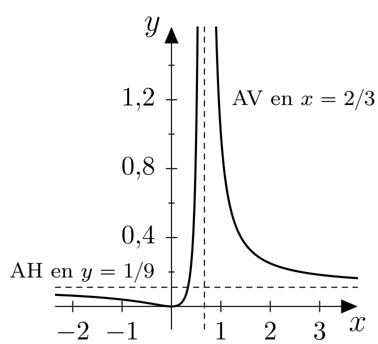


a)

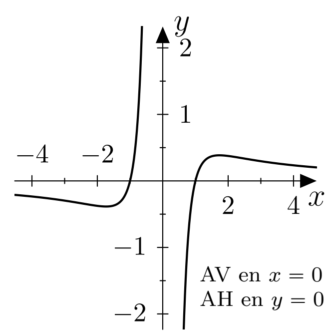


b)

Exercice 2.25: Seules les 2 esquisses sont proposées :



a)



b)

Exercice 2.26: **a)** $f(x) = \dfrac{-2x^2}{(x+3)(x-2)}$

b) $g(x) = x + \dfrac{x-1}{x(x+2)} = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x(x+2)}$

Exercice 2.27: $a = 1$; $b = -2$; $c = 0$

A.3 Introduction à la notion de dérivée

Exercice 3.1: Les solutions seront vues ensemble.

Exercice 3.2: Les solutions seront vues ensemble.

Exercice 3.3: **a)** $m = 0$ **b)** $m = 12$ **c)** $m = \frac{\sqrt{3}}{6}$ **d)** $m = 3$ (*prévisible, non ?*)
e) $m = -2$ puis pente non définie (cf. ED)

Exercice 3.4: **a)** $f'(x) = 2x - 2$ **b)** $f'(x) = 3$ **c)** $f'(x) = -2x + 4$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **e)** $f'(x) = 0$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x}$

Exercice 3.5: **a)** $f'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{x}}{2x^2}$

b) $m = f'(1/4) = -4$

c) $$\left.\begin{aligned} y &= mx + h \\ m &= -4 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} y = -4x + h \\ \text{passe par } (1/4\,;2) \end{array}\right\} \Longrightarrow h = 3$$
$$\Longrightarrow y = -4x + 3$$

Exercice 3.6:
- $f'(x) = \dfrac{-3}{x^2} \Longrightarrow m = f'(3) = -1/3$
- $$\left.\begin{aligned} y &= mx + h \\ m &= -1/3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} y = -1/3x + h \\ \text{passe par } (3\,;3) \end{array}\right\} \Longrightarrow h = 4$$
$$\Longrightarrow y = -1/3x + 4$$

A.4 Dérivées et règles de dérivation

Exercice 4.1: *Indication : plusieurs réponses sont possibles. Demandez-moi si vous avez un doute.*

a) $f'(x) = 3$ **b)** $f'(x) = 42t^5$ **c)** $f'(x) = 7\sqrt{2}x^6$ **d)** $f'(x) = 2ax$

e) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2x}$ **f)** $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$

g) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

h) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^3}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x}}$ ou encore mieux $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{x}}{x^2}$

i) $f'(x) = \dfrac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{2\sqrt[7]{x^2}}{7x}$

j) $f'(x) = 2(m-1)x$ **k)** $f'(x) = 0$

Exercice 4.2: *Indication : plusieurs réponses sont possibles. Demandez-moi si vous avez un doute.*

a) $f(x) = 17x^2$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4$

c) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^{3/2} = \underline{\underline{\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}}}$ **d)** $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

Exercice 4.3: *Indication : plusieurs réponses sont indiquées. Il faut préférer celles qui sont soulignées (mise au même dénominateur, factorisées, ...)*

a) $f'(x) = 3$ **b)** $f'(x) = 8x - 2$

c) $f'(x) = 9x^2 - 2$ **d)** $f'(x) = a$

e) $f'(x) = 2x + \dfrac{3}{x^2} = \underline{\underline{\dfrac{2x^3+3}{x^2}}}$ **f)** $f'(x) = 2x + \dfrac{\sqrt{x}}{2x} = \underline{\underline{\dfrac{4x^2+\sqrt{x}}{2x}}}$

g) $f'(x) = \dfrac{-6}{x^3} + 3 = \underline{\underline{\dfrac{3x^3-6}{x^3}}}$ **h)** $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \underline{\underline{\dfrac{-x-2}{x^3}}}$

i) $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{3x^2} = \underline{\underline{\dfrac{(3x+1)(3x-1)}{3x^2}}}$ **j)** $f'(x) = 2ax + b$

Exercice 4.4: *Indication : plusieurs réponses sont possibles. En particulier, vous pouvez choisir le dernier terme sous la forme d'un nombre.*

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x +$ nbre **b)** $f(x) = x^4 + x^3 +$ nbre

c) $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x} +$ nbre **d)** $f(x) = \dfrac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} +$ nbre

Exercice 4.5: *Indication : La réponse est attendue sous une forme factorisée.*

a) $f'(x) = 2(2x-3)(3x+2)$ **b)** $f'(x) = 2(x+4)$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{(3-x)^2}$ **d)** $f'(x) = \dfrac{11}{(4-x)^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{-2\left(x^3-3x^2+1\right)}{(x-2)^2}$ **f)** $f'(x) = 2(3x-5)$

g) $f'(x) = \dfrac{-4x^2-4x+43}{2(2x+1)^2}$ **h)** $f'(x) = 48x^3-84x^2-30x+35$

Exercice 4.6: **a)** $f'(x) = 10(2x+4)^4$ **b)** $f'(x) = 15x\sqrt{5x^2-3}$

c) $f'(x) = \dfrac{8x-1}{\sqrt{8x^2-2x+3}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{(8x-1)\sqrt{8x^2-2x+3}}{8x^2-2x+3}$

d) $f'(x) = \dfrac{5}{2(x+1)^2}\sqrt{\dfrac{x+1}{3x-2}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{5\sqrt{(x+1)(3x-2)}}{2(x+1)^2(3x-2)}$

e) $f'(x) = 6x(x-1)^2(x+1)^2$ **f)** $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}{2x^3}$

g) $f'(x) = -(x-1)^2(x+2)(5x+4)$ **h)** $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$

i) $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{(x-3)(x+2)}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{(2x-1)\sqrt{(x-3)(x+2)}}{2(x-3)(x+2)}$

j) $f'(x) = \dfrac{(3x-1)^2(6x+31)}{(2x+3)^3}$

Exercice 4.7: **a)** $f(x) = \left(x^2-1\right)^5 +$ nbre **b)** $f(x) = (4-x)^3+$ nbre

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} +$ nbre ou mieux $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x} +$ nbre

d) $f(x) = \left(x^2-1\right)^2+$ nbre

Exercice 4.8:

a) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = x - 3$

b) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 2(x+1)$

c) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = -3(4-x)^2$

d) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 4x\,(3x^2+1)$

e) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 3(x+1)(x-1)$

f) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 2acx + ad + bc$

g) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 10(2x-1)^2(x+1)(x+2)$

h) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}^*$ $\quad f'(x) = -\dfrac{a}{x^2}$

i) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\quad f'(x) = \dfrac{6(x-2)}{(x+1)^3}$

j) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-6}{(x-1)^2}$

k) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\quad f'(x) = \dfrac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$

l) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ $\quad f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

m) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ou mieux $f'(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{3x}$

n) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

ou mieux $f'(x) = \dfrac{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$

o) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}_+ - \{1\}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$

ou vraiment peu sympathique !

p) $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}_+$ $\quad f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}(\sqrt{x+\sqrt{x}})}$ et ici...

Exercice 4.9: **a)** $y = -6x - 5$ $\quad$ **b)** $y = \dfrac{33}{4}x - 25$ $\quad$ **c)** $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{13}{5}$

Exercice 4.10: Au point $P\left(\dfrac{-3}{2}\,;\dfrac{9}{4}\right)$

Exercice 4.11: **a)** En $x = 2$ et en $x = -4/3$.

b) • L'équation de la tgte : $y = 3x - 10$ en $T_1(2\,;-4)$

• L'équation de la tgte : $y = 3x + \dfrac{230}{27}$ en $T_2\left(-\dfrac{4}{3}\,;\dfrac{122}{27}\right)$

Exercice 4.12: Aux points $P\left(3\,;\dfrac{1}{6}\right)$ et $Q\left(-3\,;-\dfrac{1}{6}\right)$

Exercice 4.13: $a = 3$

Exercice 4.14: **a)** Oui, la cible n°4 **b)** Non

Exercice 4.15: *Indication : Il s'agit de résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues.*

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{5}{3}x + 3$ **b)** $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

Exercice 4.16: **a)** 0° au point $P(0\,;0)$ 8,13° au point $Q(1\,;1)$

b) 35,54° au point $P(2\,;1)$ 45° au point $Q(6\,;9)$

c) 0° au point $P(-2\,;-13)$ 52,94° au point $Q(1/3\,;-8/27)$

d) 75,96° au point $P(0\,;0)$ 6,91° au point $Q(2\,;0)$

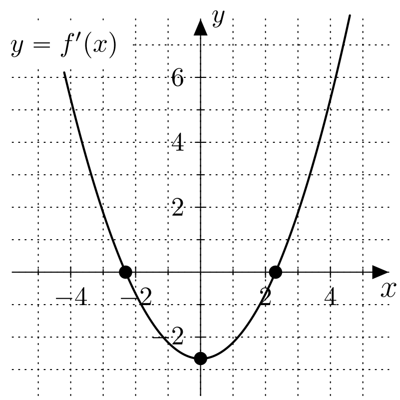
Exercice 4.17: **a)** $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

b) On utilise que si $m \cdot m' = -1$ alors les droites sont $\perp$.

c) Mêmes démarches.

A.5 Croissance et étude de fonctions

Exercice 5.1: On obtient approximativement le graphique suivant :



Exercice 5.2:
- Le graphe de f' correspond à l'esquisse ⑤.
- Le graphe de g' correspond à l'esquisse ⑥.

Exercice 5.3:

a)

x		$1/3$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
croissance	$\searrow$	min	$\nearrow$

- **Min**$(1/3\,;11/3)$

b)

x		-1		4	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
croissance	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

- **Max**$(-1\,;18)$
- **Min**$(4\,;-107)$

c)

x		-2		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
croissance	$\nearrow$	replat	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

- **Replat**$(-2\,;0)$
- **Max**$(1\,;108)$
- **Min**$(3\,;0)$

d)

x		-5	
$f'(x)$	$+$	$\|$	$+$
croissance	$\nearrow$		$\nearrow$

e)

x		-5		-2		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
croissance	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

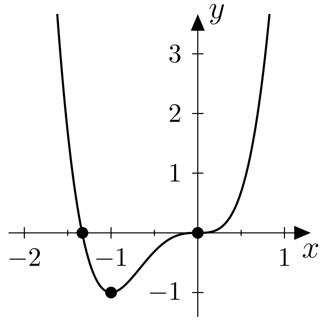
- **Max**$(-5\,;-12)$
- **Min**$(1\,;0)$

f)

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
croissance	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

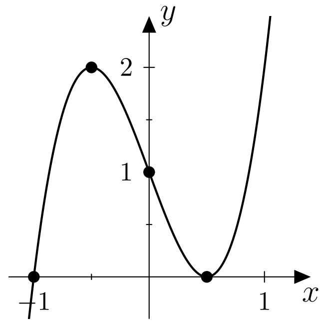
- **Min**$(-1\,;-1/2)$
- **Max**$(1\,;1/2)$

Exercice 5.4: **a)**



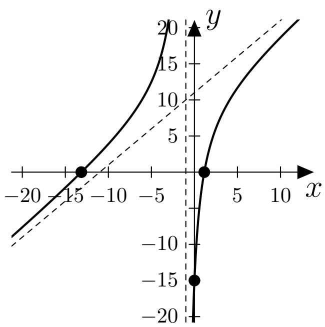
- $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$
- zéros en $x = -4/3$ et $x = 0$
- $f'(x) = 12x^3 + 12x^2$
- Min (-1 ; -1)
- Replat (0 ; 0)
- Ord. origine en $y = 0$

b)



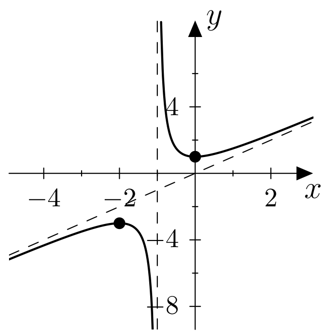
- $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$
- zéros en $x = -1$ et $x = 1/2$
- $f'(x) = 12x^2 - 3$
- Max (-1/2 ; 2)
- Min (1/2 ; 0)
- Ord. origine en $y = 1$

c)



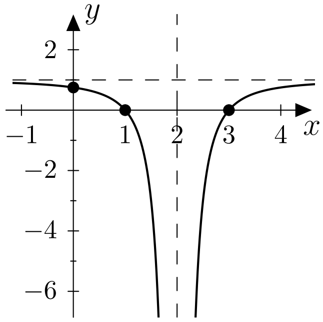
- $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$
- zéros en $x = -6 \pm \sqrt{51}$
- AV en $x = -1$
- AO en $y = x + 11$
- $\delta(x) = \dfrac{-26}{x+1}$
- $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 27}{(x+1)^2}$
- Ord. origine en $y = -15$

d)



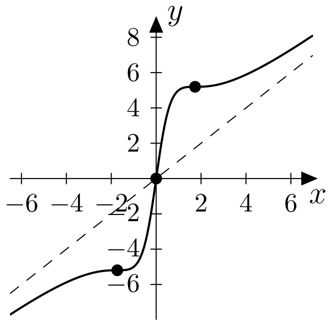
- $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$
- AV en $x = -1$, AO en $y = x$
- $\delta(x) = \dfrac{1}{x+1}$
- $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$
- Min (0 ; 1), Max (−2 ; −3)
- Ord. origine en $y = 1$

e)



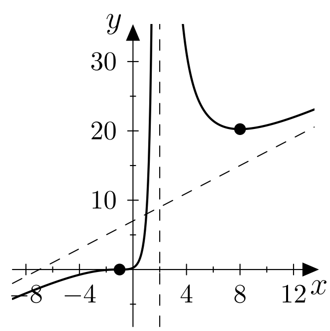
- $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- zéros en $x = 1$ et $x = 3$
- AV en $x = 2$, AH en $y = 1$
- $\delta(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$
- $f'(x) = \dfrac{2}{(x-2)^3}$
- Ord. origine en $y = 3/4$

f)



- $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R}$
- zéro en $x = 0$
- AO en $y = x$
- $\delta(x) = \dfrac{8x}{x^2+1}$
- $f'(x) = \dfrac{(x^2-3)^2}{(x^2+1)^2}$
- Replat $(-\sqrt{3}\,;-3\sqrt{3})$
- Replat $(\sqrt{3}\,;3\sqrt{3})$
- Ord. origine en $y = 0$

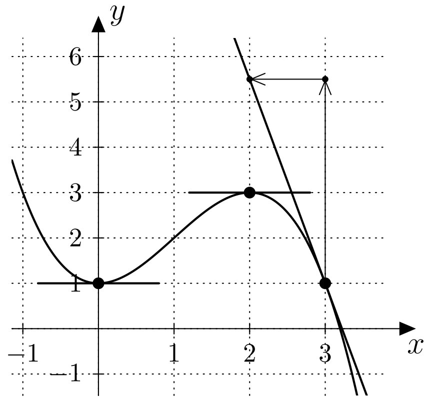
g)



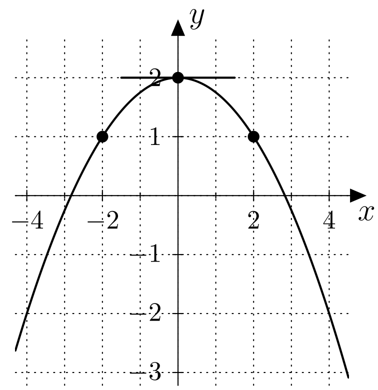
- $\mathrm{E_D}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- zéro en $x = -1$
- AV en $x = 2$, AO en $y = x + 7$
- $\delta(x) = \dfrac{27(x-1)}{(2-x)^2}$
- $f'(x) = \dfrac{(-x+8)(x+1)^2}{(2-x)^3}$
- Replat $(-1\,;0)$, Min $(8\,;81/4)$
- Ord. origine en $y = 1/4$

Exercice 5.5: Une animation GeoGebra est à votre disposition sur `www.javmath.ch`

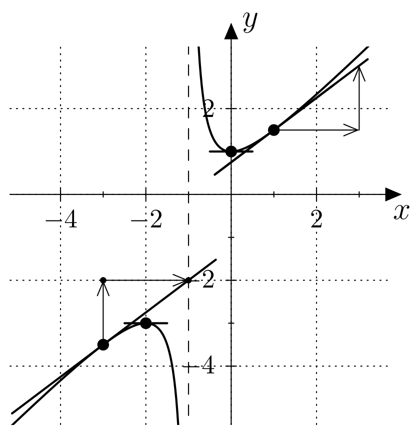
Exercice 5.6:



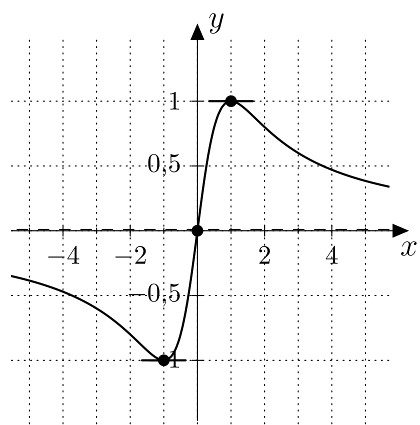
a)



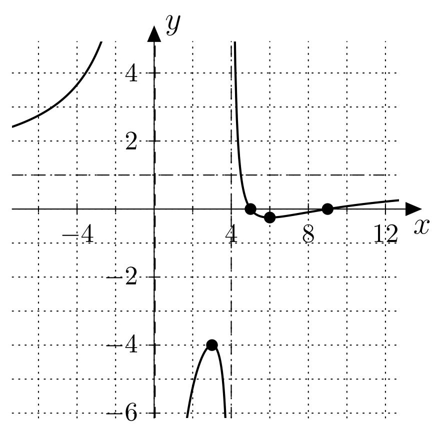
b)



c)



d)



e)

Exercice 5.7: **a)**

- $E_D(f) = \mathbb{R}^*$, zéros en $x = -3$ et $x = 3$.
-

		-3		0		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$

- AV en $x = 0$; AH en $y = 1$.
-

		0	
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$
croissance	↘		↗

ni Min, ni Max.

b)

- $E_D(f) = \mathbb{R} - \{-5\,;2\}$, zéros en $x = -8$, $x = 0$ et $x = 10$.
-

		-8		-5		0		2		10	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$

- AV en $x = -5$ et $x = 2$; AH en $y = -1$.
-

		-12		-5		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$-$
croissance	↘	min	↗		↘		↘

Min $(-12\,;-1{,}5)$.

Exercice 5.8: **a)**

- $E_D(f) = \mathbb{R} - \{-8\,;-4\,;4\}$, zéro en $x = 0$.
-

		-8		-4		0		4	
$f(x)$	$+$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$

- AV en $x = -8$, $x = -4$ et $x = 4$; AH en $y = 1/2$.
-

		-8		-5		-4		0		4		11	
$f'(x)$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
croissance	↗		↘	min	↗		↗	replat	↗		↘	min	↗

- Min $(-5\,;2)$; Min $(11\,;0{,}3)$.

b)

- $E_D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, zéro en $x = -1$.
-

		-1		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$

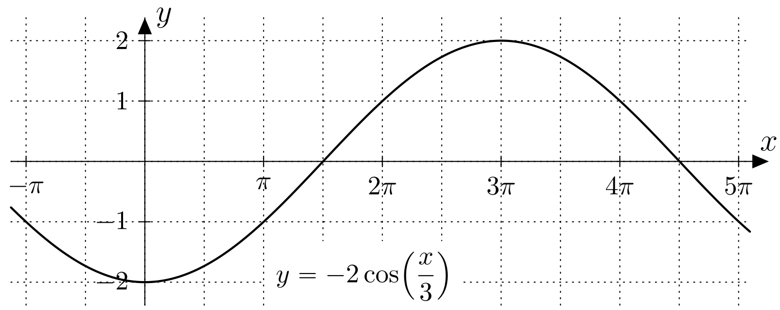
- AV en $x = 2$; AO en $y = x + 7$.
-

		-1		2		8	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
croissance	↗	replat	↗		↘	min	↗

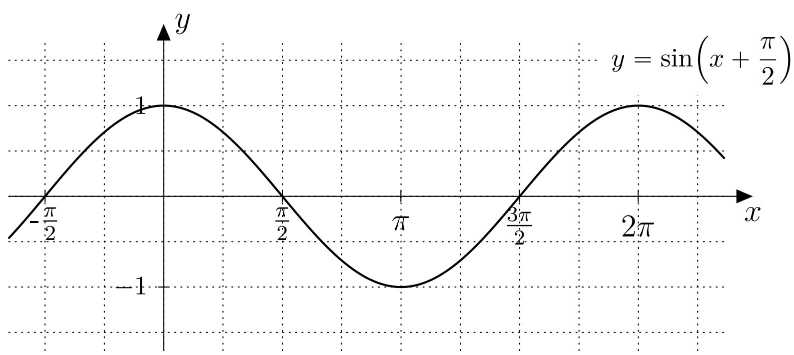
Min $(8\,;20{,}2)$.

A.6 Fonctions trigonométriques

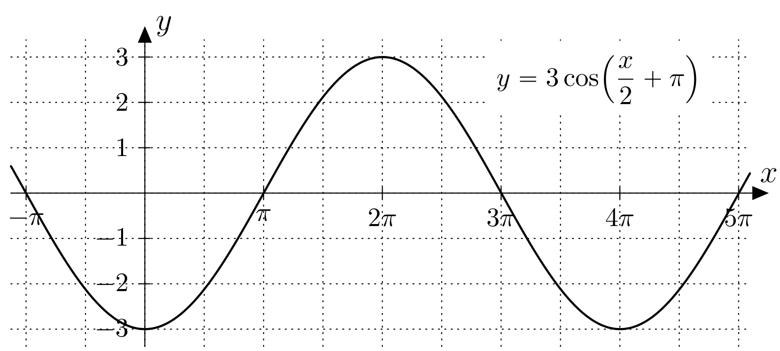
Exercice 6.1: **a)** Période de 6π et une amplitude de 2.



b) Période de 2π et une amplitude de 1.



c) Période de 4π et une amplitude de 3.



Exercice 6.2:

fonctions	période	amplitude	graphe
f	2π	1	③
g	$2\pi/3$	2	②
h	4π	1	④
i	$2\pi/3$	2	①

Exercice 6.3: Dans toutes les réponses de cet exercice, $k \in \mathbb{Z}$:

a) $S = \{120° + k \cdot 360°\} \bigcup \{240° + k \cdot 360°\}$

b) $S = \{41{,}33° + k \cdot 120°\} \bigcup \{18{,}67° + k \cdot 120°\}$

c) $S = \{-37{,}02° + k \cdot 180°\}$

d) $S = \varnothing$

e) $S = \{158{,}75° + k \cdot 360°\}$

f) $S = \{-20° + k \cdot 120°\} \bigcup \{80° + k \cdot 120°\}$

Exercice 6.4: Dans toutes les réponses de cet exercice, $k \in \mathbb{Z}$:

a) $S = \left\{\frac{7\pi}{12} + k \cdot 2\pi\right\} \bigcup \left\{\frac{-\pi}{12} + k \cdot 2\pi\right\}$

b) $S = \left\{\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right\} \bigcup \{k \cdot 2\pi\}$

c) $S = \{k \cdot \pi\} \bigcup \left\{\frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi\right\}$

d) $S = \left\{\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right\} \bigcup \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$

e) $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$

f) $S = \left\{\frac{-\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right\}$

Exercice 6.5: Dans toutes les réponses de cet exercice, $k \in \mathbb{Z}$:

Si votre réponse ne correspond pas exactement à celle proposée, il est probable que la vôtre soit équivalente, mais formulée sous une autre forme.

a) $S = \{k \cdot 2\pi\} \bigcup \{\pi + k \cdot 2\pi\}$

ou de façon plus synthétique : $S = \{k \cdot \pi\}$

b) $S = \left\{\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right\} \bigcup \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right\} \bigcup \left\{\frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right\} \bigcup \left\{\frac{-\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right\}$

ou de façon plus synthétique : $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi\right\} \bigcup \left\{\frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi\right\} \bigcup \left\{\frac{-\pi}{3} + k \cdot \pi\right\}$

d) $S = \left\{\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right\} \bigcup \left\{\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right\} \bigcup \left\{\frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right\} \bigcup \left\{\frac{-\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right\}$

ou de façon plus synthétique : $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi\right\} \bigcup \left\{\frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi\right\}$

e) $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi\right\} \bigcup \left\{\frac{-\pi}{4} + k \cdot \pi\right\}$

f) Et si vous compariez cette équation à la précédente !!

Exercice 6.6: Dans toutes les réponses de cet exercice, $k \in \mathbb{Z}$:

a) $S = \{150° + k \cdot 360°\} \bigcup \{30° + k \cdot 360°\}$

b) $S = \{60° + k \cdot 360°\} \bigcup \{-60° + k \cdot 360°\} \bigcup \{k \cdot 360°\}$

c) $S = \{-45° + k \cdot 180°\}$

Exercice 6.7: Dans toutes les réponses de cet exercice, $k \in \mathbb{Z}$:

a) $S = \{135° + k \cdot 360°\} \cup \{45° + k \cdot 360°\} \cup \{225° + k \cdot 360°\} \cup \{-45° + k \cdot 360°\}$

ou mieux : $S = \{45° + k \cdot 90°\}$

b) $S = \{30° + k \cdot 360°\} \cup \{150° + k \cdot 360°\} \cup \{-90° + k \cdot 360°\}$

ou mieux : $S = \{30° + k \cdot 120°\}$

c) $S = \{41{,}81° + k \cdot 360°\} \cup \{138{,}19° + k \cdot 360°\}$

Exercice 6.8: **a)** Le graphe de f correspond au graphe n° 2, celui de g au graphe n° 1.

b) En utilisant la relation $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ en cours de résolution de l'équation $f(x) = g(x)$, vous obtiendrez finalement :

$$A\left(\frac{\pi}{12}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) \quad \text{et} \quad B\left(\frac{7\pi}{12}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$$

Exercice 6.9: **a)** $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$ **b)** $f'(x) = x\big(2\cos(x) - x\sin(x)\big)$

c) $f'(x) = -\sin(x) - 2\tan^2(x) - 2$ **d)** $f'(x) = \dfrac{x - \sin(x)\cdot\cos(x)}{x^2\cos^2(x)}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos(x) + 1}$

f) $f'(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x) + x\sin(x) - x\cos(x)}{2\sin(x)\cos(x) + 1}$

Exercice 6.10: Il s'agit de calculer $\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'$ avec la règle de dérivation des fractions.

Voyez-vous pourquoi deux réponses peuvent être proposées ?

Exercice 6.11: **a)** $y = x - \pi$ **b)** $y = -x$

Exercice 6.12: en $x = 2\pi/3$ et $x = 4\pi/3$ (n'oubliez pas d'utiliser un cercle trigo)

Exercice 6.13: **a)** $f'(x) = 3\tan^2(3x) + 3$ **b)** $f'(x) = -3x^2\sin\big(x^3\big)$

c) $f'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)$ **d)** $f'(x) = \dfrac{-\cos(1/x)}{x} + \sin(1/x)$

Si vous souhaitez commander ou utiliser ce polycopié dans vos classes, merci de prendre contact avec son auteur en passant par son site web :

`www.javmath.ch`